ガウスの数学日記について（続）

高瀬正仁（福岡県福岡市）

昨年（平成15年）の「数学史シンポジウム」での講演ではガウスの数学日記の概要を述べ，下記のように大きく三つに区分けして解明するという方針を提示した.

I. 『整数論』への道

II. オイラー積分

III. 『整数論』以後

ガウスに及ぼされたオイラーの影響の大きさを重く見て，「オイラーをもってガウスを理解する」という解明の基本方針を設定した．オイラー全集を深く読み込んでいく度合いに応じ，ガウスの数学日記の理解もまたおのずと深まっていくと期待される．今回は「II」の「オイラー積分」に着目し，数学日記の記事とオイラーの原論文との比較対照を試みるとともに，クラインとシュレジンガーの注釈を参照しながら所見を述べたいと思う.

1. ガウス全集の成立過程について

今日，一般に流布しているオルムス社版のガウス全集（全12巻）はいくぶん複雑な過程を経て成立した．これはクラインとシュレジンガーが編纂した全集の復刻版だが，そのクラインとシュレジンガーの全集は，ガウスの没後，二度目に編纂された全集である．ガウスの没後，ガウス全集の編纂は二度にわたって行われ，一番はじめの全集の編纂者はシェリングであった．全7巻の構成で，初版の刊行時期は1863年から1874年まで12年間を歳月をかけて順次刊行されたが，完結の前にすでに既刊本の第二版の刊行も始まっている．全7巻の構成と刊行年（初版と再版）は次の通りである.

［シェリングが編纂したガウス全集］

巻1．初版，1863年．ガウスの1801年の作品『整数論考究』が収録された．第2版，1870年．

巻2．初版，1863年．数論の諸論文が収録された．第2版，1876年．巻再版にあたり「初版への補遺」が付け加えられた．

巻3．初版，1866年．解析学．第2版，1876年．

巻4．初版，1873年．確率論と幾何学．第2版，1880年．

巻5．初版，1867年．数理物理学．第2版，1877年．

巻6．初版，1874年．天文学論文集．

巻7．初版，1871年．1809年の著作『天体運動論』が収録されている．

クラインとシュレジンガーは，シェリングが編纂した7巻本の全集を拡大して12巻本の全集を編纂した．すなわち，増補改訂版を作ったわけである．はじめの6巻まではシェリングが編纂した全集の復刻だが，初版を原本にして復刻したため，再版の巻2に付けられた補遺は収録されなかった．この点は惜しむべき不備である．巻7は，シェリング版の巻7を土台にしてが作られた新巻である．巻8～12はクラインとシュレジンガーが新たに編纂した．

クラインとシュレジンガーが編纂したガウス全集の構成は次の通りである．

［クラインとシュレジンガーが編纂したガウス全集］

巻1～7．シェリング版と同じ．

巻7，1906年．著作『運動論』に加え，理論天文学の遺稿（放物運動，セレスとパラスの摂動，月の理論）と書簡が大量に増補された．

巻8，1900年．遺稿と書簡と公示（巻1-4，8への補遺）と数学日記．数論と代数（巻1-3への補遺），解析学と関数論（巻3への補遺），確率論（巻4への補遺），幾何学の基礎（巻4への補遺），位置の幾何学（巻4への補遺），初等幾何学の問題と定理（巻4への補遺），幾何学に対する複素量の使用（巻4への補遺），曲面論（巻4への補遺）

巻9，1903年．測地学（巻4の続き）

巻10（2分冊）

分冊1，1917年．純粋数学に寄せる遺稿と書簡（巻1～4と巻8への補遺）

整数論．巻1-2，巻8への補遺．

代数学．巻1，巻3，巻8への補遺．

解析学．巻3と巻8への補遺．

数学日記

「数学日記」の写しが附録として綴じ込んである．その日記の本文は19頁である（日記の全文）．オストワルトクラシカー版のテキストにもファクシミリが掲載されているが，そこには日記の最終項目「146」が出ている最終頁の次に，もう一枚の紙片がある．これを合わせると，日記は全20頁になる．シェリング版の全集が作られた時期にはまだ数学日記は発見されていなかった．

分冊2，1922-33年．純粋数学の領域に寄せるガウスの科学上の業績に関する諸論文．

解説集

［執筆者とテーマと発表年］

論文1，1922年．バハマン，数論．

論文2，1933年．シュレジンガー，関数論．

論文3，1933年．オストロフスキー，代数学の基本定理のガウスの第1証明と第4証明．

論文4，1923年．シュテッケル，幾何学．

論文5，1922年．ボルツァ，変分法．

論文6，1930年．メンヒェン，数値計算．

論文7，1922-1933年．Harald Geppert，力学とポテンシャル論．

巻11（2分冊）

分冊1，1927年．巻5-7への補遺．物理学，年代学，天文学への補遺

分冊2，1924-29年．測地学，物理学および天文学の領域に寄せるガウスの科学上の業績に関する諸論文．

［執筆者とテーマと発表年］

論文1，1924年．A.ガレ，燭地学．

論文2，1929年．Clemens Schaefer，物理学．

論文3，1929年．天文学，M.ブレンデル．

巻12，1929年．数表5頁．図19枚．いろいろなもの．地磁気地図．

数学日記の解明という観点から見ると，特に重要な意味をもつのは，第3巻，第8巻，それに第10巻の第1分冊である．そこにはガウスの遺稿が大量に採集されているが，それらは数学日記と合わせて全体としてひとつの世界を作っていると見なければならず，総合的な解明と考察が要請される．

2． オイラー全集より

五系列で構成されているオイラー全集の中で，数学に関連する著作や論文が集められているのは第一系列（全30巻，31冊）である．そのうち，オイラー積分に関係があるのは，

巻11～13．ここには著作『積分計算教程』全3巻が収録されている．

巻17～19．積分論に関する諸論文が蒐集された．

巻20～21．楕円積分論に関する諸論文が蒐集された．

である（全部で8巻になる）．

3． オイラーの関係式

ガウスの数学日記の中からオイラー積分に関連する項目を拾い，オイラーの影響が及ぼされている様子を観察したいと思う．

［50］（1797年1月7日）

$$\int \sqrt{\sin x}\,\partial x = 2\int \frac{y\,y\,\partial y}{\sqrt{1-y^4}}$$
$$\int \sqrt{\tan x}\,\partial x = 2\int \frac{\partial y}{\sqrt[4]{1-y^4}} \qquad y\,y = \frac{\sin}{\cos}\,x$$
$$\int \sqrt{\frac{1}{\sin x}}\,\partial x = 2\int \frac{\partial y}{\sqrt{1-y^4}}$$

変数変換 $y^2 = \sin x$ を行うと，積分の三つの変換式

$$\int \sqrt{\sin x}\,\partial x = 2\int \frac{y\,y\,\partial y}{\sqrt{1-y^4}}, \int \sqrt{\tan x}\,\partial x = 2\int \frac{\partial y}{\sqrt[4]{1-y^4}},$$
$$\int \sqrt{\frac{1}{\sin x}}\,\partial x = 2\int \frac{\partial y}{\sqrt{1-y^4}}$$

が導出される．また，変数変換 $y^2 = \cos x$ を行うと，

$$2\int \frac{y\,y\,\partial y}{\sqrt{1-y^4}} = -\int \sqrt{\cos x}\,\partial x, 2\int \frac{\partial y}{\sqrt[4]{1-y^4}} = -\int \sqrt{\tan x}\,\partial x,$$
$$2\int \frac{\partial y}{\sqrt{1-y^4}} = -\int \sqrt{\frac{1}{\cos x}}\,\partial x$$

と変換される．この計算により，項目［50］の三つの公式が確認される．シュレジンガーの註記に指示されているように，第一の積分と第三の積分は「ライステ」に出ている．ガウス全集Ｘ１（巻10，第一分冊），145頁に収録されている記事「レムニスケート関数の最も古い研究」の，「［Ｉ］級数展開と加法定理，第1節」がそれで，そこに見られるのは

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1-p^4}} = \left[\frac{\pi}{4}\right]\frac{2}{\int \sqrt{\sin x}\,dx} = 1.311031$$ （全集への収録にあたり，二番目の積分の前に因子 $\frac{\pi}{4}$ が補われた．）

という，積分の変換公式である．第一番目の積分が日記［50］の第三式の右辺に出ているレムニスケート積分であり，第二の項の分母に出ている積分は，日記［50］の第一式の左辺に出ている積分である．

ところで，ガウス全集Ｘ１，146頁には，

$$\int \sqrt{\sin x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} - \int dx\left(\sqrt{x} - \sqrt{\sin x}\right) = 2\int \frac{p\,p\,dp}{\sqrt{1-p^4}}$$ （中項の $x^{\frac{2}{3}}$ は $x^{\frac{3}{2}}$ の誤記）

という積分変換公式が収録されている（同上第3節）．これらの二つの公式をつなぎ合わせると，

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1-p^4}} \cdot \int \frac{p\,p\,dp}{\sqrt{1-p^4}} = \frac{\pi}{4}$$

という，二つの楕円積分の間の関係式が得られる。これは「オイラーの関係式」という名で知られる公式である．日記［50］の記事それ自体にオイラーの関係式が明記さ

れているわけではないが，ガウスの数学的意識の中では隣接していたと見てさしつかえないと思われる場面であり，しかもそこにはオイラーの強い影響が感知されるのである．

「レムニスケート関数の最も古い研究」に附された註記（ガウス全集X 1，149-151頁）を参照すると，オイラーの論文

「方程式 $y=\int \frac{x\,x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ に包摂される弾性曲線の驚くべき諸性質」（1782年），オイラー全集 I -21，91-118頁．

とともに，「オイラーの関係式」が紹介されている．

日記［50］の第二公式の右辺に見られる積分は，日記［53］に出ている積分，すなわち

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$$

という積分の特別の場合（$n=4$）である．さらに，この積分において変数変換 $z^n=\frac{1-x^n}{x^n}$ を行うと，方程式

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}=-\int \frac{z^{n-2}\,dz}{1+z^n}$$

が得られるが，この式の右辺の積分は日記［54］の積分，すなわち

$$\int \frac{x^n\,dx}{1+x^m}$$

という積分の特別の場合になっている．後述するように，これもまたオイラーに由来する積分である．

オイラーの著作『積分計算教程』巻1，§333（オイラー全集，I -11，210頁）には，大きく一般化されたオイラーの関係式

$$(*) \qquad \int_0^1 \frac{z^\mu\,dz}{\sqrt{1-z^{2\nu}}}\cdot\int_0^1 \frac{z^{\mu+\nu}\,dz}{\sqrt{1-z^{2\nu}}}=\frac{1}{\nu(\mu+1)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

が出ている．$\nu=2$，$\mu=0$ と取ると上記の「オイラーの関係式」になるが，ほかにもいろいろな公式が可能である．

この公式に先立って，オイラーは公式

$$(**) \qquad \int_0^1 \frac{x^{2n}\,dxz}{\sqrt{1-x\,x}}\cdot\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x\,x}}=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}$$

を提示した（同上，§332，オイラー全集，I -11，209頁）．この公式において $x=z^\nu$ と置けば，「一般化されたオイラーの関係式」が出る．後者の公式(**)の基礎になるのは，二つの積分値

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2},\quad \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=1$$

の算出と，部分積分により導かれる漸化式

$$\int_0^1 \frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m}{m+1}\int_0^1 \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

である．

4． レムニスケート積分

ガウスの日記［50］の第三番目の公式の右辺にはレムニスケート積分が現れているが，この日記が書かれた日の翌日の日記には，「レムニスケート曲線を調べ始めた」という明確な言葉が書き留められた．

［51］（1797年1月8日）

レムニスケート曲線を調べ始めた．この曲線は

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

に依存する．

ここに表明されているのは，レムニスケート積分をレムニスケート曲線の弧長積分として把握するという認識である．はじめは「curvam elasticam（弾性曲線を）」と記されたようで，その「elasticam」の一語の線が引かれて消去の意志が示されたうえで，「curvam lemniscatam（レムニスケート曲線を）」と書き直され．当初の「弾性曲線」という言葉には，1782年のオイラーの論文

「方程式 $y=\int \frac{x\,x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ に包摂される弾性曲線の驚くべき諸性質」

のタイトルの影響が認められる．この論文の刊行年から日記［50］［51］まで，この間，わずかに15年の隔たりしかないことも着目に値すると思う．

シュレジンガーは，ガウスがレムニスケート積分の意義を認識する契機として作用したのは，オイラーの加法定理であると言っている．この主張は「ライステ」の記事により裏づけられる．

日記［51］に附されたシュレジンガーの註釈によると，ガウスはオイラーの加法定理を通じてレムニスケート積分の研究に向かったという．この言葉を裏づける基礎的

文献として，たとえばガウス全集に採録されたガウスの記事

「レムニスケート関数の最も古い研究」（ガウス全集X1，145-171頁）

「積分$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$の優美な諸性質」（ガウス全集III，404-412頁）

「レムニスケート曲線」（ガウス全集III，413-432頁）

を参照すると，レムニスケート関数の倍角公式や加法定理が目に留まる．それに，次に挙げるような虚数乗法の公式も出ている．

$$\sin\left(t+u\sqrt{-1}\right)=\frac{\sin t\cos u\sqrt{-1}+\sin u\sqrt{-1}\cos t}{1-\sin u\sqrt{-1}\cos u\sqrt{-1}\cos t\sin t}=\frac{\sin t+\cos t\sin u\cos u\sqrt{-1}}{\cos u-\cos t\sin u\sin t\sqrt{-1}}$$

（ガウス全集X1，154頁．オリジナルは「ライステ」86頁）

$$\cos\left(t+u\sqrt{-1}\right)=\frac{\frac{\cos t}{\cos u}-\sin t\sin u\sqrt{-1}}{1+\frac{\cos t}{\cos u}\sin t\sin u\sqrt{-1}}=\frac{\cos t-\sin t\cos u\sin u\sqrt{-1}}{\cos u-\sin u\cos t\sin t\sqrt{-1}}$$

（同，155頁．オリジナルは「ライステ」89頁）．

5．　オイラーの基準

日記［52］には「オイラーの基準」という言葉が登場する．

［52］（1797年1月10日）

オイラーの基準の論拠を自力で発見した．

日記の記述はこれがすべてであり，これだけでは「オイラーの基準」の実体は不明だが，シュレジンガーの註記によれば，二項積分と言われる積分

$$\int x^{m-1}\left(a+b\,x^n\right)^{\frac{\mu}{\nu}}dx$$

の可能性に関する「オイラーの判定基準」を指すという．シュレジンガーは，引き続く二つの記事「53」「54」を勘案してそのように判断し，オイラーの著作『積分計算教程』巻1，§104（オイラー全集，1-11，62頁）を挙げた．日記の記事「53」「54」は次の通り．

［53］（1797年1月12日）

完全積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$$

が円の求積に帰着されることを考量した.

［54］（1797年1月）

$$\int \frac{x^n\,dx}{1+x^m}$$

を決定するための簡単な方法.

オイラーの『積分計算教程』巻1，62頁に出ているのは，微分式

$$x^{m-1}\left(a+b\,x^n\right)^{\frac{\mu}{\nu}}dx$$

の有理化条件，すなわち「$\frac{m}{n}$ もしくは $\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}$ が整数になる」という条件である．オイラーは簡単にわかると述べているのみだが，後にチェビシェフが証明した.

「非有理微分の積分について」Journ..deMathém18，1853年．チェビシェフの全集，巻1，163頁.

日記［53］のオイラー積分の数値計算例は，オイラーの『積分計算教程』巻1，§352と§353（オイラー全集，1-11，226頁）に出ている．§352に，

$$\int_0^1 \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\left(1-x^n\right)^{\frac{n-k}{n}}}=\int_0^1 \frac{x^{k-1}\,dx}{\left(1-x^n\right)^{\frac{k}{n}}}=\frac{\pi}{n\sin\frac{k\pi}{n}}$$

という式があり，続いて§353には，四つの数値例

$$\int_0^\infty \frac{dz}{1+zz}=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^3}=\int_0^\infty \frac{z\,dz}{1+z^3}=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}}=\frac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^4}=\int_0^\infty \frac{zz\,dz}{1+z^4}=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}=\int_0^1 \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{\left(1-x^4\right)^3}}=\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^6}=\int_0^\infty \frac{z^4\,dz}{1+z^6}=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{1-x^6}}=\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{\sqrt[6]{\left(1-x^6\right)^5}}=\frac{\pi}{6\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}$$

が記されている.

日記［54］に附されているラインとシュレジンガーの註記によれば，「ライステ」の27頁，91頁，92頁にも関連する公式や計算が出ていて（これはその通りである），

しかもそれらはすべてオイラーの方法が基礎になっているという．参照するべき文献として挙げられているのは，オイラーの著作『積分計算教程』巻Ⅰ，1768年，第77条（オイラー全集，1-11，41頁）と，オイラーの論文

「一個の変化量を含む微分式を積分する方法」ペテルブルク学士院紀要14（1744/6），1751年，3-91頁；オイラー全集，1-17，70-148頁，特に第44-59条.

である．後者の論文の第44-59条は，全集1-17，113-132頁，に掲載されている．内容は次の通り．

44. 問題1. 微分式 $\dfrac{x^m\,dx}{1+x^{2n}}$，$m<2n$，の積分.

45. 例1. 微分式 $\dfrac{dx}{1+x^2}$ の積分.

46. 例2. 微分式 $\dfrac{dx}{1+x^4}$ の積分.

47. 例3. 微分式 $\dfrac{dx}{1+x^6}$ の積分.

48. 例4. 微分式 $\dfrac{dx}{1+x^8}$ の積分.

49. 例5. 微分式 $\dfrac{dx}{1+x^{2n}}$ の積分.

50. 例6. 微分式 $\dfrac{x^m\,dx}{1+x^{2n}}$，$m$ は偶数，の積分.

51. 例7. 微分式 $\dfrac{x^m\,dx}{1+x^{2n}}$，$m$ は奇数，の積分.

52. 問題2. 微分式 $\dfrac{x^m\,dx}{1+x^{2n+1}}$，$m<2n+1$，の積分.

53. 例1. 微分式 $\dfrac{dx}{1+x^3}$ の積分.

54. 例2. 微分式 $\dfrac{x\,dx}{1+x^3}$ の積分.

55. 派生的命題. 微分式 $\dfrac{(1-x)\,dx}{1+x^3}$ の積分.

56. 例3. 微分式 $\dfrac{dx}{1+x^5}$ の積分.

57. 例4. 微分式 $\dfrac{x\,dx}{1+x^5}$ の積分.

58. 例5. 微分式 $\dfrac{x^2\,dx}{1+x^5}$ の積分.

59. 例6. 微分式 $\dfrac{x^3\,dx}{1+x^5}$ の積分.

この様子を概観すれば明らかなように，オイラー積分の考察にあたり，オイラーは $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^2}$ や $\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^3}$ のような簡単な積分の計算から出発し，順次，形の一般化を進めていったのである．

『積分計算教程』巻I，第77条（オイラー全集I-11，41-42頁）では，「例2」として，微分式

$$\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n},\ m-1<n$$

の積分が求められている.

6． ベータ関数とガンマ関数

日記［59］の記述はいくぶん意味がとりにくいが，次の通りである.

［59］（1797年3月2日）

$\int e^{-t^\alpha}dt$ および $\int \frac{du}{\sqrt[\beta]{1+u^\gamma}}$ という形の積分表示式の間に，私はある比較を試みた.

シュレジンガーは，これをガンマ関数とベータ関数の相互関係を示唆する言葉と諒解し，そのように註記した．シュレジンガーによれば，日記［59］に出ている二つの積分は，0から $+\infty$ までを積分区間とすると見てよいという．そこでそのように見ることにして，二つの積分の各々において，それぞれ変数変換

$$t^\alpha=x,\quad u^\gamma=\frac{x}{1-x}$$

を行うと，積分は

$$(1)\qquad \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha}dt=\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1}dt$$

$$(2)\qquad \int_0^{+\infty}\frac{du}{\sqrt[\beta]{1+u^\gamma}}=\frac{1}{\gamma}\int_0^1 x^{\frac{1}{\gamma}-1}\left(1-x\right)^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}-1}dx$$

と変換される．すなわち，積分 $\int e^{-t^\alpha}dt$ はガンマ関数，積分 $\int\frac{du}{\sqrt[\beta]{1+u^\gamma}}$ はベータ関数であり，今日の記号で表記すると，

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha}dt=\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right),\qquad \int_0^{+\infty}\frac{du}{\sqrt[\beta]{1+u^\gamma}}=\frac{1}{\gamma}B\left(\frac{1}{\gamma},\ \frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)$$

というふうになる．シュレジンガーはこのように述べたうえで，日記「59」で語られている「積分の比較」というのは，ガンマ関数とベータ関数の間の周知の関係式

$$B\left(p,q\right)=\frac{\Gamma\left(p\right)\Gamma\left(q\right)}{\Gamma\left(p+q\right)}$$

を指すと指摘した．日記「59」の記事の前後の状況を勘案すると，この指摘は信憑性が高いと思う．

ガンマ関数とベータ関数の間に成立する関係式の初出は，オイラーの次の論文である．

「値 $x=0$ から $x=1$ までにわたって積分して得られる積分表示式 $\int x^{f-1}\,dx\,(l\,x)^{\frac{m}{n}}$ の解明」ペテルブルク学士院新紀要16（1771），1772，91-139頁．オイラー全集，Ⅰ-17，316－357頁．特に§25，330頁と「補遺」354-356頁参照．

この論文において，オイラーは二種類の積分

$$\int_0^1 x^{f-1}\left(1-x^g\right)^n dx=\frac{1}{g}\cdot B\left(\frac{f}{g},n+1\right)$$

$$\int_0^1 x^{f-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^n dx=\frac{1}{f^{n+1}}\Gamma\left(n+1\right)$$

を取り上げた（右辺は今日のベータ関数とガンマ関数の記号による表示である）．両者の関係は，

$$g=0\text{ のとき，}\quad \frac{1}{g^{n+1}}B\left(\frac{f}{g},n+1\right)=\frac{1}{f^{n+1}}\Gamma\left(n+1\right)$$

で与えられる．§25には，

$$\frac{\int_0^1 x^{f-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{n-1}dx\cdot\int_0^1 x^{f-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{m-1}dx}{\int_0^1 x^{f-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{m+n-1}dx}=k\int_0^1 x^{mk-1}\left(1-x^k\right)^{n-1}dx$$

という関係式が出ているが（オイラー全集，Ⅰ-17，330頁），これを書き直すと

$$B\left(m,n\right)=\frac{\Gamma\left(m\right)\Gamma\left(n\right)}{\Gamma\left(m+n\right)}$$

という関係式が得られる．また，第一の補遺（補遺は二つある）には，

$$\frac{\left[\frac{m}{n}\right]\left[\frac{\lambda}{n}\right]}{\left[\frac{\lambda+m}{n}\right]}=\frac{\lambda\,m}{\lambda+m}\left(\frac{\lambda}{m}\right)$$

という関係式が書かれている（オイラー全集，Ⅰ-17，355頁）．記号は，

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\int_0^1\frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{\left(1-x^n\right)^{n-q}}},\quad \left[\frac{m}{n}\right]=\int_0^1\sqrt[n]{\left(\log\frac{1}{x}\right)^m}\,dx$$

と定められるから，それぞれベータ関数，ガンマ関数に相当する．具体的に書くと，

$$\left(\frac{\lambda}{m}\right)=\frac{1}{n}B\left(\frac{\lambda}{n},\frac{m}{n}\right),\quad \left[\frac{m}{n}\right]=\Gamma\left(\frac{m}{n}+1\right)=\frac{m}{n}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\cdots$$

というふうになる．これに基づいて上記の関係式を書き直すと，

$$B\left(\frac{\lambda}{n},\frac{m}{n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+m}{n}\right)}$$

となる.

おおよその様子はこんなふうであり，シュレジンガーの指摘には妥当性があるが，ガウスが日記［59］に書き留めた積分，すなわち

$$\int e^{-t^{\alpha}}dt \text{ と } \int \frac{du}{\sqrt[\beta]{1+u^{\gamma}}}$$

という積分の形状それ自体の由来はよくわからない．それと，ガウスがオイラーを読んでいないとは考えにくいが，日記「59」の短い文面には，ガウスはオイラーを知らずに独自の試みを行ったような雰囲気がある．日記「52」にも，「オイラーの基準を自力で見つけた」とある．シュレジンガーの指摘を受け入れることにして，そのうえでガウス日記をすなおに読めば，ガウスはオイラーの研究を知らずに，ベータ関数とガンマ関数の間の関係式を独自に発見したと見るべきであろう．

オイラーの論文は全66節から成り，それに二つの「補遺」が附されているが，さまざまに変奏されつつ，随所に繰り返し現れているのはベータ関数とガンマ関数の基本関係式である．ベータ関数とガンマ関数という概念を（名称とともに）提案したのはルジャンドルだが，ルジャンドルはルジャンドルなりにオイラーが開いた広大なオイラー積分の世界を観察し，二つの特定の積分と，それらの間の基本関係式を確定することにより，世界全体を統制しようというねらいをもっていたのではないかと思う．もしそうなら，シュレジンガーの指摘するガウスの日記［59］の主旨と同じである．

1797年3月19日付の日記［60］では，レムニスケート曲線の等分理論の端緒を開く言葉が書き留められた．それは，

［60］（1797年3月19日）

レムニスケート曲線を n 個の部分に分けると，なぜ次数 n^2 の方程式し導かれるのだろうか.

という簡単な言葉にすぎないが，ガウスはこのあたりからオイラーを離れ，独自の楕円関数論の世界に向かっていった．その痕跡は日記［62］（1797年3月21日）［63］（1797年3月29日），［91 a］（1798年7月），［91 b］（1798年7月），［92］（1798

年7月）などに印されている．［50］の「1797年1月7日」という日付から日記［60］の「1797年3月19日」の日付まで，二ヶ月をわずかに越える程度の日々にすぎない．ガウスがオイラーに深く学んだことはまちがいないが，同時にきわめて迅速にオイラーに別れを告げたのである．

（平成17年2月6日）