クロネッカー について

今野秀二

平成 17 年 1 月 23 日

Kronecker は 1823 年現ポーランド領レグニツアの裕福なユダヤ人家庭に生まれた．ギムナジュウムで Kummer に出会い，1841 年ベルリン大学に入学するが，大学では同学年に Eisenstein がいた．大学では Dirichlet, Steiner などの講義に出席するかたわら Shelling の講義にも出席し哲学にも関心を持っていたようで，その様子を Kummer 宛の手紙に書いている．1844 年卒業とともに家業を手伝うため故郷に帰るが，1845 年に円単数の論文で学位を得ている．1855 年に Gauss が死んだあと，後任として Dirichlet はベルリン大学からゲッチンゲン大学に移った．そのあとに Kummer がベルリン大学に移ってきて，同じころ Kronecker もベルリンにくる．翌 1856 年には Weierstrass もベルリンにきて Kummer, Weierstrass, Kronecker, Borchardt が Kronecker のいた頃のベルリン大学のメンバーであった．このうち Kummer は Dirichlet とともに生涯の師でありかつ最も親密な研究仲間であった．Kronecker は 1883 年ベルリン大学の正教授となり 1891 年に死んでいる．

Kronecker の全集を見ていると Gauss (1777-1855), Abel (1802-1829), Galois (1811-1832), Jacobi (1804-1851), Dirichlet (1805-1859), Kummer (1810-1893), Weierstrass (1815-1897), Riemann (1826-1866), Dedekind (1831-1916), Eisenstein (1823-1852) といった名前が何度も登場してくる．これらの名前は Kronecker の研究内容を特徴づけているといえそうである．実際，彼は整数論，方程式論，線形代数，楕円関数，微分方程式など非常に広い領域で上記数学者の成果を活用しつつ数々の発見をしている．なかでも整数論と代数幾何と解析を結びつけた領域での研究はその後の発展をみるとき Kronecker を特徴づけるすぐれた成果と考えられる．

Kronecker はまたいろいろなエピソードを残している．彼自身は書

いていないが周囲の人達の書いているもののなかに，研究スタイルについて「朝アイデアを思いつくと夜には論文にしていた」(Frobenius) という．Kronecker は講義をしたり，自分の研究成果を巧みに表現することがあまり上手ではなかったらしく「論文がわかりにくい，もっと丁寧に書くように」(Dirichet の書簡) などの忠告もある．しかし，それを気にした様子は全くない．一方 Kronecker はまた「自然数は神様が創ったがそのほかは人間が創った」,「Cantor の超元帰納法などは絶対認めない」あるいは「抽象的なイデアル論を避けて Divisor を導入」などと言われている．彼が特異な数学観をもっていた（Klein）と言われるのはこうしたことを指しているようである．

ここでは Kronecker の研究の特徴といえる数論，代数幾何，解析を結びつけた領域に焦点をあてて，数論と代数幾何，虚数乗法論に関する研究を追うことにした．

整数論と代数幾何

主な文献（i） Uber die Diskriminante algebraischer Funktionen einer Variabeln (1881),（全集 II p. 193-236)（ii）Grundzuge einer arithmetishen Theorie der algebraishen Grossen, (1882) （全集 II p.242-387）.

この論文と前後して Dedekind と Weber は Riemann の代数関数論を数論的に発展させている (1880)．Kronecker は上記論文の序文で Dedekind と共同で研究を進めようとしたが Dedekind の抽象的なイデアル論と彼の Divisor を使う立場の違いから独立に発表することにしたと述べている．しかし，その内容は Dedekind-Weber とは大きく性格をことにするもので，かれは「代数幾何と整数論を共通の基礎の上に打ち立てること」,「整数論と代数幾何を特別な場合として含むような新しい領域を作ること」を意図したと言っている（ Kronecker は代数幾何という言葉は使わず超越拡大で考えている）.

まず有理数体上の超越拡大 $\mathbf{Q}(v)$ が有理数体上の関数体 $\mathbf{Q}(X)$ と同一視できることを注意する．その上で，超越拡大 $\mathbf{Q}(v)$ $(v = (v_1, v_2, \cdots)$ （v_i は変数）とこの中の整環 $\mathbf{r}$ を考える．ここで $f(v) \in \mathbf{Q}(v)$ が整，つまり $f \in \mathbf{r}$ とは

$$v_i \in \mathbf{Z}\ (i = 1, 2, \cdots) \qquad \text{ならつねに} \qquad f(v) \in \mathbf{Z}$$

と定義する． $F(X) \in \mathbf{Q}(v)[X]$ の根 x を添加した体を K とし， K の整環

を O とする（$x \in K$ が整の定義は代数体の場合と同じ）．$F(X) = F(X, v)$ で $v = (v_i)$ はパラメータである．Kronecker は v が変数ならば曲線または曲面 $F(x, v) = 0$ が得られ代数幾何となり，v_i がすべて整数 1 ならば代数的数体が得られ整数論になると考える．この方法で代数幾何と代数的整数論を同時に考え，単数，整除，因子および因子類を考えてゆくのだが，Kronecker はいつも有理数体（有理整数）や有理関数体 $\mathbf{Q}(v)$ （または $\mathbf{r}$ ）をもとに拡大体を見てゆく．例えばイデアルは $\mathbf{r}$ 加群みたり，複素数体をさけて一般に拡大体を剰余環 $\mathbf{Q}[X]/(F(X))$ と見るのである．そのため環の上で代数幾何を考えることになる．($F(X, v) = 0$ なる点 (x, v) について $\mathbf{Q}[V, X]/(F(V, X))$ の specialization $(V, X) \to (v, x)$ を考えている）．

判別式　Kronecker のころ群，環などの言葉はまだ十分普及していなかったらしく，例えば巡回群とアーベル群が混同したりしている．$\mathbf{Q}(v)$ の代数的拡大 $K = \mathbf{Q}(x, v)$ の生成元 x は整とし，x を根にもつ整係数（r の元を係数にもつ） monic な方程式を $F(X) = 0$ とする．このとき，K に含まれる整数の全体が $\mathbf{r}$ 加群になること，$\mathbf{r}$ 上の基が F の判別式を分母にもつ K の関数で作れることを示した上で，方程式 F の判別式が一般に $D(v) = D_0(v) \times D_1(v)^2$ という形で表せることを示している．この D_0, D_1 をそれぞれ wesentlich, unwesentlich と呼んでいる．

数体の場合は D_0 の素因子が K で分岐することを示す．v が変数の場合には拡大 $K/\mathbf{Q}(v)$ の生成元 x を適当な x_0 に取り替えて unwesentlich な $D_1(v)$ を落とせるということを具体的に x_0 の求め方まで書いて証明している．その上で K が 1 変数代数関数体の場合 $(x, v) \to (x_0, v)$ はリーマン面上の積分の特異点の除去に使えると言うのである．これは代数多様体における特異点除去の計算方法を示したことになる．

因子について　K は数体とする．体 K の整数 $x_0, x_1, \cdots, x_r \in O$ に対して，独立変数 $u_1, u_2, \cdots, u_r$ を係数とする 1 次式 $x_0 + x_1u_1 + \cdots + x_ru_r$ のノルム形式を $N(x_0 + x_1u_1 + \cdots + x_ru_r)$ とする．これは $u_1, u_2, \cdots, u_r$ の多項式で，この多項式の係数の最大公約数を P とすれば P は $(x_0, x_1, \cdots, x_r)$ で生成されるイデアルのノルムであった．Kronecker はノルム形式を P で割った $F(u_1, u_2, \cdots, u_r) = N(x_0 + x_1u_1 + \cdots + x_ru_r)/P$ に対して，比 $(x_0 + x_1u_1 + \cdots + x_ru_r)/F(u_1, \cdots, u_r)$ を $(x_0, x_1, \cdots, x_r)$ で決まる 因子 (Divisor) と定義している．この方法で 2 因子の積，整除可能性，主因子，因子類群な

どを定義し，さらに素因子分解，因子類の有限性の証明を述べている．因子類群の有限性から任意の因子は何乗かすると主因子になるから，任意の因子 $\mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{a}^r=(\alpha)$ となる自然数 r と $0\neq\alpha\in K$ がある．このとき $\alpha^{1/r}$ は因子 $\mathfrak{a}$ を数で表したものだが，すべての $\alpha^{1/r}$ を含む最小の体を求めることは非常に重要であると主張している．さらに，そのような拡大体の例として，$\sqrt{-n}$ を虚数乗法に持つ楕円関数の場合にそのような体を見つけたと言っている（これについての証明は勿論ない．全集 II. p.322-324).

以上は代数体の場合であるが，超越拡大の場合は $x_0,x_1,\cdots,x_r$ は関数となるので，これらから決まる因子はその共通の 0 点となる．ここでも因子類などを数体にならって形式的に定義している．一方，$x_0+x_1u_1+\cdots+x_ru_r$ は多様体上で有理関数 $x_1,\cdots,x_r$ の極因子から得られる generic な linear system を決めるが，これについての代数幾何的なことはわからない（Weil 全集 I. p. 442-452 参照）．

多様体の次元について　数体の場合の $x_0,x_1,\cdots,x_r$ の公約因子に相当するものは，代数幾何ではこれら代数関数の共通零点になっている．Kronecker はこの共通零点，つまり代数多様体の次元を定義している．彼は多項式の次数を Dimension とよび，超越拡大の超越次数つまり多様体の次元を新たに定義し，それを Stufe と呼んでいる．簡単のため k は代数体とする．k に係数をもつ連立方程式 $F_i(X_1,\cdots,X_n)\in k[X_1,\cdots,X_n]\quad(1\le i\le m)$ が公約因子をもたず，かつ独立なとき（行列式が 0 でない）

$$F_1(X_1,\cdots,X_n)=F_2(X_1,\cdots,X_n)=\cdots=F_m(X_1,\cdots,X_n)=0$$

の（k の拡大体における）の共通解を考えるのである．これらの方程式の終結式を用いて変数 $X_1,\cdots,X_n$ を消去することができる．すなわち，この多様体に対して，あるパラメータ $Y_1,Y_2,\cdots,Y_d$ があり，共通解の集合は次のように表せる．

$$X_1=\varphi_1(Y_1,\cdots,Y_d),\ \cdots\ ,X_n=\varphi_n(Y_1,\cdots,Y_d),$$

$$\psi(Y_1,\cdots,Y_d)=0.$$

（この議論は非常に巧妙で，その方法については van der Waerden が代数の教科書で忠実に再現している）．従って，この多様体の独立なパラメータは $d-1$ 個ある．Kronecker は d をこの多様体の次元（Stufe）と定義し，さ

らに数体は 1 次元としている．これは今日のスキームによる Krull 次元に一致する．

楕円関数と虚数乗法

極限定理は虚数乗法および楕円関数と深く関係するが，ここでは取り上げない．

虚数乗法について Kronecker が最初に言及しているのは 1853 年のアーベル方程式に関する研究である．この論文の最後に，有理数体上のアーベル拡大が 1 のべき根で生成されることを述べた後「ガウス整数を係数にもつアーベル方程式の根はレムニスケート関数の等分点の有理式で表せるのではないか．さらに，代数的整数を係数にもつアーベル方程式の根についても類似の関係があるのではないか」と述べている（全集 IV, p.11）．ここでレムニスケート関数とは

$$x = \sin\mathrm{lemn}(u) \Longleftrightarrow u = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

のことである．その後 1857 年（全集 IV, p.179）の論文に「アーベルは虚数乗法をもつ楕円関数の モヂュラス がべき根で表せるという注目すべき事実を発見しているが，その証明などに関しては何も言っていない」といい，さらにつづけて「アーベルのこの示唆に触発され，これを証明しようと試み数々の興味ある結果を得たので，それらを報告する」と述べて結果のみを報告している．同じ頃 Dirichlet への手紙でも同様の結果を伝えている．1862 年の論文（全集 IV p,175）でもほぼ同じ結果を報告しているが，何れも証明はしていない．これらの論文で Kronecker が述べている結果をまとめると次のとおりである．

まず Jacobi の楕円関数 $x = \sqrt{\kappa}\sin\mathrm{am}(u,\kappa)$ を

$$x = \sqrt{\kappa}\sin\mathrm{am}(u,\kappa) \Longleftrightarrow u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(\kappa - x^2)(1-\kappa x^2)}}.$$

で定義する．ここで κ はモヂュラス，つまり楕円積分の周期の比の関数（モヂュラー関数）である．また，「楕円関数 $\sin\mathrm{am}(u,\kappa)$ が虚 2 次体の虚の整数 α を虚数乗法にもつとは $\sin^2\mathrm{am}(\alpha u,\kappa)$ が $\sin^2\mathrm{am}(u,\kappa)$ と κ の有理式で表されること」と定義する．

$n > 3$ は奇数とし，H は $-n$ を判別式にもつ 2 次形式の類数とする．

（1） $\sin\mathrm{am}(u,\kappa)$ が $\sqrt{-n}$ を虚数乗法にもつとき，平方数 $k=\kappa^2$ の取りうる値は $6\times H$ 個ある．

（2） $-n$ を判別式にもつ虚 2 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{-n})$ の order を $O_1, O_2, \cdots$ とすれば，そのおのおのにある既約方程式 $Q_i(X)\in O_i[X]$ が対応していて，$6H$ 個の κ^2 のうちの $6H_i$ 個をその根にもつ，ただし $H=H_1+H_2+\cdots$ である．とくに $-n$ が $\mathbf{Q}(\sqrt{-n})$ の判別式で $Q(X)$ が極大整環 $\mathbf{O}$ に対応する方程式のとき，$Q(X)=0$ は $\mathbf{O}[X]$ におけるアーベル方程式で $\deg Q(X)=6\times h$ である．ここで h は $\mathbf{Q}(\sqrt{-n})$ の絶対類数である（論文では，アーベル群と巡回群が混同している）．

（3） $\sin\mathrm{am}(u,\kappa)$ が $\sqrt{-n}$ を虚数乗法にもつとき，この楕円関数は虚 2 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{-n})$ の虚整数を虚数乗法にもつだけではなく，整イデアルも虚数乗法にもち，その際，この関係式のなかにイデアルを解析的に単項化した量が現れる．

さらに n が任意の自然数でも類似の結果が得られると注意している．1862 年の論文では多項式 Q_i の genus field での分解に言及している．さらに 1877 年，方程式論に関する研究でアーベル方程式の例として次の結果を述べている（全集 IV p. 71).

(4) 虚数乗法をもつ楕円関数のモヂュラスとこの楕円関数の n 分点での値は，虚 2 次体上アーベル拡大を生成する．

以上から， Kronecker はこのころ楕円関数の虚数乗法について主要な性質をほぼ発見していたようである．しかし，証明はない．この後 1880 年代まで Kronecker は虚数乗法についてはほとんど書いていない． 1880 年 5 月に Dedekind 宛の手紙（全集V p.453) で有名な "Liebste Jungendtraum" という言葉を使って，「どうやら虚数乗法論の最大の難点を克服した」といい，「虚 2 次体上のアーベル拡大が楕円関数の singular moduli と 楕円関数の等分点で生成される」と伝えている．そのあと 1886 年から Zur Theore der Elliptishen Functionen という題でつぎつぎと発表するのだが，Kronecker の人生はあと残り少なくすべての証明は完成していない．以下この研究 Zur Theorie der Elliptishen Funktionen を追ってみることにしよう（全集 IV p.390-471)．

楕円関数 $x=\sqrt{\kappa}\sin\mathrm{am}(u,\kappa)$ は上記の通りとして，この関数の基本周期 $4K, 2K'i$ (K, K' は実数）を $K'/(2K)>0$ となるようにとる．このとき

κ は比 $w=K'i/2K$ のモヂュラー関数である．この論文では $\mathbf{Q}$ 上のモヂュラー関数体の生成元として j の代わりに $\rho=\kappa+1/\kappa$ を採用している． また，楕円関数 $x=\sqrt{\kappa}\sin\mathrm{am}(u,\kappa)$ の周期の n 等分点での値を

$$\xi_{h,h'}^{(n)}=\sqrt{\kappa}\ \sin\mathrm{am}\frac{4hK+2h'K'i}{n}\qquad(0\leq h,h'\leq n-1)$$

と表すことにする．

　n は奇数とする．楕円関数の加法定理を使って $\sqrt{\kappa}\ \sin\mathrm{am}(nu,\kappa)$ を $x=\sqrt{\kappa}\ \sin\mathrm{am}(u,\kappa)$ の関数で表すと， $\mathbf{Z}[\rho]$ に係数をもつある monic な n^2 次の多項式 $\Phi_n(X)$ に対して

$$\sqrt{\kappa}\ \sin\mathrm{am}(nu,\kappa)=(-1)^{(n-1)/2}\frac{\Phi_n(x)}{x^{n^2}\Phi_n(1/x)}\qquad(\Phi_n(0)=0)$$

と表せる．関数 $\sqrt{\kappa}\ \sin\mathrm{am}(u,\kappa)$ は周期 $4K\mathbf{Z}+2K'i\mathbf{Z}$ 上で 0 となるので $\{\xi_{h,h'}^{(n)}|0\leq h,h'\leq n-1\}$ は $\Phi_n(X)=0$ の解の全体であることがわかる．したがって，$\{\xi_{h,h'}^{(n)}|0\leq h,h'\leq n-1\}$ はモヂュラー関数だが， $\mathbf{Z}[\rho]$ 上整の代数関数である．

　そこで等分方程式 $\Phi_n=0$ を円周等分方程式の場合にならって既約分解すると

$$\Phi_n(X)=\prod_{d|n,d>0}F_d(X)=0,\qquad\deg F_d=d^2\prod_{p|d}(1-p^{-2})$$

となる．ここで $F_d(X)=0$ は周期の原始 d 分点 $\xi_{h,h'}^{(d)}$, $(h,h',d)=1$ を根にもつ方程式で，やはり整係数 monic な方程式である．この論文では $\Phi_n(X)$ と $F_d(X)$ の性質と後で述べる Jacobi の変換公式からほとんどの結果を導いている．

（1） $(h,h',n)=1,(0<h,h'<n)$ となる h,h' を固定するとき， $\xi_{hr,h'r}^{(n)}$ は r が　mod n の既約剰余類の代表系を動くとき $\mathbf{Q}(\rho)$ 上代数的に共役な元を動く．しかも，これら 2 つの比は $\mathbf{Z}[\rho]$ を含むある整環の単数となる．

（2） $n>1$ が素数べきでないとき，$\{\xi_{h,h'}^{(n)}\}$ は $\mathbf{Z}[\rho]$ を含むある整環の単数である．つまり Modular unit となる（$F_n(0)=\pm1$）．

（3）n が素数 p のべきならば，$\xi_{h,h'}^{(n)}$ の $\mathbf{Z}[\rho]$ へのノルムは p である（$F_n(0)=\pm p$）．

（4） $\Phi_n(X)$ の判別式は

$$D(\Phi_n(X)) = 2^{n^2(n^2-1)/3}(\rho^2-4)^{(n^2-1)(n^2-3)/12}n^{n^2}$$

となる.

（5） $F_n(X)$ の分解体を L とすると， L のある部分体 L_1 で F_n は

$$F_n(X) = \prod_{h:h'} f_{h,h'}(X)$$

と既約分解される．ここで，積は $0<h,h'<n$ を満たす h,h' から作られる相異なる比 $h:h'$ および $(h,h')=(1,0)$ にわたり

$$f_{1,0}(X) = \prod_{r\in(\mathbf{Z}/n)^\times}(X-\xi^{(n)}_{r,0}) \qquad f_{h,h'}(X) = \prod_{r\in(\mathbf{Z}/n)^\times}(X-\xi^{(n)}_{hr,h'r})$$

である．とくに n が素数 p のべきのとき,（3）より $\xi^{(n)}_{hr,h'r}, (0<r<n)$ は素数 p の L における素因子だが, Kronecker は $\xi^{(n)}_{hr,h'r}$ を p の L における素因子 $\mathfrak{p}$ を単項化した数と見なす.（1）より h,h' を固定すると素因子 $(\xi^{(n)}_{hr,h'r})$ は同じものになるので $p_{h,h'}=\prod_r \xi^{(n)}_{hr,h'r}$ とおくと，素数 p は L_1, L でそれぞれ次のように分解される

$$p = \prod_{(h,h')} p_{h,h'} \qquad p_{h,h'} = (\xi^{(n)}_{h,h'})^e \qquad e = n(1-\frac{1}{p}).$$

以下 n は奇素数とする．ここでは Jacobi の変換公式

$$(-1)^{(n-1)/2}\sqrt{\lambda}\ \sin\mathrm{am}(\mu u,\lambda) = x\prod_{r=1}^{n-1}\frac{x-\sqrt{\kappa}\ \sin\mathrm{am}(4rK/n)}{1-x\sqrt{\kappa}\ \sin\mathrm{am}(4rK/n)}$$

を使う．ここで $x=\sqrt{\kappa}\ \sin\mathrm{am}(u,\kappa)$， μ はこの楕円関数の Multiplicator, すなわち周期格子を Λ とするとき

$$\mu:\Lambda\to\mu\Lambda, \qquad [\Lambda:\mu\Lambda]=n$$

なる変換である．また λ はこの変換がひきおこす $w=K'i/(2K)$ の（n 次）変換で κ を写したものである.

(6) このとき κ は $\mathbf{Z}[\rho]$ を含む整環の単数であるが，さらに $(\lambda/\kappa)^{1/4}$ も $\mathbf{Q}(\rho,\sqrt{\kappa})$ 上 $n+1$ 次の代数的整の元である．

(7) このあと上記 Jacobi の変換公式と等分方程式の性質からこの論文の最終目標である合同関係式

$$(-1)^{(n-1)/2}\sqrt{\lambda}\ \sin\mathrm{am}(\mu u,\lambda)\equiv(\sqrt{\kappa}\ \sin\mathrm{am}(u,\kappa))^{N(\mu)}\quad \mathrm{mod}\ \mu$$

を導く（$N(\mu)=n$ に注意）．これは

$$((-1)^{(n-1)/2}\sqrt{\lambda}\ \sin\mathrm{am}(\mu u,\lambda)-(\sqrt{\kappa}\ \sin\mathrm{am}(u,\kappa))^{n})/\mu$$

が $\sqrt{\lambda}\sin\ \mathrm{am}(\mu u,\lambda),\rho$ 上のある整環に含まれることを意味する．この式から例えば

$$\sqrt{\lambda}\equiv(\sqrt{\kappa})^{n}\quad \mathrm{mod}\ \mu$$

を導いているがこれは Frobenius の合同関係式であり，Hecke 作用素の合同関係の特別な場合となっている．これはまた Euler の合同式

$$(-1)^{(n-1)/2}\sin nu\equiv(\sin u)^{n}\mathrm{mod} n$$

の一般化でもある．

Kronecker はこの合同関係式が Jacobi のものであることを述べた後で，Jacobi の証明と自分の証明の関係を述べながら別証明をしてこの論文を終わっている．

1853 年の非常にすぐれた洞察の延長上で見るとき，Kronecker は虚数乗法についてどこまで発見していたのだろうか．虚２次体の sigular moduli および，singular moduli をもつ楕円関数の等分点から虚２次体のアーベル拡大が得られることは知っていた．逆に虚２次体のアーベル拡大がすべて楕円関数の singular moduli とその等分点から構成されることに関しては果たして知っていただろうか．類体の観点から，合同関係式は証明しているが，例えば虚２次体のイデアル類（２次形式類）の積が singular value にどう対応しているかについては分からない．

結び

Hilbert は 1900 年その第 12 問題で Kronecker が提起した虚２次体および，一般代数体上のアーベル拡大を解析関数の特殊値で構成するという

問題をとりあげ，関数論と整数論の最も深い問題と指摘した．時代を経て1950 年以後，虚数乗法に関する Hilbert の問題は Weil, 志村，谷山およびその後継者により代数幾何的な立場で研究され発展している．ここで再び Kronecker の idea に結びついたいえるかも知れない．

文献

(1) Kronecker 全集 I-V.

(2) A.Weil. Number theory and algebraic geometry. (全集 I. p.442-452).

(3) J.Dieudonne. Histry of algebraic geometry (translation). Wadsworth, Inc. (1985).