確率論の基礎と発展についての一考察

飛田　武幸
名城大学　理工学部

0. 序

２１世紀における確率論の顔は何になるであろうか？　何になることが望ましいのであろうか？

数学全体の中では比較的短い歴史しか持たない確率論ではあるが、それにもかかわらず存在感をもって科学の発展に貢献している。
ところで、科学の中における数学の位置も絶えず動いているが、一応、現代にまで連続して重要な位置を占めていることは間違いない。その歩んできた道を振り返りながら、今世紀の夢を語り、今後の発展の方向を模索したい。

確率論は確率測度空間の研究である。測度空間の構造とか、その上に定義された関数の解析などである。科学の諸分野で扱われる偶然現象やゆらぐ複雑系の研究からの問題提起もあり、解析学のみに留まらず科学一般の中で尊重され期待される分野として発展するものである。

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \textbf{確率論} & & \\
 & \swarrow\nearrow & & \searrow\nwarrow & \\
\textbf{数学} & & \longleftrightarrow & & \textbf{科学}
\end{array}
$$

確率空間の上に関数系、すなわちランダムな関数系が与えられたとき、まず elemental (elementary) な系を求めて、それを変数にもつ関数として、与えられた系を表現することを考える。

それは

Reduction

の手法である。

次に定められた elemental random variables を変数にもつ汎関数の解析

Analysis

が続く、それは無限次元（確率）解析である。

当然の帰結として

Applications

が続く。それはまた Analysis の課題として feedback されるものである。

1. 歴史

事実のみを並べる歴史には興味がないが、現代の研究につながる思想の系譜を訪ねることに大きな意義を感じるものである。アイデイアとかセオリーの歴史を参考にしたいのである。こと科学に関して言えば、その理論の現在の認識から始まって過去を訪ねる立場でなければならない。基本的な成果が得られたアイデイアの起源を再訪し現在および将来の発展に資するのが歴史の研究内容である。過去のみに着目する歴史は我々の求めるところではない。
現代から過去へ投影してみて、その反応を確かめたい。

歴史を見る上で参考になるのは文献としてあげたのは、参考文献 [1] - [9] である.

Thomas Bayes (1702-1761), 1742 Royal Society Fellow. 彼の確率論の基礎についての貢献も忘れてはならない。特に、統計的推測論 (Bayesian statistics) においてである。

我々は、何といっても C.F. Gauss (1777 - 1855) と A. Einstein (1879 - 1955) の業績に、歴史として是非着目すべきである。それと、P. Lévy の比類なき業績は賞賛以上のものであって、現在も燦然と輝いて我々の中に活きている。

故人であるが故に歴史に入れるが、W. Feller が確率論を解析学の隣の純粋数学の仲間にいれようと努力した功績は多としたい。現在の確率論を見たら彼は何というであろうか

2. 基礎概念

抽象的な定義を好むものではないが、数学的に正確に議論を進めるためには、Kolmogorov 式に出発することになろう。ただし、確率論の対象が広がっただけに、より一般なものになるのは自然である。

W. Feller が、彼の著書 [15], I (1950) の序文で強調しているように、確率

論を純粋数学の中に位置づけようとしたことは、当時の研究者に大きな影響を与えた。具体例としては拡散過程の解析的取り扱いがあり、その研究に彼の思想が現れている。

空間 R (空でない) と、その部分集合の族からなる完全加法族 **B** からなる可測空間 $(R, \mathbf{B})$ を準備する。この上に $P(R) = 1$ である（完全加法的な）測度 P を導入する。この三つ組の選び方には豊富な可能性がる。その中から一つの組を特定したとき、それを **確率空間** (probability space) といい、そこから確率論が始まる。

確率変数は、確率空間の上に定義された（有限、または無限次元の値をとる）可測関数である。

ついで、確率分布、特性関数、極限定理、確率過程（時系列）等々と基礎理論が展開できる。

無限次元ベクトル空間上の確率測度は特に注意すべきことがある。例えば Lebesgue 式の測度は存在しない。

確率過程は関数空間の上の確率測度であるが、関数空間が豊富な構造をもつので、その概論ではなくて、むしろ各論の方に興味がある。確率超過程も、普通のものとして受け入れたい。最も concrete な確率論としては、いろいろな構造や確率測度を持つ関数空間を舞台にした数学になろう。そこでは無限次元、非可換、調和解析、作用素代数、量子確率などのキーワードが浮かぶ。

3. ガウス系

ガウス過程を単なる確率過程の一種とみてはならない。まさに確率過程の中で中心的な位置を占めるものとして特筆すべきものである。より一般に、ガウス系が主導的な役割を演ずることを強調したい。

I. ガウス分布、ガウス系の特徴づけ

i) 中心極限定理　（ドイツ式の考えを見る）

多くの独立変数の和を normalize したものの分布がガウス分布に近づくことは、大まかな意味で受け入れられることが多い。それは、モーメントの存在を仮定して特性関数の計算に持ち込んで証明される。しかし、それがベストな理解法ではない。

ガウス分布に近づくというのではなくて、適当に normalize すれば、**ガウス分布で近似される**と理解すべきで、主体はあくまでガウス分布にある。したがって、ガウス分布の **Domain of attraction** を Gnedenko-Kolmogorov 流にきめる（古典的方法に限らない）ことが重要である。(Fellwer [15] II も

参照。)

ii) 統計的考察。ガウスによる最尤推定値と算術平均による方法; 標本の大きさにかかわらず、算術平均がつねに最尤推定値を与えるならば、分布がガウス分布に限る。　これは誤差論を進める中で認識された。

iii) 最大エントロピー、

ガウス分布を特徴づけるものの一つとして、エントロピーによる optimality に着目したい。通信のために最大の情報をもつのは利点であるが、一たび、disturbance の側にまわると、最悪になる。両面に亘るコントロールが必要となる。C.E. Shannon's characterization.

iv) 再生性

ガウス分布に従う独立な二つの確率変数の和は、またガウス分布に従うが、実はその逆も正しい。すなわち Lévy-Cramér Theorem　が成り立つ。

v) 時間的一様な増分を持つ加法過程で見本関数が連続なものはガウス過程である。

vi) 統計力学から。 Maxwell の自由粒子の速度分布としてのガウス測度、i.e. White noise　がある。

関数解析の基礎として。無限次元にはルベーグ測度はないが、ガウス測度がその任を果たす。

球面 $S^n(\sqrt{n})$ に一様な確率測度を導入して、$n \to \infty$ の帰納極限はホワイトノイズ測度になる。

特に付言したいことは

vii) ガウス系の完全線形性は重視すべき性質であり、特徴づけにつながる特性である。

ブラウン運動について。詳細は別に論じている。(飛田、ブラウン運動 [27], Hida and Si Si [28] 他)。

ホワイトノイズ解析の理論としては、久保-竹中、Potthoff-Streit, Kuo, Kondratiev etc. がある。さらに、最近の斉藤、Si Si の結果がつづく。

これらのことをふまえて、 ガウス型ホワイトノイズ を変数とする汎関数の解析（６節）の展開とその応用へと進む.

II. ホワイトノイズ解析の Advantages

1) ホワイトノイズ**超（汎）関数**が自然に導入される。

古典関数解析を超えて、理想的な関数の renormalization (additive and multiplicative) の発想が超汎関数の導入を促した。

変数 $\dot{B}(t)$ の多項式、特に $\dot{B}(t)^2$ を renormalize して超汎関数にした。形式的にいえば $E(\dot{B}(t)^2) = \frac{1}{dt} = +\infty$ である。この無限大」の困難さを、"繰り込み" によって克服し（この場合 additive renormalization)、意味のあるランダム量、すなわちホワイトノイズ**超汎関数** が導入でききのである。直観的には、$(dB(t))^2$ と dt との差である infinitesimal なランダム量を $\frac{1}{(dt)^2}$ 倍だけ拡大して見たと考えてもよい。

その指数関数についても同様な考えで、(additive renormazlization に対して) multiplicative renormalization を用いた。これを一般にし、 systematic にすること、さらにそれらの解析の手法を導入することで、**ホワイトノイズ解析**が始まったのである (1975)。続くその後の発展としては、久保-竹中、Potthoff-Streit, Kuo, ... による貢献が著しい。それは最近の斉藤-Si Si の仕事につながる。

2) 無限次元回転群 $O(E)$ の有効な利用: $O(E)$-invariance, characterization. 調和解析 on (L^2)。

回転群の導入には多くの motivation があった。e.g. Lévy group, Fock space (cf. The Peter-Weyl Theorem, Weyl commutation relation etc.). H. Yoshizawa's idea (Proc. Functional Analysis and Related Topics, 1969, (K. Yosida Conference), 414-423, は大いに参考になった。

3) Innovation, 確率場.

"正則"(regular) な確率過程は、毎時刻新しく独立なランダム量 (innovation) が介入する発展系と理解する P. Lévy の思想が基になった。

「Gauss 過程の表現」の研究で innovation の構成と利用に対するの一つの具現化が見られ、成果が得られているがまだ不十分である。

また、確率場の研究には innovation による方法が極めて有効である。

4) 広く他分野への展開:

4. ポアソン分布・ノイズ, ポアソン過程

ガウス型のノイズと同じく, elemental なノイズであり、ガウス型の次にくる重要なものはポアソン ノイズ である。そこには、今後開拓すべき重要な性質が多く見出される。特に visualized な性質でなく、latent properties に注意したい。

ガウス型との analogous なことは除き、留意点のみをリストにする。

少確率の法則 (la loi des petites probabilités) ; 少数の法則、その rephrasements など.

Compound Poisson process と compound Poisson noise　はポアソン型のものの superposition である。素なポアソン型ノイズの特性が反映する。

Lévy process の Lévy-Itô 分解は随所に登場する（物理も含めて)。
Lévy [16] Chapt. VII, pp 52-63　に注意.

"新しい展開"としては、Poisson process の歴史に帰ること (e.g. Feller, Poisson 分布は 確率過程との関連で明らかにされる)、また物理学などからの刺激に注意することが大切であろう。たとえば、S.D. Poisson (1781-1840) の幅広い業績に注目したい。

A. Einstein, Über einen die Erzeung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtpunkt. (光の発生と変換に関する一つの発見的な見地について) Ann. der Phys. 17 (1905), 132-148.

この歴史的文献の中から量子的な扱い方からの示唆がえられる。例えば、J.R. Klauder and E.C.G. Sudarshan, Fundamentals of Quantum Optics, 1968, 参照。

さらに、Poisson ensemble は　W. Feller [15], II, I.4. で指摘されたように、パラメータが多次元空間を動くため、豊富な randomness をもつことがわかる。
vskip3mm Poisson noise の characterization は情報社会学における Kumon Theory とも関連し、また epidemiology の話ともつながり (Ph. Blabchasrd), 最近の結果が重要な意味を持つとがわかる。(Si Si, [10] 他).

なお、Analysis of Poisson functionals については、Y. Ito, I. Kubo, A. Tsoi, Y.G. Kondratiev, D. Mumford, ... など 参照。

Poisson process や Poisson noise の汎関数の解析においては、Gaussian case の analogy を追うことは、最初に試みることであったし、それは成果を収めたと思う。次の段階としては、 Gaussian case に対する dissimilarity であろう。その一つとして duality が重要であろう。

5. 確率過程、時系列

具体的 (classical) な確率過程の定義は　P. Lévy [5] 第2章の考えを踏襲したい。現代的な確率過程論の展開は到底 overview を得ることは不可能で

あり、またそれをするつもりもない。

Stationary process の研究は, Hilbert 空間を用いる手法に成功し、特に second order process に対しては Fourier analysis にたよりすぎるきらいがあった。

Weakly stationary でなくて、strictly stationary process にもっと注目すべきであろう。ergodic theory なども含めて。
もっと path の立場を強調して、Generalized harmonic analysis (N. Wiener の提唱によるもの) や拡散過程の研究を再考したい。それは L^2-theory とは違った側面をもつものである。

前述の Gaussian process の研究はそれ自身興味深い成果を得ているが、まだ重要な研究課題は尽きてはいない。また、これは Innovation approach への道を開いたし、random field の研究を促進している。いま総合的なまとめが必要と思われる。

確率微分方程式や拡散過程の研究では２０世紀におけるおける注目すべき大きな成果であって、Feller の目指したように、解析学、特に関数解析学との連携を深くした。したがって理論物理学との交流を蜜なものとした。今は次の段階に進むべきであろう。

加法過程 (特に Lévy process, Lévy flight) の詳しい研究は、絶えず新しい知見を与えてくれる。特に、我々は innovation の重要な構成要素が加法過程の分解からえられるえられることは、そこに深く science として認識すべき原理があると思う。最初に述べた Reduction を remind したい。それゆえに、geometry, quantum dynamics や molecular biology の理論的研究に登場するのであろう。

今は新しく、 significant な確率過程や確率場の登場が望まれる。

6. ホワイトノイズ解析の実際

ランダムな関数の解析を目指して、Reductionism の思想に基づいて理論体系を構築する。ここでは、ガウス型ノイズとポアソン型ノイズを代表として選び、比較対照しながら解析を進める。

ホワイトノイズ解析は非線形汎関数解析 (無限次元解析) の典型である。

6.1. Path Integral : white noise approach.

Path Integral は伝統的な、かつ本質的な問題である。Dirac や　Feynman が第三の量子化の方法として提唱してから数十年を経過し、その間多くの試

みがなされ、またそれなりに成果をあげてきた。

しかし、我々 (L. Streit and T.H.) は、white noise analysis の立場から 1981 年と 1983 年に独自の方法を提唱し、他の方法では得られない場合もふくめて、多くの成果を発表してきた。この課題も含めて、物理学との交流の考え方として、Streit の次の言葉を紹介したい [14] :

The useful thing about talking to physicists is their structural intuition

ついでながら、小田 稔 先生のX線データ解析の際の intuition ”シシおどし”もこれと軌を一にする.

Feynman sum over paths を定義するのに、我々は”揺らぐ”pahts を考えた。揺らぎは Brownian bridge であらわす。すなわち、x_0 を classical path とするとき、possible paths x は

$$x(t) = x_0(t) + (\frac{\hbar}{m})B_b(t), \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

で与える。ただし、B_b は Brownian bridge である。

この考え方は多次元の時空パラメータのときにも、有効に拡張できる。

その一つの応用として、 Chern-Simoins action integral がある。このとき基礎概念となるのは多次元パラメータをもつホワイトのイズである。参考文献は多数あるが、初期のものとして、

E. Witten, On holomorphic facorization of WZW and coset models. Comm Math. Phys. 144 (1992), 189-212.

その他、S. Albeverio and A. Sengupta, loc. cit. (1997) 563-579. (non-Abelian case) : S. Hu, Lecture Notes on Chern-Simons-Witten Theory, World Sci. Pub. Co. 2001.(Witten's lecture notes). また、A. Hahn, 2004, Meijo Conf. Proceeding paper などにも注目したい。

これらの議論において、なぜ white noise が重要な概念になるのか、また Brownian bridge (多次元パラメータへの拡張も含めて) が何故有効に用いられるかという説明が必要である。たまたま計算が合うというのでは不十分である。一つの reasonable な詳しい説明は文献 [12] に譲る。

6.2 Multiple Wiener Integral

無限次元空間における積分として Cameron-Martin の pioneer 的な研究がある (cf. S. Orey の考え方)。

Polynomial (in infinite dimensional variables) としての homogeneous chaos. Fock space. 当然 creation と annihilation operators がある。これ等の概念を総合的に記述できるような Fock space の一般的な定義が必要である。

Creation operator から **Hitsuda-Skorohod integral** が定義される。この立場からの非可換の解析への発展が重要と考える。

6.3 Rotation group

３節でも述べたが、回転群は white noise analysis できわめて重要な役割を演ずる。いわば、我々の Analysis は無限次元回転群から導かれる Harmonic Analysis の側面をもっている。この立場からこれまでの解析的な結果をまとめたり、そこから新しい課題（未踏の課題）を探し出すことは意義がある。特に、パラメータ空間（多次元 manifold）の diffeomorphisms によって定義される one-parameter group を沢山発見する仕事が残っている。それを進めて、初めて white noise analysis が一人前になると思う。

これに呼応して Poisson noise の場合の symmetric group による harmonic analysis はまだ始まったばかりで、（たとえば、Si Si, Characterization of Poisson noise. IDAQP), 今後の重要な課題となる。

6.4 Applications

すでに各節で紹介しているように、応用というよりは、種々の分野との交流が盛んになってきた。それは次節以降でも論ずるが、我々は、original な課題を発見できる分野を念頭に置くものである。予想としてそれらの分野を指定することは避けたい。

7. 量子力学、数理情報理論

CCR の表現, Weyl commutation relations, quantum field, quantum optics など white noise analysis と関連が深い.

Wiener の直交化 (無限次元における同時直交化) が可能であることが重要。また直交多項式の役割が大きい。さらに関連する関数解析による新しい展開も興味深い。

量子確率論・量子情報理論, quantum entropy　など。
ホワイトノイズ解析における種々の operators を用いた von Neumann 代数へのアプローチは稔り多い分野であろう。文献 [21] 梅垣、大矢、日合の著書が参考になる。また [22] 小嶋の論文は難解であるが、重要な指針が与えられると思う。

場の量子論を含む。stochastic variational calculus の応用.

8. 幾何学への展開

最近、諸分野における幾何学化が叫ばれているが、我々はむしろ、**幾何学の確率化**に注目したい。

非可換幾何学 (A. Connes [19], R. Léandre) への展開. Chern-Simons action. Hamiltonian path Integral へ (symplectic geometry 参照).

さらに、quantum dynamics における string theory への発展がある (Y. Nambu, D. Mumford)。

群の表現 (Lie 群 $SO(n), SU(n), S(n); 0 < n < \infty$) の理論の無限次元の場合への一般化。そのとき、有限次元で近似できるもの、および「真に無限次元的なもの」と区別できる状況に注意したい；たとえば、ある種の subgroups of $O(E)$, その symmetric space, 超汎関数, Casimir operator, 各種 Laplacians など。6.3. 節参照。また Poisson measure との関連はすでに 4 節で触れた。

9. その他の関連分野

分子生物学、ゆらぐ現象、ナノ-サイエンス等におけるランダムな方程式の扱い。生命現象解明のための情報力学 (大矢 [26] 参照、特に「まえがき」は是非一読を勧める).

情報社会学 (Kumon's Theory): べき乗分布, 地震の震度による分布、人口による都市数の分布などの具体例。これらに対して stable process, その構成要素である Poisson noise の特性を用いて、この分布を発生する要因についての一つの説明が与えられる。

参照： 公文俊平、情報社会学序説。NTT 出版, 2004. 及び

マーク・ブキャナン、 歴史の方程式。早川書房、2003。および同著者、複雑な世界、単純な法則、草思社、2005.

これら著作から Applications に現れる 安定分布 (compound Poisson noise より) の隠れた optimality, symmetry, invariance などを見出すヒントが与えられよう。特に、ブキャナンの「インターネットがしたがう法則」は興味深い。

最後に D. Mumford [24] を再度とりあげたい。そこでは generic images に対する確率モデルの作成にあたって、確率場、white noise, 無限分解可能な法則, Lévy process, エルゴード性などの概念が登場するが、我々が reductionism から analysis へ進み、自然に innovation, idealized elemental random variables を取り上げて議論を進める立場に近い idea が伺われるのは興味深い。

歴史に関連する文献は次の表の [1] – [9] に掲げた。

参考文献

[1] P.S. Laplace, A philosophical essay on probabilities. Wiley & Sons, 1902. Dover Edition 1951.

[2] P. Lévy, Calcul des probabilités. Gauthier-Villars, 1925.

[3] A. Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebnisse der Math., Springer, 1933.

[4] R. von Mises, Perobability, statistics and truth. German original 1928, J. Springer; Dover edition. 1957. (特に Third Lecture 参照。)

[5] P. Lévy, Processus sgtochastiques et mouvement brownien. Gauthier-Villars, 1948. 2éme ed. 1965.

[6] E. von Collani and T. Hida, The emergence of science. Heldermann Verlag, 2005.

[7] 末綱恕一、確率論、岩波全書、1941.

[8] 伊藤　清、確率論の基礎、岩波現代数学叢書、1944.

[9] 河田敬義、確率論、共立出版, 1948.

[10] Si Si, Note on fractional power distribution. Solvay Inst. Lecture, 2005.

[11] T. Hida and Si Si, Innovation approach to random fields: An application of white noise theory. World Scientific Pub. Co. 2004.

[12] T. Hida and Si Si, Lectures on white noise functionals. World Sci. Pub. Co. 2005 August.

[13] L. Streit et al, The Feynman integral for time-dependent anharmonic oscillators. J. Math. Phys. 38 (1997), 3278-3299.

[14] L. Streit, On Hida's path. Meijo Conference Lecture, November 2004.

[15] W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, vol. I, 1950, 1957, and vol. II, 1966,

[16] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, 1937, 1954.

[17] P. Lévy, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle, 1951, Gauthier-Villars.

[18] H. Weyl, Classical group, Princeton Univ. Press. 1939.

[19] A. Connes, Géometrie non commutative. Inter Editions, 1990. 邦訳:丸山文綱、岩波書店, 1999.

[20] J.L. Doob, Stochastic processes. Wiley, 1952.

[21] 梅垣寿春、大矢雅則、日合文雄、作用素代数入門、共立出版、1985, 復刊 2003.

[22] 小嶋　泉、だれが量子場を見たか。2003 Ezawa Conference 講演記録

[23] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, Superstring theory, vol.2, Cambridge Univ. Press, 1987.

[24] D. Mumford and B. Gidas, Statistic models for generic images. 2000. from David Mumford home page.

[25] D. Mumford, The Bayesian rationale for energy functionals.

[26] 大矢雅則、情報進化論。岩波書店。2005.

[27] T. Hida, Brownian motion. Springer-Verlag. 1980.

[28] T. Hida and Si Si, Lectures on white noise functionals. World Scientific Pub. Co. 2006h.