特殊相対性理論と表現論

佐野　茂*

平成 18 年 2 月 22 日

1　はじめに

西暦 2005 年は相対性理論の誕生から 100 年の節目で，物理学会など関係する学会がシンポジウムを企画するなど大きく盛り上がった．それは，空間は絶対的でその中を一様に過ぎていく時間にしたがって物体が運動するという科学的な見方を根底からくつがえすものだったからである．相対性理論の与えた影響は科学だけにとどまらず哲学や宗教など広範囲に及んでいる．数学への影響も大きなものがあったが，そのことはあまり触れられることはなかった．そこで，アインシュタインの特殊相対性理論の数学への影響について考察したい，本稿では無限次元表現論誕生へのつながりをまとめる．無限次元表現論の成立には物理からの影響が決定的であったとされている．しかもその影響は一本道ではなくいくつもの可能性が指摘されている（文献 [Su]）．そこで，特殊相対性理論からの寄与について見ていくことにする．

特殊相対性理論により，相対性原理は広く物理現象の基本法則として認めれれるようになっていった．そしてこの原理はミンコフスキーによりローレンツ共役性として定式化された．シュレデンガーの量子論では電子の運動を存在確率を与える方程式で表した．けれども，このシュレデンガーの方程式はローレンツ共役になっていなかった．物理法則はローレンツ共役であるという特殊相対性原理にしたがい，シュレデンガーの方程式の本来の式としてクライン-ゴルドン方程式とディラック方程式が相次いで提出された．そしてヤン-ミルズ方程式へと発展していった．

こうした時代の動きに対応して，ディラックの弟子ハリッシュ・チャンドラにより無限次元表現論が大きく開花していく．この歴史を追ってみたい．昨年の「数学からみた相対性理論」と内容が一部重なるが，視点を変えてまとめてみる．

2　マックスウェルの方程式

この方程式は 1800 年代にボルタに始まり，オーム，キルヒホッフそしてガウスらの電磁気学の多くの成果からマックスウェルが十数個の方程式としてまとめ，さらにヘヴィサイドによりベクトル解析の発散や回転の式を用いて現在の教科書にかかれているような形に整理されたようだ．

そのマックスウェルの方程式は

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \tag{2}$$

*職業能力開発総合大学校，神奈川県相模原市 ssano@uitec.ac.jp

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4}$$

ここで，ρ は電荷密度，$\mathbf{E}$ は電場の強さ，$\mathbf{D}$ は電束密度，$\mathbf{H}$ は磁場の強さ，$\mathbf{B}$ は磁束密度である．またナブラ $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ を用いると $\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D}$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E}$ である．等方性の媒質では，誘電率を ε，透磁率を μ として，これらの量の間には

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{5}$$

の関係がある．

(1) は電場に関するガウスの法則，(2) は磁場に関するガウスの法則であるが右辺がゼロになっているのは単磁極（magnetic monopole）が存在しないことを意味している．(3) はアンペール-マックスウエルの法則であり，右辺の第 1 項は電流 $\mathbf{i}$ により磁場が発生するというアンペールの法則を示し，第 2 項はこの法則が電荷保存則と矛盾しないように，マックスウェルにより理論的に追加された変位電位密度である．そして (4) は磁束密度の時間的変化により，空間内に誘導電場が生まれるというファラデーの電磁誘導の法則である．

マックスウェル（J.C.Maxwell）はこれらの方程式に出てくる真空中の誘電率 ε_0 と透過率 μ_0 の積で決まる値

$$1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 2.998 \times 10^8 m/s \tag{6}$$

が光速 c にきわめて近いため，光は電磁波の一種であると 1864 年に予想した．そして，1888 年にヘルツ（H.R.Hertz）により電気花火として確認された．

それは真空中の電磁波はマクスウェルの方程式において，$\rho = 0, \mathbf{i} = \mathbf{0}$ の場合に，$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ とすると，電場も磁束密度も速度 c の波であることが示される．

さらに式の内容を明確にするために時間 t と x 変数のみに依存すると仮定して．$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x,t)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x,t)$ とする．座標系は任意に選べるので，電場の方向に y 軸をとると $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)$，そして磁束密度も $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ とできて

$$\nabla^2 E_y - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} = 0, \quad \nabla^2 B_z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

となる．ここでラプラシアン $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ を用いている．(7) より電場の変化は

$$E_y(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t) \tag{8}$$

となる．この電場の変化にしたがい磁束密度は（4），(7) より

$$B_z(x,t) = (E_0/c)\sin(kx - \omega t) \tag{9}$$

となる．ここで，ω は角振動数である．電磁波は電場の波動と磁束密度の波動が互いに直交し位相が一致している横波であることが，この解から分かる．電場の変化が磁束密度を変化させ，磁束密度の変化から電場がまた変化する．偏向サングラスなどのスリットを光が通るときには，スリットと電場の方向が一致した電磁波だけがすり抜けていくのである．

それではこの方程式はいったいどこで成立するのだろうか？　横波である光を媒体とするエーテルを仮定して，ガリレオ以来の速度の合成則に従うというのが19世紀の自然な考え方だった．そこで当時は，絶対静止しているエーテルの上でこの方程式が成り立つとされたのである．

ところが，マイケルソン-モーレイ (A.A.Michelson, E.W.Morley) の実験ではエーテルの存在が証明できなかったのである．そこでその理由を明らかにすることが物理学上の大きな問題となっていた．

3　アインシュタインの特殊相対性理論

こうした時代背景のもとで1905年に誕生した特殊相対性理論（運動している物体の電気力学について）の基本的な事柄を述べる．マイケルソン-モーレイの実験による光の媒体（エーテル）に対する地球の相対運動を発見しようとする試みの失敗から絶対静止というものはないとしている．そして起電力など電気現象も力学と同じようにどの慣性系の座標においても方程式が同じ形で成り立つはずとし，このような推測を第一の要請として相対性原理と呼んでいる．

これはエーテルの存在は証明できないことから，特別の資格をもつ静止系を仮定する必要はないとしているのである．エーテルに固定されている座標系をもとにして議論を進めているローレンツの理論と大きく異なるところである．

また，真空中では光は常に一定の速さ c で伝わり，この速さは光源の運動状態には無関係である．これを第二の要請としている．

以上の背景のもと，アインシュタイン（A.Einstein）は

（1）慣性系の間における相対性原理

（2）光速不変の原理

（3）v/c が十分小さい場合にガリレイ変換を再現

を仮定して，異なる慣性系の間の空間の点の位置と時間の関係を与えている．

まず，静止系 K の空間と時間の座標 x, y, z, t をとり，x 軸の正方向に一定速度 v で運動する運動系 k の空間と時間の座標 ξ, η, ζ, τ を考える．座標軸 x と ξ は同一直線上にあり，座標軸 y と η は並行，座標軸 z と ζ は並行とする．相対性原理（1）より静止系 K と運動系 k の座標変換は1次変換であたえられる．x 軸方向にでた光は原理（2）より，どちらの座標系でも速度 c である．さらに，仮定（3）を用いて

$$\tau = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \xi = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \eta = y, \quad \zeta = z \tag{10}$$

を得る．

4　特殊相対性原理

このアインシュタインの仕事は大学時代の恩師であるミンコフスキー（H.M.Minkowsky）により驚きをもって迎えられている．そしてミンコフスキーは1908年に3次元空間 x, y, z に時間 t を加えた4次元の多様体で

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{11}$$

を保つ空間を与え，この s^2 を保つ1次変換をローレンツ変換と呼んでいる．この多様体により，見通しのよい理論へと発展している．

そして相対性原理は次のように定式化された．

特殊相対性原理　「物理法則はローレンツ変換に対して不変（ローレンツ共役）でなくてはならない.」

真空では，マックスウエルの方程式 (1),(2),(3),(4) はローレンツ共役になっていたのである．このことから，いずれの慣性系においてもこの方程式が成り立つと言える．

このようにして電磁波は絶対静止系上で静止したエーテルを伝播する波であるという当時の常識は否定され，慣性系間の相対性原理が正しくマックスウエルの方程式はすべての慣性系で成立しているという理論は自然なものとして受け入れられるようになっていった．この慣性系の間における特殊相対性原理は，20 世紀における物理の指導原理としての役割をはたしていった．単なる物理法則を超えた物理の公理の役割をはたすようになっていったのである．それを以下，電子などの素粒子の研究において見ていくことにしよう．

5　シュレディンガーの方程式

光を金属にあてるとき電子が飛び出す光電効果という現象は光の振動数に依存するため，光の波の性質だけでは理解することが出来なかった．そこでアインシュタインとコンプトンは角振動数 ω，波数ベクトル $\mathbf{k}$ の光波は

$$E = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \tag{12}$$

なるエネルギー E と運動量 $\mathbf{p}$ の粒子としてふるまることにより説明したのである ((8),(9) 参照)．ここで，$\hbar$ はプランク定数であり，波数ベクトル $\mathbf{k}$ とは大きき k ($= 2\pi/$波長) をもつ進行方向のベクトルである．

けれども光は単に粒子の集まりとすると光の干渉などの波動性が説明できなくなり，波動性と粒子性の両方をもつものと理解されるようになった．

電子の方は粒子としてはじめ発見されたが，後にド・ブロイ等により（12）のような角振動数と波数ベクトルをもつ波としてもふるまうことが示された．

水素元素から放出される光の振動数の分布を調べると不規則な離散的な線スペクトルをなす．そこでボーアは原子核の周りの電子の定常状態に関する新しい原子モデルを 1913 年に与えた．それは，基底状態とそれよりエネルギーが高い励起状態がエネルギー順位として離散的にいくつも存在している．そして，励起状態からより低位のエネルギー順位へ移るときに光（電磁波）を出すと，この線スペクトルの本質を明らかにした．

シュレディンガーは電子の運動方程式を 1925 年に導いている．それは，粒子と波動の両方の性質を説明するものであった．質量 m の粒子のエネルギー E と運動量 $\mathbf{p}$ との関係式

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \tag{13}$$

において，演算子への置換

$$E \to i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{p} \to -i\nabla \tag{14}$$

を行うと

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2m}\nabla^2\psi = 0 \tag{15}$$

となる．ここで，$|\psi|^2$ は確立密度を表している．すなわち，体積要素 d^3x の中に粒子を見出す確立が $|\psi|^2 d^3x$ であるとするのである．これはコペンハーゲン解釈と呼ばれている．

水素原子核の周りの電子は安定したエネルギー順位

$$E_n = -\frac{me^2}{2\hbar n^2} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

にしたがい，電子の存在確立は

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\nabla^2 \right) \psi = E_n \psi \tag{16}$$

で与えられる．ここで $-e$ は電子1個の電荷である．この方程式の独立解から，電子の安定した状態が説明できるのである．けれども，この方程式はローレンツ共役になっていなかったので，ローレンツ共役となる相対論的な方程式が問題となった．

6　クライン-ゴルドンの方程式

そこで，ローレンツ共役な方程式がクライン-ゴルドンにより提出された．相対論的なエネルギーの保存則

$$E^2 = \mathbf{p^2} + m^2 \tag{17}$$

に置換 (14) を同じように施すと

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \psi = m^2 \psi \tag{18}$$

となる．この式では $c = 1$ と正規化されている．スピンゼロで質量が m の素粒子の運動を表している．湯川秀樹が電子の約 200 倍の質量をもつ核力を媒体する素粒子を記述するために 1935 年に利用したのはこの方程式だった．これが有名な中間子を予想する理論である．

自由粒子の解

$$\psi = Ne^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tag{19}$$

を方程式（18）に代入するとエネルギー固有値

$$E = \pm\sqrt{\mathbf{p^2} + m^2} \tag{20}$$

を得る．意味のある正のエネルギーだけでなく，負のエネルギー（$E < 0$）も出てくる．この負のエネルギーは無視できないが，物理的に正当化するは困難であった．

7　ディラック方程式

そこで，こうした困難を克服するためクライン-ゴルドンの方程式を $\partial/\partial t$ につき線形化するという方針でディラック（P.A.M.Dirac）は 1927 年に次の様に方程式を導いている．まず，関係式

$$E\psi = (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m)\psi \tag{21}$$

において，エネルギー保存則を満足するように係数 α と β を決定するのである．そのため，ベクトル α の成分 α_j $(j=1,2,3)$ と β は，自由粒子が相対論的なエネルギーと運動量の関係

$$E^2\psi = (\mathbf{p}^2 + m^2)\psi \tag{22}$$

を満足するように決定する必要がある．成分で考えて

$$E^2\psi = \sum_{i,j}(\alpha_i p_i + \beta m)(\alpha_j p_j + \beta m)\psi \tag{23}$$

$$= \sum_{i,j}\{\alpha_i^2 p_i^2 + (\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)p_i p_j + (\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)p_i m + \beta^2 m^2\}\psi \tag{24}$$

$$= \left(\sum_i p_i^2 + m^2\right)\psi \tag{25}$$

このことから，成分 α_i, β は

1. $\alpha_i^2 = I$, $\beta^2 = I$
2. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ はすべて反交換

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0 \quad (i \neq j), \quad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0$$

を満足しなくてはならない．これらの条件を満たすには 4 次の行列を使う必要がある．

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (i = 1,2,3), \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{26}$$

ここでは 2 次の正方行列のブロックで表している．I は単位行列で σ_i は次の行列を表している．

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

これらの条件を満足する関係（21）に，変換（14）を施して得られるディラック方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = (-\alpha \cdot \nabla + \beta m)\,\psi \tag{28}$$

により，自由電子がうまく記述出来たのである．

この方程式のエネルギーの固有ベクトルを調べると．4 つの独立な解をもつ．2 つは $E > 0$, 後の 2 つは $E < 0$ である．この正の解は電子そして負の解は陽電子を表していたのである．さらに，角運動量は 1/2 であることも示されたのである．

このような歴史から，ローレンツ共役性という特殊相対性原理は素粒子論の発展に大きな指針を与えてきたことが理解できる．その数学的意味を次に述べる．

8　ローレンツ群の表現

このように，ローレンツ共役性により物理法則が見直され発展してきた．この，ローレンツ共役性というのは，数学ではローレンツ群の表現に相当する．ある方程式がローレンツ共役になっているならば，その解全体はローレンツ群の表現を与えるといえる．

ローレンツ群 $O(1,3)$ は 4 次の行列

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

を用いて,

$$O(1,3) = \{g \in GL(4,\mathbf{R}) :\ {}^t gBg = B\} \tag{30}$$

と定義されるリー群である. この群のリー環は

$$\mathfrak{o}(1,3) = \{X \in \mathfrak{gl}(4,\mathbf{R}) :\ {}^t XB + BX = O\} \tag{31}$$

である. $\mathfrak{o}(1,3)$ の互いに共役でないカルタン部分環は 2 種類出てくる. コンパクトカルタン部分環とスプリットカルタン部分環である. これらに対応して連続系列表現と離散系列表現が出てくる([Ha]).

こうした表現により, 物理的な法則が統一的に理解されると期待される. 例えば, 無限小指標の物理的な意味はエネルギーや質量だと分かる.

参考文献

[Ei] Albert Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Ann. der Phys.17(1905), pp.891-921.

[HM] F.Halzen, A.D.Martin, Quarks & Lepton -An introduction course in modern particle physics-, John Wiley & Sons,1984.

[Ha] Harish-Chandra, Infinite irreducible representations of the Lorentz group, Proc. Royal Soc.A.189(1947), pp.372-401

[Lo] H.A.Lorentz, Electromagnetic Phenomena in a System Moving with Any Velocity Smaller than That of Light, Proc. Roy. Acad. Amsterdam 6(1904), pp.809-831.

[Po] Henri Poincaré, La Science et l'Hypothèse, (1902), 河野伊三郎訳　科学と仮説　岩波書店.

[Sa] 佐野茂, 数学からみた相対性理論ーヒルベルトの第 6 問題ー, 津田塾大学数学・計算機科学研究所報,26(2005),pp.274-281.

[Su] 杉浦光夫, 無限次元表現論成立史, 数学セミナー, 日本評論社,5(1981),pp.62-67.