Did Fourier prove his expansion theorems?*

Hikosaburo Komatsu

Department of Mathematics, Faculty of Science, Science University of Tokyo

1. The Fourier Series Expansion.

Define for an arbitrary function $f(x)$ on $\mathbf{T} = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ its Fourier coefficients by the integrals

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos jx \, dx, \ j = 0, 1, 2, \cdots , \tag{1}$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin jx \, dx, \ j = 1, 2, 3, \cdots . \tag{2}$$

In his treatise "Théorie Analytique de la Chaleur" [1] published in 1822 Fourier first observes on page 233 that if $f(x)$ is an odd analytic function, then we have

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jx + b_j \sin jx), \tag{3}$$

as a very remarkable result[1] and then claims that this is always the case on page 256.

Historians' general view seems to be that Fourier formulated his expansion theorem as above but failed to prove it. They even say that it was impossible because neither functions nor integrals were defined at that time. This sounds strange because the same historians admit that Newton and Leibniz employed functions and integrals.

Before we examine whether or not Fourier proved his expansion theorem, we recall its modern versions and their proofs.

The Dirichlet–Jordan Theorem. *If $f(x)$ is integrable on $\mathbf{T}$ and if it is of bounded variation on a neighborhood of x, then the Fourier series*

---

*presented at the 16th Symposium on the History of Mathematics at Tsuda College on October 16, 2005.

converges at x, and the sum coincides with the original function in the sense that

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j \cos jx + b_j \sin jx).$$

Proof. Since we have

$$\begin{aligned} a_j \cos jx + b_j \sin jx =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\{\cos jx \cos jy + \sin jx \sin jy\}dy \\ =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\{\cos(jx - jy)\}dy, \end{aligned}$$

the n-th partial sum of the Fourier series is written

$$\text{(5)} \qquad s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)D_n(x-y)dy$$

with the Dirichlet kernel

$$\text{(6)} \qquad D_n(x) = 1 + 2\sum_{j=1}^{n}\cos jx = \sum_{j=-n}^{n} e^{ijx} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

We may assume without loss of generality that the value $f(x)$ at x is equal to the mean value in (4). Then, the proof is reduced to the convergence

$$\text{(7)} \qquad \int_0^{\pi} D_n(y)\phi_x(y)dy \to 0, \text{ as } n \to \infty,$$

where

$$\text{(8)} \qquad \phi_x(y) = f(x+y) + f(x-y) - 2f(x).$$

Let $0 < \delta < \pi$. Then, the integral over the interval $[\delta, \pi]$ tends to 0 by the following.

The Riemann–Lebesgue Theorem. *If $g(y)$ is an integrable function on $\mathbf{R}$, then*

$$\text{(9)} \qquad \int_{\mathbf{R}} g(y)e^{i\xi y}dy \to 0, \text{ as } |\xi| \to \infty.$$

As for the integral over $[0, \delta]$, we have, by integration by parts,

$$\int_0^\delta D_n(y)\phi_x(y)dy = G_n(y)\phi_x(y)]_0^\delta - \int_0^\delta G_n(y)d\phi_x(y), \tag{10}$$

where $G_n(y) = \int_0^y D_n(t)dt$. The functions $G_n(y)$ are uniformly bounded, $\phi_x(y) \to 0$, as $y \to 0$, and the total variation of $\phi_x(y)$ over $[0, \delta]$ can be arbitrary small as $\delta > 0$ tends to 0. Thus, given an $\epsilon > 0$, we can find a $\delta > 0$ such that the absolute value of integral (10) is less than ϵ for all n.

The Dini Theorem. *If $f(x)$ is integrable on $\mathbf{T}$ and if $\phi_x(y)/y$ defined by* (8) *is integrable, then the Fourier series converges at x and we have*

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j \cos jx + b_j \sin jx). \tag{11}$$

This is an easy consequence of the Riemann–Lebesgue theorem.

2. The Fourier Integral Theorem.

Let $F(x)$ and $f(x)$ be an even function and an odd function on $\mathbf{R}$, respectively. Then, under suitable conditions we have the Fourier sine and cosine integral formulas:

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos qx\, dq \int_0^\infty \cos qy F(y)\, dy, \qquad \text{(p. 431)} \tag{12}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin qx\, dq \int_0^\infty \sin qy f(y)\, dy. \qquad \text{(p. 445)} \tag{13}$$

Decomposing an arbitrary function $\phi(x)$ into the sum of an even function $F(x)$ and an odd function $f(x)$, we have

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos qx\, dq \int_{-\infty}^\infty \cos qy\, \phi(y)\, dy \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin qx\, dq \int_{-\infty}^\infty \sin qy\, \phi(y)\, dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dq \int_{-\infty}^\infty \cos q(x-y)\, \phi(y)\, dy.\end{aligned} \tag{14}$$

If the exchange of two integrations is allowed, it follows that

$$(15) \qquad \delta(x-y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos q(x-y)\,dq$$

is an integral kernel representing the identity mapping (page 449). Actually the integral operator with the kernel

$$(16) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^p \cos q(x-y)\,dq = \frac{1}{\pi}\frac{\sin p(x-y)}{x-y}$$

approximates the identity (page 546).

The Fourier Integral Theorem. If $f(x)$ is an integrable function on $\mathbf{R}$ satisfying one of convergence conditions of Fourier series at x, then

$$(17) \qquad f(x) = \lim_{p\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(y)\frac{\sin p(x-y)}{x-y}dy.$$

3. Fourier's Proofs of the Fourier Theorems.

We have to be very patient to read through his book. He spends 150 pages to derive the heat equation and the boundary conditions. His first Fourier series

$$(18) \quad \frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\cos x = \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 9x}{9} - \cdots$$

appears only on page 176. His derivation given on pages 167–174 is more heuristic than a proof. He gives, however, two more direct proofs. Modifying his second proof on pages 178–179 a little, we multiply the derivative of the m-th partial sum

$$f_m(x) = \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{\cos(2m-1)x}{2m-1}$$

by $2\cos x$ to obtain

$$2\cos x f_m'(x) = (-1)^m \sin 2mx$$

and hence

$$f_m(x) = f_m(0) + \frac{(-1)^m}{2} \int_0^x \frac{\sin 2my}{\cos y} dy.$$

The first term tends to $\pi/4$ by Leibniz' formula, and the second to 0 on $[-\pi/2 + \epsilon, \pi/2 - \epsilon]$ by integration by parts, as he did, or by the Riemann–Lebesgue theorem.

His third proof given on pages 189-190 looks mysterious, but we can give an interpretation by the theory of hyperfunctions.[2]

Similarly we can prove the expansion

$$(19) \qquad \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \sin x = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} + \cdots ,$$

given on page 183.

Another reason why people don't believe that Fourier proved his theorem is that the Dirichlet kernel (19) as we know doesn't appear in his book. Actually it does in a different expression. Since

$$2 \cos x \cos jx = \cos(j+1)x + \cos(j-1)x,$$

we have

$$\begin{aligned}
\cos x \, D_n(x) &= \cos x \sum_{j=-n}^{n} \cos jx \\
&= \cos(n+1)x + \cos nx + \sum_{j=-n+1}^{n-1} \cos jx \\
&= \cos(n+1)x - \cos nx + D_n(x),
\end{aligned}$$

and hence

$$\begin{aligned}
(1 - \cos x) D_n(x) &= \cos nx - \cos(n+1)x \\
&= (1 - \cos x) \cos nx + \sin x \sin nx.
\end{aligned}$$

Thus, dividing both sides by

$$\operatorname{versin} x = 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2},$$

we obtain Fourier's expression on page 563:

$$D_n(x) = \cos nx + \sin nx \frac{\sin x}{\text{versin } x}. \tag{20}$$

In any expression it is easy to see that

$$D_n(x) = \frac{2\sin(n+\frac{1}{2})x}{x} + R_n(x)$$

with a remainder $R_n(x)$ which can be handled by the Riemann–Lebesgue theorem or by an integration by parts if $\phi_x(y)$ is differentiable.

Thus the main part of the proof starts with the following.

Lemma. *We have, as an improper integral,*

$$\int_0^\infty \frac{\sin qx}{q} dq = \frac{\pi}{2} \text{ sign } x. \tag{21}$$

Proof on page 442. Essential is the case where $x > 0$. The existence of the improper integral follows from Leibniz' theorem on alternating series. Its value does not depend on $x > 0$ as shown by multiplying the numerator and the denominator of the integrand by x.

Given an $x > 0$, we choose $n = 1, 2, \cdots$ so that $x/n < \pi/2$. Then, we have by (19)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x/n}{2m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2m-1)x}{n}}{\frac{2m-1}{n}} \frac{1}{n} \to \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin qx}{q} dq$$

as $n \to \infty$.

The formal statement of the Fourier integral theorem (17) is given on page 525 and page 546 and its proof on pages 547–551.

Next he discusses the integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin px}{x} dx = \frac{\pi}{2} \tag{22}$$

as $p \to \infty$ on pages 547–549. To avoid the misinterpretation we quote the French original on page 548:

Supposons maintenant que le nombre p devienne de plus en plus grand, et qu'il croisse sans limite, c'est-à-dire qu'il soit infini. Les sinuosités de la courbe dont $\frac{\sin px}{x}$ *est l'ordonnée sont infiniment voisines. Leur base est une longueur infiniment petite égale à* $\frac{\pi}{p}$. *Cela étant, si l'on compare l'aire positive qui repose sur un de ces intervalles* $\frac{\pi}{p}$ *à l'aire négative qui repose sur l'intervalle suivant, et si l'on désigne par X l'abscisse finie et assez grande qui répond au commencement du premier arc, on voit que l'abscisse x, qui entre comme dénominateur dans l'expression* $\frac{\sin px}{x}$ *de l'ordonnée, n'a aucunne variation sensible dans le double intervale* $\frac{2\pi}{p}$ *qui sert de base aux deux aires. Par conséquant, l'intégrale est la même que si x était une constante. Il s'ensuit que la somme des deux aires qui se succèdent est nulle.*

Il n'en est pas de même lorsque la valeur de x est infiniment petite, parce que l'intervalle $\frac{2\pi}{p}$ *a dans ce cas un rapport fini avec la valeur de x. On connaît par là que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} dx \, \frac{\sin px}{x}$, *dans laquelle on suppose p un nombre infini, est entièrement formée de la somme de ses premiers termes qui répondent à des valeurs extrêmement petites de x. Lorsque l'abscisse a une valeur fini X, l'aire ne varie plus, parce que les parties qui la composent se détruisent deux à deux alternativement. Nous exprimons ce résultat en écrivant*

$$\text{(23)} \qquad \int_0^{\frac{1}{0}} dx \, \frac{\sin px}{x} = \int_0^{\omega} dx \, \frac{\sin px}{x} = \frac{1}{2}\pi.$$

La quantité ω, *qui désigne la limite de la seconde intégrale, a une valeur infiniment petite; et la valeur de l'intégrale est la même lorsque cette limite est* ω, *et lorsqu'elle est* $\frac{1}{0}$.

What matters is the interpretation of the infinite number p and the infinitely small quantity ω. We like to interpret an infinitesimal interval $[0, \omega]$ to be an arbitrary small positive interval $[0, \delta]$ on which the other data may be regarded as constant, and an infinite number p to be the limiting process $p \to \infty$. Then equations (23) become

$$\text{(23')} \qquad \lim_{p\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{\sin px}{x} dx = \frac{1}{2}\pi \quad \text{and} \quad \lim_{p\to\infty} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\sin px}{x} dx = 0$$

for any $\delta > 0$. Since $1/x$ is not integrable, we cannot apply the Riemann–Lebesgue theorem directly. Fourier's argument can rather be justified.

The proof of the Fourier integral formula

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\frac{\sin p(\alpha - x)}{\alpha - x}d\alpha \tag{24}$$

is given on pages 549–551.

Ayant placé l'axe des abscisses α, on tracera au-dessus de cet axe la ligne ff (fig. VIII^3), dont l'ordonnée est $f(\alpha)$. La forme de cette ligne est entièrement arbitraire; elle pourrait n'avoir d'ordonnées subsistantes que dans une ou dans quelques parties de son cours, toutes les autres ordonnées étant nulles.

On placera aussi au-dessus du même axe des abscisses une ligne courbe ss dont l'ordonnée est $\frac{\sin pz}{z}$, z désignant l'abscisse et p un nombre positif extrêmement grand. Le centre de cette courbe, ou le point qui répond à la plus grande ordonnée p, pourra être placé soit à l'origine o des abscisses α, soit à l'extrémité d'une abscisse quelconque. On suppose que ce centre est successivement déplacé, et qu'il se transporte à tous les points de l'axe des α, vers la droite, à partir du point o. Considérons ce qui a lieu dans une certaine position de la seconde courbe, lorsque le centre est parvenu au point x qui termine une abscisse x de la première courbe.

La valeur de x étant regardée comme constante, et α étant seule variable, l'ordonnée de la seconde courbe sera

$$\frac{\sin p(\alpha - x)}{\alpha - x}.$$

Si donc on conjugue *les deux courbes pour en former une troisième, c'est-à-dire si l'on multiplie chaque ordonnée de la première par l'ordonnée correspondante de la seconde, et si l'on représente le produit par l'ordonnée d'une troisième courbe tracée au-dessus de l'axe des α, ce produit sera*

$$f(\alpha)\frac{\sin p(\alpha - x)}{\alpha - x}.$$

L'aire totale de la troisième courbe, ou l'aire comprise entre cette courbe et l'axe des abscisses, sera donc exprimée par

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, f(\alpha)\frac{\sin p(\alpha - x)}{\alpha - x}.$$

Or, le nombre p étant infiniment grand, la seconde courbe a toutes ses sinuosités infiniment voisines; on reconnaît facilement que, pour tous les points qui sont à une distance finie du point x, l'intégrale définie, ou l'aire totale de la troisième courbe, est formée de parties égales alternativement positives ou négatives, et qui se détruisent deux à deux. En effet, pour un de ces points placés à une certaine distance du point x, la valeur de $f(\alpha)$ varie infiniment peu lorsqu'on augmente la distance d'une quantité moindre que $\frac{2\pi}{p}$. Il en est de même du dénominateur $\alpha - x$, qui mesure cette distance. L'aire qui répond à l'intervalle $\frac{2\pi}{p}$ est donc la même que si les quantités $f(\alpha)$ et $\alpha - x$ n'étaient pas variables. Par conséquent elle est nulle lorsque $\alpha - x$ est une grandeur finie. Donc l'intégrale définie peut être prise entre des limites aussi voisines que l'on veut, et elle donne, entre ces limites, le même résultat qu'entre des limites infinies. Tout se réduit donc à prendre l'intégrale entre des points infiniment voisins, l'un à gauche, l'autre à droite de celui où $\alpha - x$ est nul, c'est-à-dire depuis $\alpha = x - \omega$ jusqu'à $\alpha = x + \omega$, en désignant par ω une quantité infiniment petite. Or, dans cet intervalle, la fonction $f(\alpha)$ ne varie point, elle est égale à $f(x)$, et peut être mise hors du signe d'intégration. Donc la valeur de l'expression est le produit de $f(x)$ par

$$\int d\alpha \, \frac{\sin p(\alpha - x)}{\alpha - x},$$

prise entre les limites $\alpha - x = -\omega$, et $\alpha - x = \omega$.

Or cette intégrale est égale à π comme on l'a vu dans l'article précédent; donc l'intégrale définie est égale à $\pi f(x)$, d'ou l'on conclut l'equation

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \, f(\alpha) \frac{2 \sin p(\alpha - x)}{\alpha - x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \, f(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} dp \, \cos(px - p\alpha). \end{aligned} \tag{25}$$

Fourier adopts here the same interpretation of the infinitesimal interval $[x - \omega, x + \omega]$ as we did for equations (23). Rigorously speaking, the proof of the Fourier theorems is more delicate. If his proof presented here were completely true, the Fourier series of any continuous function should converge to the original function, which we know is not the case.

In our proof of the Dirichlet-Jordan theorem we employed the integration by parts (10) in the sense of the Stieltjes integral to overcome this subtlety. If the original function $f(x)$ is piecewise continuouly differentiable, we have (10) in the sense of continuous functions and thus Fourier's proof can be saved. This is exactly what Dirksen [4] did in the same issue of Crelle's Journal as Dirichlet [5].

After this proof Fourier makes an excuse:

La démonstration précédente suppose des quantités infinies, telle qu'elle a toujours été admise par les géomètres. ...

He remarks that the function $f(x)$ to which this proof applies is entirely arbitrary. First he gives examples of piecewise analytic functions, to which his proof certainly applies. Then, he also writes on page 550:

En général, la fonction $f(x)$ représente une suite de valeurs ou ordonnées dont chacune est arbitraire. L'abscisse x pouvant recevoir une infinité de valeurs, il y a un pareil nombre d'ordonnées $f(x)$.

Notes

1) Fourier's proof of (3) on pages 211–233 is unbelievable to most readers of today but Peetre [2] has shown that it can be justified if $f(x)$ is an odd entire function of a sufficiently small exponential type.

2) See Komatsu [3, pp. 207–208].

3) Unfortunately details of the figure are missing in the book.

References

1. Joseph Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, Chez Firmin Didot, Paris, 1822; *reprint*, Jaques Gabay, Sceaux, 1988.
2. Jaak Peetre, *On Fourier's discovery of Fourier series and Fourier integrals* (2000), preprint, 15pp.
3. H. Komatsu, *Fourier's hyperfunctions and Heaviside's pseudodifferential operators*, T. Kawai–K. Fujita ed., Microlocal Analysis and Complex Fourier Analysis, World Scientific, 2002, pp. 200–214.
4. Enno H. Dirksen, *Ueber die Convergenz einer nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen eines Winkels fortschreitenden Reihe*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **4** (1829), 170–178.
5. Peter Gustav Lejeune-Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **4** (1829), 157–169.