アイゼンシュタインによる楕円関数

今野秀二

アイゼンシュタインは 1823 年 4 月 16 日ベルリンに生まれ，わずか 29 年の短い生涯に数多くの優れた研究を残して世を去った．クロネッカーとは同年齢で 1843 年同時にベルリン大学に入学しヂリクレの講義を聴いている．この 2 人は学生のころ非常に親しかったし研究領域でも重なる部分が多いのにクロネッカーは大学卒業後直ちにベルリンを去っていて，1855 年再びベルリンに戻ったときアイゼンシュタインはすでに世を去っていた．そのため 2 人の数学的交流は少なかったと見られる．アイゼンシュタインが非凡な才能を持っていたことは，ベルリン大学に入学した 1843 – 44 年 Crelle 誌に掲載された 24 編の論文などにうかがえる．

ガウスはアイゼンシュタインについて次のように述べている．アイゼンシュタインの研究は，三角関数の発展である超越関数と整数論にわたるが，この領域には尽きることのない興味深いテーマが無尽蔵にあり思いもかけない発見がある．彼はこの領域で，思いも寄らない初等的な方法でかずかすの発見している．アイゼンシュタインの特徴はその初等的な方法にあり，研究結果は新発見なのにあたかも昔から知られていたかのようである．

アイゼンシュタインの研究は 1843 年から 1850 年に集中していて，2 次および 3 次形式，高次指標のガウス和，相互法則（2 次，3 次，4 次，8 次），レムニスケート関数，積分の逆関数によらない楕円関数の導入などである．ここでは楕円関数とレムニスケート関数について紹介するが，楕円関数についてはヴェーユがすでに紹介している（[W]）．この本でヴェーユはアイゼンシュタインがまわりくどいやり方で曖昧に証明していた収束に関する部分を厳密に証明し，途中で終わって未完成であったテータ関数の理論を完成している．一方，アイゼンシュタインの特徴はガウスが指摘するように，非常に初等的な方法を繰り返して三角関数，楕円関数の基本公式を導くやり方である．ヴェーユでは例えば関数 $E_1(x)$ のべき級数展開の係数だけからこれらの関係を出しているが，アイゼンシュタインは初等的

な方法を繰り返すのである．ここではアイゼンシュタインの特徴を忠実に再現することにした．また，レムニスケート関数についてはその方法までは述べず，結果だけを紹介する．

便宜上アイゼンシュタインを [E]，ヴェーユは [W] と略記する．また記法は双方を読みよいように，原則 [W] に従い細部は [E] に従った．

[E] G. Eisenstein ; Mathematishe Werke Bd. 1,2, Chelsea Pub.c. New York, N.Y. 1975. [W] A. Weil ; Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker, Springer-Ver. 1976.

[1] [E] は早い時期から無限積 $\prod_m(1-x/(m\alpha+\beta))$ が３角関数で表せることに注目し，２重無限積 $f(x,\gamma)=\prod_{n,m}(1-x/(m\alpha+n\beta+\gamma))$ は楕円関数に結びつくだろうと考えていた。ところで，これらの無限積は対数をとって x のべき級数に展開すると（収束を仮定して）係数に

$$\sum_m(m\alpha+\beta)^{-g}, \qquad \sum_{n,m\in\mathbf{Z}}(m\alpha+n\beta+\gamma)^{-g} \qquad (g=1,2,\cdots)$$

という形の無限級数が現れる．[E] は３角関数と楕円関数という２つの領域を平行して展開できると考えわけだが，その基礎として上の２つの無限級数に注目したのである．

そこで [E] に従ってモデルとなる３角関数の場合に，上記の級数がどう関係するかを見ることにする．変数 x の関数 ε_g を

$$\varepsilon_g(x)=\sum_{m\in\mathbf{Z}}(x+m)^{-g} \qquad (g=1,2,3,\cdots)$$

とする．$g\geq 2$ なら絶対収束だが $g=1$ のときは $\varepsilon_1(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{-N}^{N}(x+m)^{-1}$ と定義する．この和を [W] は $\sum_e$ と表し，アイゼンシュタイン和と呼んだ． 無限積 $\prod_e$ も同様に定義する．以後単に $\sum,\prod$ と書くことにする．$\varepsilon_g(x)$ は g が偶数か奇数かに従って偶関数か奇関数になる．また，

$$\frac{d}{dx}\varepsilon_g(x)=-g\varepsilon_{g+1}(x)$$

が成り立ち，$|x|\neq 0$ が十分小のとき次のようにべき級数に展開される．

$$\varepsilon_1(x)=\frac{1}{x}-\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}x^{2m-1}, \qquad \gamma_{2m}=2\zeta(2m).$$

$\zeta(s)$ はリーマンのゼータ関数である．

p, q, r が $p+q=r$ のとき次の恒等式がなり立つ

$$\frac{1}{p^2q^2}=\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\frac{2}{r^3}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right). \tag{1}$$

この (1) に $p=x+m, q=-x-m+n$ を代入し $n, m \in \mathbf{Z}, n \neq 0$ について和をとると，左辺から $\varepsilon_2^2-\varepsilon_4$ が出る (すべての $m, n \in \mathbf{Z}$ についての和から $n=0, m \in \mathbf{Z}$ についての和を引く)，右辺から $2\gamma_2\varepsilon_2$ が出るので，結局 $\varepsilon_4(x)=\varepsilon_2(x)^2-2\gamma_2\cdot\varepsilon_2(x)$ を得る．次に (1) に $p=x+m, q=n$ を代入し $n, m \in \mathbf{Z}, n \neq 0$ について和をとると，同様にして $3\varepsilon_4(x)=\varepsilon_2(x)^2+2\varepsilon_1(x)\varepsilon_3(x)$ を得る．ただし $\gamma_2=2\zeta(2)=\pi^2/3$ である．そこで $y=\varepsilon_1(x)$ とすれば $y'=-\varepsilon_2(x), y''=2\varepsilon_3(x), y'''=-6\varepsilon_4(x)$ ゆえ，上の 2 関係式は

$$y'''=-6(y'^2+2\gamma_2y'), \qquad y'''=-2(y'^2+yy'')$$

となる．これから y''' を消去し $yy''=2y'^2+2\pi^2y'$ $(*)$．これを微分し第 1 式の y''' を代入して，因数分解すると $3y'+2\pi^2 \neq 0$ ゆえ $y''=-2yy'$ である．これと (*) から $y'=-y^2-\pi^2$．従って $x=0$ での動向から

$$\varepsilon_1(x)=\sum_m\frac{1}{x+m}=\pi\cot\pi x=\frac{x}{dx}\log\sin\pi x \tag{2}$$

が出る．

(2) の両辺から $1/x$ を引くと $\sum'(x+m)^{-1}=d/dx\{\log(\sin\pi x/x)\}$ となる ($\sum'$ は 0 以外の m についての和)．この両辺を 0 から x まで積分すると $\log(\sin\pi x/x)\to\log\pi \quad (x\to 0)$ より

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{m\neq 0}(1-x/m).$$

従って

$$\frac{\sin\pi((\beta-x)/\alpha)}{\sin(\beta/\alpha)}=\prod_m(1-\frac{x}{m\alpha+\beta}) \tag{3}$$

が得られる．

つづけて [E] は $p^{-1}q^{-1}=r^{-1}(p^{-1}+q^{-1})$ に上と同じような操作をして

$$\varepsilon_1(x+y)\{\varepsilon_1(x)+\varepsilon_1(y)\}=\varepsilon_1(x)\varepsilon_1(y)-3\gamma_2$$

を示し cot の加法定理を出しているが，楕円関数の場合と重複するのでそちらに譲る．以上で３角関数は終わるが，[E] は以上の方法を非常に巧みに楕円関数の場合に一般化しいる．

[2] [E] は $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ について $W = \mathbf{Z}\alpha + \mathbf{Z}\beta$ が $\mathbf{C}$ の格子となるための条件から $\beta/\alpha = -\delta\tau, \Im\tau > 0, \delta = \pm 1$ でなければならないことを示した．しかし，ここでは以後 $\beta/\alpha = \delta\tau, \Im\tau > 0, \delta = \pm 1$ と書くことにする（δ の符号が反対である）．

変数 γ とパラメータ x に対して

$$f(x,\gamma) = f(x,\gamma;\alpha,\beta) = \prod_n \prod_m \left(1 - \frac{x}{m\alpha + n\beta + \gamma}\right)$$

とおく．また $g = 1, 2, \cdots$ に対して

$$E_g(\gamma) = E_g(\gamma;\alpha,\beta) = \sum_{m,n \in \mathbf{Z}} (m\alpha + n\beta + \gamma)^{-g}$$

とおく． $g \geq 3$ なら $E_g(\gamma)$ は絶対収束だが $g = 1, 2$ のときは絶対収束でないから $E_g = \sum_n \sum_m$ と定義する．ともにアイゼンシュタイン和で最初 m について，つぎに n について和をとる．$f(x,\gamma)$ における積もアイゼンシュタイン積である．

$\varepsilon_g(x)$ と同様 $E_g(\gamma)$ は g が偶数か奇数かでそれぞれ偶関数または奇関数となり， $\frac{d}{d\gamma}E_g(\gamma) = -E_{g+1}(\gamma)$ が成り立つ．

E_g は $g \geq 3$ なら絶対収束ゆえ和の順序に依存しないが $g = 1, 2$ のときは，和は順序に依存する．[E] は $g = 1, 2$ の場合，次の (i), (ii) の変換（順序入れ替え）に対するその違いを求めている（[E] に忠実な証明が [W] にあるので略す）．

(i) $m\alpha + n\beta \in W$ だけ平行移動のとき

$$E_1(\gamma + m\alpha + n\beta) = E_1(\gamma) - \frac{2\pi i\delta n}{\alpha}, \quad E_2(\gamma + m\alpha + n\beta) = E_2(\gamma) \tag{4}$$

(ii) 部分格子 $W' = \mathbf{Z}\alpha' + \mathbf{Z}\beta' \subset W$ が次式で与えられ

$$(\alpha', \beta') = (\alpha, \beta)\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \rho \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu, \nu, \rho \in \mathbf{Z}, \lambda\rho - \mu\nu \neq 0),$$

R が W/W' の完全代表系で，すべての $r+W'$, $(r\in R)$ の和をとるとき

$$\sum_{r\in R} E_1(\gamma+r;\alpha',\beta') = E_1(\gamma;\alpha,\beta) + \frac{2\pi i\delta\nu}{\alpha\alpha'}\gamma - \frac{\pi i\delta'\bar{h}}{\alpha'}, \tag{5}$$

$$\sum_{r\in R} E_2(\gamma+r;\alpha',\beta') = E_2(\gamma;\alpha,\beta) - \frac{2\pi i\delta\nu}{\alpha\alpha'}. \tag{6}$$

ここで $\delta' = \delta\cdot\mathrm{sgn}(\lambda\rho-\mu\nu)$，$2\sum_{r\in R} r = \bar{g}\alpha' + \bar{h}\beta'$ である．

[E] の研究では２つの変換 (i) (ii) が非常に重要な役割を果たしている．

３角関数の場合の γ_{2m} にならって，e_g を次のように定義する

$$e_g = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m\alpha+n\beta)^{-g}.$$

これは g が偶数でなければ 0 である．また $g=2$ のときはアイゼンシュタイン和で定義する．

[3] テータ関数へのアプローチ： [E] は (3) で β を $\gamma+n\beta$ で置き換えた式

$$P_n = (\sin\pi\frac{\gamma-x+n\beta}{\alpha})/(\sin\pi\frac{\gamma+n\beta}{\alpha}) = \prod_m (1-\frac{x}{m\alpha+n\beta+\gamma}) \tag{7}$$

を用いて $f(x,\gamma)$ を次のように表す

$$f(x,\gamma;\alpha,\beta) = P_0 \times \prod_{n=1}^{\infty} P_n P_{-n}. \tag{8}$$

次に $e(x)=e^{2\pi ix}$ として sin を指数関数で表し，$f(x,\gamma)$ も指数関数で表す．そのために

$$q=e(\tau),\quad \tau=\delta\frac{\beta}{\alpha};\quad z=e(\zeta),\quad \zeta=\frac{\gamma}{\alpha};\quad z^*=e(\zeta^*),\quad \zeta^*=\frac{\gamma-x}{\alpha}$$

($\Im\tau>0$ に注意) とおく．簡単な計算で

$$P_0 = \frac{z^{*\frac{1}{2}} - z^{*-\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}}, \qquad P_nP_{-n} = \frac{(1-q^nz^*)(1-q^nz^{*-1})}{(1-q^nz)(1-q^nz^{-1})}.$$

となるから，無限積 $f(x,\gamma)$ は次のようになる

$$f(x,\gamma)=\frac{\chi_q(z^*)}{\chi_q(z)},\qquad \chi_q(z)=(z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^nz)(1-q^nz^{-1}). \tag{9}$$

[E] では，上の δ の代わりに $-\delta$ をとり α,β,γ,x に対して

$$\eta=\frac{\pi\beta}{\alpha},\ \xi=\frac{\pi\gamma}{\alpha},\ y=\frac{\pi x}{\alpha},\ p=e^{i\eta},\ \zeta=e^{i\xi},\ z=e^{iy},\ q=p^{-\delta}$$

とおいて (9) およびその他の計算をしているが同じものである．

(9) の右辺に現れる $\chi_q(z)$ はあとで分かるようにテータ関数の一種で (9) は無限積とテータの関係を表していると考えてよい．しかし [E] は "時間切れ", "もう十分ページを使った" などと書いて最終結果までは出していない．以下 [E] の出した結果を追って見ることにする．

$|x|\neq 0$ が十分小さいとき $f(x,\gamma)$ は

$$\log f(x,\gamma;\alpha,\beta)=-xE_1(\gamma)-\frac{x^2}{2}E_2(\gamma)-\frac{x^3}{3}E_3(\gamma)-\cdots$$

と展開できる．一方 $g\geq 3$ のとき E_g は (i) (ii) の変換で不変ゆえ，この等式から $\log f(x,\gamma)+xE_1(\gamma)+\frac{x^2}{2}E_2(\gamma)$ は変換 (i) (ii) で不変である．従って (4) から

$$f(x,\gamma+m\alpha+n\beta)=e(\frac{\delta nx}{\alpha})f(x,\gamma). \tag{10}$$

ここで $x/\alpha=\zeta-\zeta^*$ だが，変換 $\gamma\to\gamma+m\alpha+n\beta$ は $z\to zq^{n\delta},z^*\to z^*q^{n\delta}$ を引き起こすから (10) は次のように表せる

$$\frac{\chi_q(q^{n\delta}z^*)}{\chi_q(q^{n\delta}z)}=\frac{z^{*-n\delta}}{z^{-n\delta}}\times\frac{\chi_q(z^*)}{\chi_q(z)}. \tag{11}$$

ところが γ,x は互いに独立ゆえ $\chi_q(q^nz)=C\times z^{-n}\chi_q(z)$（$C$ は z に無関係）と表せる．そこで $n=1$ のときに C を決めるため $z=q^{-1/2}$ とする．$\chi_q(z^{-1})=-\chi_q(z)$ より $C=-q^{-1/2}$．よって $n=1$ のとき $\chi_q(qz)=-q^{-1/2}z^{-1}\chi_q(z)$ である．$n\geq 1$ については帰納法を使って

$$\chi_q(q^nz)=q^{-\frac{n^2}{2}}(-z)^{-n}\chi_q(z) \tag{12}$$

を出している．これは $\chi_q(z)$ の (i) による変換である．

[E] は次に変換 $(\alpha,\beta)\to(\alpha',\beta')=(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ \nu & \rho\end{pmatrix}\qquad(\lambda\rho-\mu\nu\neq\pm1)$ による $\chi_q(z)$ の変換を求めようとしている。$\alpha'=\lambda\alpha+\nu\beta,\ \beta'=\mu\alpha+\rho\beta$ ゆえ，上の変換は

$$\delta\tau=\frac{\beta}{\alpha}\to\frac{\beta'}{\alpha'},\qquad \zeta=\frac{\gamma}{\alpha}\to\frac{\gamma}{\alpha'},\qquad \zeta^*=\frac{\gamma-x}{\alpha}\to\frac{\gamma-x}{\alpha'}$$

を引き起こしている。これを

$$\delta'\tau'=\frac{\beta'}{\alpha'}=\frac{\mu+\rho\delta\tau}{\lambda+\nu\delta\tau},\qquad \zeta'=\frac{\gamma}{\alpha'}=\frac{\zeta}{\lambda+\nu\delta\tau},\qquad \zeta^{*\prime}=\frac{\gamma-x}{\alpha'}=\frac{\zeta^*}{\lambda+\nu\delta\tau}$$

と書く．ただし $\delta'=\delta\epsilon$ である．そこで $q'=e(\tau'),z'=e(\zeta'),z^{*\prime}=e(\zeta^{*\prime})$ とすれば (5), (6) から

$$f(x,\gamma;\alpha',\beta')=f(x,\gamma;\alpha,\beta)e(-\frac{\delta\nu}{\alpha\alpha'}(\gamma x-\frac{x^2}{2})). \tag{13}$$

この式から

$$\frac{\chi_{q'}(z^{*\prime})}{\chi_{q'}(z')}=e(\frac{\delta\nu}{2}(\zeta^*\zeta^{*\prime}-\zeta\zeta'))\frac{\chi_q(z^*)}{\chi_q(z)} \tag{14}$$

が得られる．ここで再び (11) から (12) を出した方法で $\chi_q(z)$ の変換式（テータ関数の変換式の相当）を出したいのだが [E] はこれは求めていない．

[E] はつぎに x の関数として無限積

$$\varphi(x)=x\prod_{0\neq w\in W}(1-\frac{x}{w})=x\prod_{(n,m)\neq(0,0)}(1-\frac{x}{m\alpha+n\beta})$$

を導入する．これはワイヤストラスの σ 関数 $\sigma(x)=x\prod_w(1-1/w)\exp(x/w+x^2/(2w^2))$ を使うと $\varphi(x)=\sigma(x)\exp(-e_2x^2/2)$ である。簡単な計算から

$$f(x,\gamma)=\frac{\varphi(x-\gamma)}{\varphi(-\gamma)}=\frac{\varphi(\gamma-x)}{\varphi(\gamma)},\qquad \varphi(x)=-\gamma f(x,\gamma)|_{\gamma=0}, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dx}\log\varphi(x)=E_1(x)$$

が分かる．ここで再び (10) と (15) の第一式から $\varphi(\gamma+m\alpha+n\beta-x)/\varphi(\gamma+m\alpha+n\beta) = \varphi(\gamma-x)/\varphi(\gamma)\times e(\delta nx/\alpha)$．そこで $x_1 = \gamma - x$ とおくと $\varphi(x_1+m\alpha+n\beta)/\varphi(\gamma+m\alpha+n\beta) = e(\delta n(\gamma-x_1)/\alpha)\varphi(x_1)/\varphi(\gamma)$．従って，(11) から (12) を出したときと同様にして $\varphi(x+m\alpha+n\beta) = C\times e(-n\delta x/\alpha)\varphi(x)$

（C は x に無関係）と書ける．そこで再び x に特別な値を入れて C を求め

$$\varphi(x+m\alpha+n\beta) = (-1)^{m+n}q^{-\frac{n^2}{2}}e(-\frac{n\delta x}{\alpha})\varphi(x) \tag{16}$$

を出している．[E] のテータ関数に関係する記述（無限積をテータ関数で表す）はこれで終わっている．この χ_q とテータとの関係は [W] によると次のようになる．まず $\chi_q(z)$ の定義から

$$\chi_q(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{l,n}q^n z^{l+\frac{1}{2}} = \sum_{l=-\infty}^{\infty}F_l(q)z^{l+\frac{1}{2}} \qquad (C_{l,n}\text{ ; 有理数})$$

とフーリェ展開できる．このとき $\chi_q(z)$ とテータ関数 $\theta(\zeta,z)$ との間には，上記フーリエ展開の係数 $F_0(q)$ を使って

$$\theta(\zeta,z) = i^{-1}q^{\frac{1}{8}}\frac{\chi_q(z)}{F_0(q)}. \tag{17}$$

が成り立つ．ただし

$$\theta(\zeta,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}e((n+\frac{1}{2})^2\frac{\tau}{2}+(n+\frac{1}{2})(\zeta-\frac{1}{2}))$$

である（ $\theta(\zeta,z)$ の変換公式には (14), (17) の他に η 関数の変換が必要である ([W])．

[4] E_g $(g=1,2)$ と楕円積分の関係：[E] は ε_1 から cot を導いたときの考えを踏襲して E_g $(g=1,2)$ と楕円積分の関係を導いている．

$p+q=r$ として，つぎの恒等式を利用する．

$$\frac{1}{p^3q^3} = \frac{1}{r^3}(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3})+\frac{3}{r^4}(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2})+\frac{6}{r^5}(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}) \tag{18}$$

以下「$p=x+w_1, q=-x-w_2, r=w_1-w_2$ を代入し $w_1, w_2 \in W, w_1 \neq w_2$ について和をとる」という操作を A ,「$p=w_1, q=x+w_2, r=x+w_1+w_2$ を代入し $w_1, w_2 \in W, w_1 \neq 0$ について和をとる」という操作を B とする.

さて (18) に操作 A で和をとるときは次のようにする. 左辺は $-(x+w_1)^{-3}(x+w_2)^{-3}$ ですべての $w_1, w_2 \in W$ について和から $w_1 = w_2 \in W$ についての和を引いて $-E_3(x)^2 + E_6(x)$ がでる. 右辺は $w = w_1 - w_2$ とおき, すべての w_2 について和をとり, ついですべての $w \neq 0$ についての和をとる. 第1項の和は 0 , 第2項の和は $6e_4E_2(x)$ となる. 第3項は (4) を使って $w_2 \in W$ についての和をとると, $w = m\alpha + n\beta$ のとき $\sum(x+w_2+w)^{-1} = \sum(x+w_2)^{-1} - 2\pi i\delta n/\alpha$ であるから, $-6c = -6\sum_{m,n}(m\alpha+n\beta)^{-5} \times 2\pi i\delta n/\alpha$ となる. よって (18) に A の操作をすると

$$E_6(x) = E_3(x)^2 + 6e_4E_2(x) - 6c, \qquad c = -\frac{2\pi i\delta}{\alpha} \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{n}{(m\alpha+n\beta)^5} \tag{19}$$

を得る. (18) に B 操作で和をとると同様にして

$$10E_6(x) - \frac{3\pi i\delta}{\alpha}\frac{\partial E_4(x)}{\partial\beta} = E_3(x)^2 + 3e_2E_4(x) + 3E_2(x)E_4(x) + 6E_1(x)E_5(x) \tag{20}$$

を得る. つぎに $p+q=r$ に対する別の恒等式

$$\frac{1}{p^4q^3} - \frac{1}{p^3q^4} = \frac{1}{r^3}(\frac{1}{p^4} - \frac{1}{q^4}) + \frac{2}{r^4}(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{q^3}) + \frac{2}{r^5}(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}) \tag{21}$$

について A, B の操作をすると, それぞれ

$$E_7(x) = E_3(x)(E_4(x) + 2e_4) \tag{22}$$

$$5E_7(x) = 2E_5(x)(E_2(x) - e_2) + 3E_3(x)E_4(x) \tag{23}$$

が得られる.

ここで $E'_g = -gE_{g+1}$ ゆえ (19), (20), (22), (23) は何れも E_2 の微分方程式で (20) だけは偏微分方程式である. まず (22) を2回微分して

$$7E_8(x) = 3E_4^2(x) + 4E_3(x)E_5(x) + 6e_4E_4(x)$$

$$14E_9(x) = 9E_4(x)E_5(x) + 5E_3(x)E_6(x) + 6e_4E_5(x). \tag{24}$$

(23) をやはり 2 回微分して

$$35E_8(x) = 10E_6(x)(E_2(x) - e_2) + 16E_3(x)E_5(x) + 9E_4^2(x)$$

$$14E_9(x) = 3E_7(x)(E_2(x) - e_2) + 5E_3(x)E_6(x) + 6E_4(x)E_5(x). \tag{25}$$

(24), (25) から E_9 を消去して $E_7(E_2-e_2) = (E_4+2e_4)E_5$。ここで $E_4+2e_4 \neq 0$ ゆえ (22) より

$$E_5(x) = E_3(x)(E_2(x) - e_2) \tag{26}$$

がでる．これを微分して

$$5E_6(x) = 3E_4(x)(E_2(x) - e_2) + 2E_3^2(x). \tag{27}$$

また (23) から (22) の 5 倍を引いて $E_5(E_2 - e_2) = E_3(E_4 + 5e_4)$ であるが $E_3 \neq 0$ ゆえ (26) から

$$E_4(x) = (E_2(x) - e_2)^2 - 5e_4. \tag{28}$$

従って (19), (27), (28) から E_2 に関し階数が一番低い微分方程式として

$$E_3^2(x) = (E_2(x) - e_2)^3 - 15e_4(E_2(x) - e_2) - 10(e_2e_4 - c) \tag{29}$$

が得られた．

(29) を見ると E_2^3 は E_2 の 3 次式で最高次の係数は 1 である．従って $E_3^2 = (E_2 - a)(E_2 - a')(E_2 - a'')$ と表せる．一方 $E_3(x)$ は α, β を周期にもつ x の奇関数であるから $E_3(\alpha/2) = -E_3(-\alpha/2) = -E(-\alpha/2 + \alpha) = 0$. 同様に $E_3(\beta/2) = E_3((\alpha + \beta)/2) = 0$ となる．従って $a = E_2(\alpha/2), a' = E_2(\beta/2), a'' = E_2((\alpha+\beta)/2)$ と書ける．そこで $y = E_2(x)$ とおくと $dy/dx = -2E_3(x)$ より

$$2x = \int \frac{dy}{\sqrt{(y-a)(y-a')(y-a'')}} \tag{30}$$

となり右辺は第 1 種楕円積分 (Jacobi) である．従って $y = E_2(x)$ は本質的に第一種楕円積分の逆関数になっている．また $E_1(x)$ は

$$E_1(x) = -\int y dx = -\int \frac{y dy}{2\sqrt{(y-a)(y-a')(y-a'')}}. \tag{31}$$

を満たしていることが分かる．これは第２種楕円積分である．

よく知られているワイヤストラスのｐ関数

$$p(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{0 \neq w \in W} \left(\frac{1}{x+w} - \frac{1}{w} \right) \tag{32}$$

は容易に分かるように，[E] では $p(x) = E_2(x) - e_2$ と表される．また，微分方程式 $p'(x)^2 = 4p(x)^3 - g_2 p(x) - g_3$ は [E] では (29) である．[E] は楕円関数を楕円積分 (30), (31) の逆関数で定義するという伝統的なやり方に対して（最初ではないかも知れないが）積分の逆関数ではなく E_g あるいは $(E_2 - e_2)$ から定義するという方法を導入したことになる．

[5]　　[E] は続いて第１種，第２種楕円積分の加法定理を非常に巧妙な計算から導いている．

x, y は独立な変数とし $w_1, w_2 \in W$ とする．このとき次に恒等式がなりたつ．

$$\left(\frac{1}{x+w_1} - \frac{1}{y+w_1} \right) \left(\frac{1}{x+w_2} - \frac{1}{y+w_2} \right)$$
$$= \frac{1}{w_1 - w_2} \left(-\frac{1}{x+w_1} + \frac{1}{x+w_2} - \frac{1}{y+w_1} + \frac{1}{y+w_2} \right)$$
$$+ \frac{1}{x-y+w_1-w_2} \left(\frac{1}{x+w_1} - \frac{1}{y+w_2} \right) + \frac{1}{y-x+w_1-w_2} \left(\frac{1}{y+w_1} - \frac{1}{x+w_2} \right).$$

ここですべての $w_1, w_2 \in W$ について両辺の和をとる．まず左辺から $(E_1(x) - E_1(y))^2$ がでる．右辺の和は $w_1 = w_2 \in W$ の場合と $w_1 \neq w_2$ の場合に分けてとる．$w_1 = w_2 \in W$ のときは第１項から $E_2(x) + E_2(y)$，第２項第３項をあわせた和は $2(x-y)^{-1}(E_1(x) - E_1(y))$ となる．次に $w_1 \neq w_2$ についての和は $w = w_1 - w_2$ とし，すべての w_2 について和をとったあとで $w \neq 0$ についてとる．

右辺第１項は $w = m\alpha + n\beta$ のとき (4) から

$$\frac{4\pi i\delta}{\alpha} \sum_{w \neq 0} \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial \beta} = \frac{4\pi i\delta}{\alpha} \sum_{w \neq 0} \frac{\partial}{\partial \beta} \log w$$

となる．第２第３項に関する和はやはり (4) を使って計算すると

$$2E_1(x-y)(E_1(x)-E_1(y))-\frac{2}{x-y}(E_1(x)-E_1(y))-\frac{4\pi i\delta}{\alpha}\sum_{w\neq 0}\frac{n}{x-y+w}$$

となる．以上をまとめて得られる等式において，さらに y を $-y$ で置き換えると

$$\begin{aligned}(E_1(x)+E_1(y))^2 &= 2E_1(x+y)(E_1(x)+E_1(y))+(E_2(x)+E_2(y))\\ &-\frac{4\pi i\delta}{\alpha}\left(\sum_{w\neq 0}\frac{\partial}{\partial\beta}\log(x+y+w)-\sum_{w\neq 0}\frac{\partial}{\partial\beta}\log w\right).\end{aligned}$$

ここで先に導入した φ を使うと $\frac{\partial}{\partial\beta}\log(x+y)=0$ に注意して

$$\sum_{w\neq 0}\frac{\partial}{\partial\beta}\log(x+y+w)-\sum_{w\neq 0}\frac{\partial}{\partial\beta}\log w=\frac{\partial}{\partial\beta}\log\varphi(x+y).$$

従って

$$\begin{aligned}(E_1(x)+E_1(y))^2 &= 2E_1(x+y)(E_1(x)+E_1(y))+(E_2(x)+E_2(y))\\ &\quad -\frac{4\pi i\delta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\log\varphi(x+y).\end{aligned} \tag{33}$$

３角関数ではここまでの計算から $\cot x$ の加法定理を得た．しかし，楕円関数の場合は加法定理になっていない．[E] は最後の偏微分を消去するため更に変形する．

$E_1(y)$ の $y=0$ での展開 $E_1(y)=y^{-1}-\sum_{m=1}^{\infty}e_{2m}y^{2m-1}$ とこれを微分した式 $E_2(y)=y^{-2}+\sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)e_{2m}y^{2m-2}$ を (32) に代入し y を 0 に近づける．そのとき $(E_1(x+y)-E_1(x))/y\to -E_2(x)$ に注意する．こうして得られた式で x を改めて $x+y$ に置き換えると

$$E_2(x+y)+\frac{4\pi i\delta}{\alpha}\frac{\partial\log\varphi(x+y)}{\partial\beta}=E_1(x+y)^2+3e_2. \tag{34}$$

そこで (32) (33) から β に関する偏微分の項を消去して

$$(E_1(x)+E_1(y)-E_1(x+y))^2=E_2(x)+E_2(y)+E_2(x+y)-3e_2 \tag{35}$$

を得る．これは第2種楕円積分の加法定理である．

次に $x+y$ を定数とみて (35) を x または y について微分すると

$$E_1(x)+E_1(y)-E_1(x+y)=\frac{E_3(x)-E_3(y)}{E_2(x)-E_2(y)}$$

となり，従って (35) から

$$E_2(x)+E_2(y)+E_2(x+y)-3e_2=\left(\frac{E_3(x)-E_3(y)}{E_2(x)-E_2(y)}\right)^2 \tag{36}$$

が得られる．これは第1種楕円積分の加法定理である．[E] は同じような方法でこの他にも興味深い関係式を次々と導いている．

(36) はワイヤストラスの p 関数 $p(x)=E_2(x)-e_2$ で表すと次のようになる

$$p(x)+p(y)+p(x+y)=\frac{1}{4}\left(\frac{p'(x)-p'(y)}{p(x)-p(y)}\right)^2.$$

[6] レムニスケート関数 $x=\varphi(t)$ は

$$x=\varphi(t)\Longleftrightarrow t=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

で定義される．右の等式で x の代わりに ix を代入すると t は it になるから $\varphi(it)=i\varphi(x)$ でなければならない．これで φ を複素変数の関数と見なす．レムニスケート関数について次のことは当時知られていた．

$$\varphi(t+t')=\frac{\varphi(t)\sqrt{1-\varphi(t')^4}+\varphi(t')\sqrt{1-\varphi(t)^4}}{1+\varphi(t)^2\varphi(t')^2}\qquad \text{(加法定理)}. \tag{37}$$

$$\omega=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{\sqrt{2\pi}}$$

とすれば $\varphi(x)$ は $C=(2+2i)\omega$ を周期にもつ．

以下 $\mathfrak{o}=\mathbf{Z}[i]$ をガウス数体 $\mathbf{Q}(i)$ の整数環とする．[E] はガウスに従い $m\in\mathfrak{o}$ が $m\equiv 1 \mod (2+2i)$ のとき primär といい，さらに (m) が素イデアルのとき，数 m を primär prim Zahl と呼んでいる．以後面倒だが primäre prim と表すことにする．$p = N(m)$ をそのノルムとすると (m) は 1 次または 2 次の素イデアルなので，p は $\equiv 1 \mod 4$ の素数か $\equiv 3 \mod 4$ の素数の 2 乗である．

[E] は m が primäre prim のとき $\varphi(mt)$ を $\varphi(t)$ の関数で表すことを考えるのだが，これを微分方程式

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = m\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \qquad y|_{x=0} = 0 \tag{38}$$

の解として求めている．結果は $y = \varphi(mt), x = \varphi(t)$ のとき

$$y = x\frac{m + A_1x^4 + \cdots + A_{(p-1)/4}x^{p-1}}{1 + B_1x^4 + \cdots B_{(p-1)/4}x^{p-1}} = \frac{U(x)}{V(x)} \tag{39}$$

と表される（この式は楕円関数の等分点の体の構造と変換 $x \to ix$ から分かるのだが [E] の時代微分方程式 (38) から導いていたようである）．ここで $A_i, B_j \in \mathfrak{o}, A_{(p-1)/4} = 1$ かつ分子分母は公約因子を持たない．[E] はこの式を最初 1 次の素イデアル (m) について証明し，後に (m) が 2 次の場合を証明している．例えば，分子の定数項は微分方程式から $dy/dx|_{x=0} = m$ として出る．

(39) の U, V に対して $W(x) = U(x)/x$ と置くと，$W(x) = 0$ は 0 以外の周期の m 分点におけるレムニスケート関数の値 $\varphi(rC/m)$ $(r \mod m \neq 0)$ を根に持つ方程式である．[E] はこの方程式 $W(x) = 0$ が円体の素数分点の方程式 $(x^p - 1)/(x-1) = 0$ に相当すると注意して，そのアナロジーとしてレムニスケートの場合に，次にあげるような結果を出している．

(a) (m) が素イデアルなら $W(X)$ は既約であることの証明．この証明の中で既約性を判定する「アイゼンシュタインの定理」が証明される．すなわち「$W(x)$ は最高次係数が 1 その他の係数はすべて (m) で割り切れる整数，定数項は (m) でちょうど 1 回だけ割り切れるから $W(x)$ は既約である」と．
(b) [E] は任意の primäre prim (m) について $x = \varphi(t), y = \varphi(mt)$ （t は変数）のとき

$$y = \frac{x^{N(m)} + mP}{1 + mQ} \qquad P, Q \in \mathfrak{o}[x] \tag{40}$$

を証明している．最初 (m) が 1 次の素イデアルの場合に，後に 2 次の素イデアルの場合に導いている．これは $\mod m$ でみるとレムニスケート関数

の m 分点に関する合同関係式

$$\varphi(mt) \equiv \varphi(t)^{N(m)} \mod m$$

を含んでいる.

例 $m = 3 + 2i, p = N(m) = 13$ のとき

$$y = \frac{(3+2i)x + (7-4i)x^5 + (-11+10i)x^9 + x^{13}}{1 + (-11+10i)x^4 + (7-4i)x^8 + (3+2i)x^{12}}$$

ここで $7 - 4i = (3+2i)(1-2i), -11+10i = (3+2i)(-1+4i)$ である.
(c) [E] は (40) をさらに，任意の整数 $\mu > 0$ について $p = N(m)$ のとき

$$\varphi(m^\mu t) = \frac{\varphi(t)^{p^\mu} + mP_1}{1 + mQ_1} \qquad P_1, Q_1 \in \mathfrak{o}[x]$$

と一般化する．その上で m とは別の primäre prim (n) について,「$\mu > 0$ を $n^\mu \equiv 1 \mod m$ を満たす最小の整数とすれば，$W(x)$ は剰余環 $\mathfrak{o}[x]/(n)$ の多項式とみて $(p-1)/\mu$ 個の既約因子に分解される」を証明している.

[E] はこの後クンマー理論もできると述べているが，ここで終わっている.
また，素イデアル $(m), (n)$ の合同関係式を利用して（3角関数を使った2次相互法則の証明のアナロジーで）4乗剰余の相互法則を証明したり，8乗剰余の相互法則も取り上げている.