数学史通史の試み

数論と関数論

高瀬正仁

A　本の形

数論と関数論を中心に据えて近代数学の通史を書きたいと思う．理論形成のみではなく，数学を創った人々の人と生涯を重視するとともに，人と人とのつながりにも注目したい．古典を重く見て，なるべく多くの原論文と原著を選定し，数学形成の根幹と見られる言葉を選び，訳出して配列し，併せて原論文の該当箇所を掲示する．論文と著作の実物のコピーも掲げ，リアリティーをもたせたい．相互関連を詳しく記述し，小さな物語を組み上げて大きな物語を構成したいが，あくまでも原典を基礎にして，「数学のある数学史」をめざしたいと思う．

数学史の叙述でよく見られるのは，今日の数学の形成過程をたどるという趣旨のもので，いわば「振り返る数学史」である．その場合，足場はつねに現在の数学的状況に置かれていて，関数や多様体などの基本概念の起源を探究したり，微積分やフーリエ解析の形成史を叙述したりする．だが，これとは反対に，視点を過去のある時期に設定する数学史も可能なのではないかと思う．基本方針としては，今日の時点から振り返る数学史ではなく，過去から現在へと諸理論，諸概念の発生と生い立ちをたどり，いわば「川の流れに沿う数学史」を叙述するのが理想である．

今日の数学の知識をもって解説を加えようとした場合，たとえば平方剰余相互法則の形成史はどのように叙述されるのであろうか．文献上で時系列を観察すれば，この法則の第一発見者はオイラーであり，次にルジャンドル，その次はガウスである．この三通りの発見は独立になされたのである．命名という面から見ると，オイラーは何も名称を与えていない．ルジャンドルは「二つの異なる奇素数の間の相互法則」と呼び，ガウスは「平方剰余の理論における基本定理」と呼んだ．命題の形を見ると，オイラーとガウスは同一で，芽生えた土地はともに平方剰余の理論である．だが，ルジャンドルはそうではなく，ルジャンドルの相互法則の対象はあくまでも二つの異なる奇素数なのであり，しかもルジャンドルには二つの補充法則は附随していないのである．

証明という面から見ると，オイラーには証明の痕跡がなく，ルジャンドルは証明を試みて失敗し，ガウスは証明に成功した．論理的な観点から見ればオイラーとガウスの相互法則（便宜上の措置でこのように呼ぶが，オイラーもガウスもこのように呼んだのではない）とルジャンドルの相互法則は同等で，その同等性を示す命題は「オイラーの基準」と呼ばれている．普通，歴史叙述の物指しに採られているのは，このような「論理の立場」である．この場所に立てば，オイラーもルジャンドルもガウスもみな同じ法則を発見したことになり，第一発見者はオイラー，最初に証明を試みたのはルジャンドル，はじめて証明に成功したのはガウスというふうになる．

だが，論理の物指しを手にするのであれば，平方剰余相互法則の起源を求めてオイラー以前にさかのぼることも可能である．実際，$4n+1$ という形の素数は二つの平方数の和の形に表示されることが知られているが，これはフェルマが発見した命題であり，フェルマ自身により「直角三角形の基本定理」と呼ばれている．ところがこの命題は平方剰余相互法則の第一補充法則と論理上では同等なのであるから，平方剰余相互法則の形成史をフェルマから説き起こすことも可能である．ただし，フェルマは平方剰余相互法則の本体を発見したわけではないから，フェルマをもってこの法則の第一発見者とは言えないと思う．万事がこんなふうで，論理を基準に採ると，数学の諸理論，諸概念の起源はかえって茫漠として定めがたいという不思議な状況に遭遇するのである．

このような事態に逢着する根本の原因は，諸理論，諸概念が発生した環境が無視されてしまうところにあるのではないかと思う．論理を基準に採って強いて単一の起源を確定しようとするのは本当は意味がなく，いろいろな数学的環境に応じて，論理上では同一の命題や概念に複数の起源が存在すると見るほうが歴史の真相にかなっているのである．フェルマ，オイラー，ルジャンドル，ガウスはそれぞれ別個の，ひとりひとりに固有の思索の世界を構築し，別々の数学的状況のもとで，論理上同等の命題を発見したと見るのがよいのではある．しかも彼らは，わずかな言葉ではあるが，この間の実情を明かす言葉を具体的に書き留めている．それらを丹念に収集して綴りあわせれば，多少の言葉を書き添えるだけでおのずと数学史が叙述されるのではあるまいか．これが，「川の流れに沿う数学史」の叙述のアイデアである．

全体の骨格は次のようにしたいと考えている．

Ⅰ．　数論の系譜（その1　不定解析）
Ⅱ．　数論の系譜（その2　相互法則）
Ⅲ．　微積分の系譜（その1　関数概念の発生の前後）
Ⅳ．　微積分の系譜（その2　オイラー積分）
Ⅴ．　複素変数関数論（その1　楕円関数論）
Ⅵ．　複素変数関数論（その2　ヤコビの逆問題）
Ⅶ．　代数方程式論（その1　ラグランジュまで）

VIII.　代数方程式論（その2　ラグランジュ以降）

IX.　虚数乗法論

X.　多変数関数論

B　数学者たちの言葉

企画中の通史が実現すれば全部で10個の章になるが，各々の章について概略を書き留めておきたいと思う．

I．　数論の系譜（その1　不定解析）

不定解析はフェルマの「欄外ノート」に出ている48個の命題が基礎で，近代の整数論はこれらの命題に証明をつけようとする努力の中から生れたのである．担い手はオイラーとラグランジュとルジャンドルの三人であり，1798年になってルジャンドルの著作『数論のエッセイ』が刊行されて，全体像が描かれた．そこで，基礎文献はフェルマの「欄外ノート」，オイラーとラグランジュの数論の諸論文，それにルジャンドルの著作『数論のエッセイ』である．形成された理論の根幹をなすのは不定解析である．

II．　数論の系譜（その2　相互法則）

近代数論にはフェルマの「欄外ノート」とは別に，もうひとつの泉が存在する．それは相互法則の理論であり，ガウスの著作『整数論研究』（1801年）が最も重要な基礎文献である．ただし，既述のように平方剰余相互法則の第一発見者はガウスではなく，クロネッカーの考証によれば，オイラーである．初出はオイラーの論文

「素数による平方数の割り算に関するさまざまな観察」（1783年）

であり，ここにはガウスと同じ表現様式による平方剰余相互法則が記述されているうえ，ふたつの補充法則も伴っている．オイラーはこの定理に名前を与えているわけではないし，ガウスはこのオイラーの論文は知らなかった．平方剰余相互法則の証明を試みたのはルジャンドルだが，ルジャンドルもまたオイラーの発見を知らなかった．そこでオイラーとルジャンドル，オイラーとガウス，ルジャンドルとガウスの関係を

観察することが重要な論点になる．

ガウスには重要な文献が多い．ガウスは当初から高次冪剰余相互法則の存在を確信し，探索を続け，ガウス整数という名の複素数の範囲まで数域を拡大することにより発見に成功した．数学に複素数を導入する本質的な契機と思う．本質的契機はふたつある．もうひとつの契機は，楕円関数の変数の変域が複素数域に拡大されたことである．そのうえ，この両者の間は親密な関係で結ばれている．

数域の拡大を語るガウスの言葉を二つ拾いたいと思う．

ガウスの言葉（1）　数域の拡大（その1）

「・・・われわれは1805年からこのテーマに向けて心を傾け始めたが，そのときただちに，一般理論の真の泉はアリトメチカの**拡大された領域**の中に探し求められるべきであることを確信した．

すなわち，これまでに探求されてきた諸問題では，高等的アリトメチカは実整数だけの範囲内に限定されているが，すでに第一節において示唆したように，四次剰余に関する諸定理は，アリトメチカの領域が虚の量にまで拡張されて，$a+bi$ という形の数が制限なしにアリトメチカの対象となるようになってはじめて，最高の単純さと真実の美しさをもって光り輝くのである．ここで，i は習慣にしたがって虚量 $\sqrt{-1}$ を表す．また，a, b は $-\infty$ と ∞ の間のあらゆる不定整数を表している．われわれはこのような数のことを複素整数という名で呼びたいと思う．」（「四次剰余の理論　第二論文」より）

ガウスの言葉（2）　数域の拡大（その2）（上記の言葉に附された脚註）

「ここで通りすがりに，少なくとも，このようにして確立された数域は，わけても四次剰余の理論にとって相応しいものであるという事実に注意を喚起しておくのが時宜にかなっていると思う．それと同様に，三次剰余の理論は $a+bh$ という形の数の考察を土台として，その上に建設されるのが本来の姿である．ここで，h は方程式 $h^3-1=0$ の虚根，たとえば $h=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i$ である．また，同様に，高次冪剰余の理論のためには，他の虚量の導入が必要になるであろう．」（「四次剰余の理論　第二論文」より）

（註）　末尾で語られている予想はクンマーに継承されて実際に遂行された．

ガウスが提案した高次冪剰余相互法則の探究は継承者たちの手で実現されていった．はじめにヤコビの言葉を拾っておく．

ヤコビの言葉（1）　高次冪剰余の理論への言及

「『整数論』第7章においてガウス氏の手で提示された円周の等分に関する新し

い理論から出発して，わたしは三次剰余，四次剰余，それにいっそう高次の冪剰余の理論に関する基本定理へとわたしを導いてくれる，ひとつの方法を発見しました．」（1827年8月5日付のヤコビのルジャンドル宛書簡より）

ヤコビの言葉（2）　高次冪剰余の理論の展望

「これらの素数$f(\alpha)$の間で，5次，8次および12次の冪剰余の理論において，相互法則を探さなければならない．それらを帰納的観察のみを通じて見つけるのはおそらく可能であろう．しかる後に，もしそのような帰納的観察がそれほどやっかいなものでなければ，相互法則の真の形状が認識されるのである．わたしが以前，学士院に報告したノート[1]において二次，三次および四次の剰余に関して行ったのとまったく同様にして，相互法則を合成数にまで及ぼそうとするなら，円周等分の理論から即座に，一方の数が実数という特別な場合に対して，5次，8次，それに12次の冪に関する簡明な相互法則が導出される．新しい技巧を用いることにより，**同じ泉から，二つの複素数を対象にしていっそう一般的な諸定理を導くのは可能かどうか**という点の判断については，今後の研究を俟たなければならない．」（「5次，8次および12次の冪剰余の理論において考察するべき複素素数について」より）

註1）1837年の論文「円周等分とその数論への応用」を指す．

高次冪剰余相互法則の究明の方面でガウスを継承した人としては，ヤコビのほかにディリクレ，アイゼンシュタイン，クンマーが挙げられる．アイゼンシュタインは楕円関数と四次剰余相互法則の関連を明るみに出すことに成功した．これはガウスが『整数論研究』第7章で示唆した事柄である．アイゼンシュタインはなお歩を進め，高次冪剰余相互法則と密接に結ばれている関数を見つけようとしたが，これは失敗した．その失敗の痕跡を示す長篇が遺された．

クンマーはイデアルの理論を創り，高次冪剰余相互法則を書き下し，種の理論を基礎にして証明を試みて大きく前進したが，同時に種の理論による証明法の限界も明示した．その限界を乗り越える試みから，ヒルベルトの不分岐類体論のアイデアが生れた．次に挙げるのは，クンマーの長篇「素次数の冪の剰余と非剰余の間の一般相互法則について」から拾っ言葉である．

クンマーの言葉（1）　ヤコビの数論への言及

「1827年に，ヤコビは円周等分の理論を著しく簡易化して構成し，この理論の中に冪剰余相互法則の豊かな泉を発見した．その泉から，彼は，上に言及された平方剰余相互法則の証明のみならず，クレルレ誌2，66頁，において，彼の手で提出された三次剰余に関する諸定理をも導くことができたのである．」（言及されたヤコビの論文は「三次剰余に関するさまざまな究明」）

クンマーの言葉（2）　ディリクレの数論への言及

「上述のガウスの二論文（註．四次剰余相互法則に関する二論文）のうち，第一論文がまだ公にされず，その予告だけが前もってゲッチンゲン通報において公表されたとき，そこから知りうることはといえば，ある数がある与えられた素数の四次剰余であるかどうかという問題の解決は，ある種の二次形式，すなわち，法をその形に設定可能な二次形式の不定数の数値に依存するという状勢のみであった．その時点で，ディリクレ氏はクレルレの数学誌，巻3，35頁において四次剰余に関する論文（註．1828年の論文「ある種の四次式の素因子の研究」）を公表した．その論文の中で，彼は，まだ知られていなかった複素数に関するガウスの新原理を使用することができず，ただ二次形式と平方剰余の理論だけを使用して，四次剰余の理論の中に深く分け入っていった．しかし四次相互法則を発見することはできなかった．」

クンマーの言葉（3）　高次冪剰余の複素単数の理論

「ここで言及がなされた多様かつ明敏な方法，しかも二次，三次および四次剰余を対象とする場合にはまことに適切な方法はことごとくみな，より高次の相互法則の探究のためには全然適用することができない．あるいは，せいぜいのところ非常に限定された適用が許されるにすぎない．**その真の理由は，四次を越えるや否や，この法則の根柢をなす複素数を対象として生起するある特有の事情，すなわち，無限に多くの単数の存在にある**．複素素数は，それが剰余，非剰余のどちらなのかという点では，附随しうる単数として別のものを選ぶと，それに応じてまったく異なる特徴をもつ．まさしくそれゆえに，**もっとも簡明な相互法則というものは，これらの単数を整然たる秩序のもとに制御したとき，すなわち，取り扱うべき複素素数を当面の問題のためにもっとも適切な形に選定するときにはじめて提示される**のである．」

クンマーの言葉（4）　二段重ねの複素数

「わたしは当面の目的のために二段重ねになっている二つの複素数の理論を用いる．下層部をなす理論は方程式 $\alpha^{\lambda}=1$ の根のみを包含するものであり，わたしの先行する研究により既知とみなしてよい．上層部をなす理論は，このような1の λ 乗根のほかに，ある λ 次方程式の根を含んでいる．次に，この複素数の上層理論はさらに三つの相異なる階層に分かたれる．それらの相互関係は，原始目に対する導来目の関係と同一である．その関係は複素数の理論では固有の意味をもっている．すなわち，低階層では実在の整数としては表されず，実在の分数としての表示だけしか可能ではないある種の複素数，それゆえに理想

数とみなさなければならないことになる複素数が，高階層の中では実在の複素整数として表されるのである．」

クンマーの言葉 (5)　ガウスのアイデアの継承

「この，相互に積み重なりあうさまざまな複素数の理論の適用を根柢に据えるという考え．すなわち，通常の数に関する理論の中ではみいだすのが困難であるか，あるいは，おそらくまったく見つからないものを，正しく選定された複素数の理論の中で探さなければならないという考え．また，たとえ与えられなかったとしても，さらに歩を進めていっそう高いレベルの適切な理論を求めていくべきであり，そのようにして，提示された目標が達成されるまで歩みを止めないという考え．**このような考えは，複素整数の導入という元来のガウスの考えの簡単な帰結にすぎない**と見てさしつかえない．」

こんなふうにして数学を創った人たちの言葉を直接収集していけば，それだけでおのずと理論形成の道筋が浮かび上がってくる．クンマーに続いてヒルベルトの「数論報告」に及べば，ガウスに始まる数論の歴史は完結する．

III.　微積分の系譜（その1　関数概念の発生の前後）

無限小解析のはじまりをライプニッツの1684年の微分計算の第一論文から説き起こし，ヨハン・ベルヌーイの微積分講義録，マルキ・ド・ロピタルの著作『曲線の理解のための無限小解析入門　第一部』，オイラーの三部作，ラグランジュの著作『解析関数の理論』，コーシーの微積分講義録と歩を進め，フーリエによるフーリエ解析の提案にいたるあたりまでを，原典に依拠しながらたどりたいと思う．オイラーが提案した関数概念の変容過程がポイントになる．フーリエ解析では，フーリエ以降，ディリクレとリーマンが重要な位置を占める．

ヴァイエルシュトラスやデデキントなど，微積分の厳密化の経緯にも逢着するが，この道筋には深入りしない．

IV.　微積分の系譜（その2　オイラー積分）

ライプニッツは積分を微分の逆演算と見た．すなわち，基本定理そのものを積分と見ていた．基本定理の　発見」というのはあたらないと思う．「微分と積分を別個の概念と見て，互いに他の逆演算になるという事実に気づいた」のではない．ライプニッ

ツは「積分計算が微分計算に帰着されること」を発見したのである．曲線の弧長の計算法．面積の計算法．無限小の世界に移り，その世界においてピタゴラスの定理を適用する．それから有限の世界にもどる．そのプロセスを教えるのが積分計算である．面積についても同じ．ライプニッツの目には，微分と積分は同じ計算法のように映じたであろう．すなわち，ライプニッツは微分計算という単一の計算法を提示したのである．基本定理を「発見した」のではない．このあたりの記述が，微積分成立史の鍵になる．

積分計算とは微分方程式の解法を意味する言葉である．微分方程式の解法理論の充実をめざして，積分可能な微分式の範囲を増やそうとしたのがオイラー積分の動機である．オイラーは，円積分のようなかんたんな積分からはじめて，だんだんと複雑な積分に移ろうとした．この方向に進んでいくとアーベル積分の理論，すなわち代数関数論ができる．オイラー積分の究極の一般化は代数関数の積分である．それをアーベル積分という名で呼ぶ．アーベル積分を考えるのにリーマン積分はいらない．

イタリアの数学者ファニャーノはラグランジュの先輩にあたる人物である．数学論文集（全2巻）．ファニャーノはこれをオイラーのもとに送った．オイラーは目を通し，楕円型の微分方程式の代数的積分を求めることに成功した．これが，**楕円関数論の第一の誕生**である．

ファニャーノはいろいろな曲線の弧長の計算法を究明した．未知の曲線の弧長の計算を，既知の曲線の弧長の計算に帰着させる試みが，ファニャーノの楕円関数論研究の出発点である．ファニャーノにはレムニスケートの等分理論もあるが，これはオイラーには影響しなかった．等分理論を継承したのはガウスである．

微分方程式の解は関数ではなく，方程式である．積分計算は，無限小の世界から有限の世界にもどる道筋を教えてくれる．オイラーは楕円型の微分方程式の解法で壁にぶつかったが，それを乗り越える手がかりを教えてくれたのはファニャーノである．

V．　複素変数関数論（その1　楕円関数論）

一複素変数関数論のはじまりから説き起こす．複素変数関数論の初期の情景は謎に満ちている．二次方程式を解くころからすでに複素数の影はあったが，自覚的に認識される契機になったのは相互法則と楕円関数論である．

ライプニッツとヨハン・ベルヌーイの間に，負数と虚数の対数について論争があった．すなわち，複素関数論は無限小解析のはじまりとともにすでに歩み始めたのである．オイラーには負数の対数をめぐって種々の考察が見られる．オイラー以降，コーシーを経てルジャンドル，ヤコビの楕円関数論へと進んでいくと，数学への複素数の導入はますます不可避になっていく．

VI.　複素変数関数論（その2　ヤコビの逆問題）

ガウスの数学日記にはレムニスケート積分の等分理論を代表例として，楕円関数の等分理論の萌芽が書き留められている．ここに**楕円関数論の第二の誕生**が認められる．ファニャーノはレムニスケートの等分を試みて，これを楕円型の微分方程式の代数的積分の考察に帰着させた．ところがアーベルは曲線を離れ，第一種楕円積分の逆関数の等分を考え，ここにおいて主役は曲線から関数へと移行した．オイラーに淵源する関数概念は，アーベルにいたって主役を演じることになり，曲線はだんだん遠ざかっていく．

アーベルの楕円関数研究に出発点を与えたのはガウスの著作『整数論』である．ヤコビはルジャンドルの影響のもとで楕円関数論の研究を始めたが，次第に同時代のアーベルの研究に刺激を受けるようになった．ルジャンドルは楕円積分のことを楕円関数と呼んだが，これをくつがえし，楕円積分の逆関数に対して楕円関数の名を与えることを提案した．超楕円積分の考察の中から「ヤコビの逆問題」を取り出したところに，ヤコビの大きな寄与が認められる．この問題の解決をめぐってゲーペルとローゼンハインの貢献があり，さらにヴァイエルシュトラスとリーマンの手でアーベル積分の理論が作られた．一複素変数関数論の一般理論の基礎も整備された．

VII.　代数方程式論（その1　ラグランジュまで）

代数方程式論の系譜をたどると，イタリア学派から始まってチルンハウス，オイラーを経てラグランジュに到達する．ラグランジュの長篇「省察」は大半を歴史的回想に費やしている．

VIII.　代数方程式論（その2　ラグランジュ以降）

ガウスには代数方程式論のすべての萌芽がある．しかもいくつかの萌芽はガウスの段階ですでに相当に成長した．ガウスが断片的に書き残した言葉を手がかりにして，アーベルとガロアの理論ができた．アーベルには，「不可能の証明」や「アーベル方程式の発見」「すべての可解方程式を見つける問題の解決」が見られる．次に挙げるのはアーベルの遺稿「方程式の代数的解法について」の緒言の書き出しの言葉である．ここには代数方程式論におけるアーベルの思想のすべてが尽くされていて，よけいな解説はほとんど不要である．このような発言はアーベル全集の全体を観察しても多いとは言えないが，丹念に拾い集めれば，それだけでアーベルを語るには十分すぎるほ

どである.

アーベルの言葉　代数方程式論の究明の方針

「代数学のもっとも興味深い問題のひとつは，方程式の代数的解法の問題である．そうして，卓越した地位にあるほとんどすべての幾何学者たちがこのテーマを論じてきたという事実もまた認められるのである．四次方程式の根の一般的表示に到達するのには困難はなかった．そのような方程式を解くための首尾一貫した方法も見つかったし，しかもその方法は任意次数の方程式に対しても適用可能であるかのように思われた．しかしラグランジュや他の傑出した幾何学者たちのありとあらゆる努力にもかかわらず，［代数方程式の代数的解法の発見という］提示された目的に達することはできなかったのである．このような事態には，一般的な方程式の解法を代数的に遂行するのは不可能なのではないかと思わせるに足るものがあった．だが，それは決定不能な事柄である．なぜなら，その採用された方法により何らかの結論へと達しうるのは，方程式が可解である場合に限定されているからである．実際，はたして可能かどうかを知らないままに，永遠に探索を続けていけることになってしまうのである．それゆえ，このような仕方で確実に何らかの事物に到達しようとするには，他の道を歩まなければならない．**この問題に対して，それを解くことがつねに可能であるような形を与えなければならない**が，・・・」

ガロアの代数方程式論は，アーベルの理論とともに，さながらガウスの数学的思索から生れた双生児のようである．

IX.　虚数乗法論

虚数乗法論の源泉もまたガウスである．アーベルの論文「楕円関数研究」には虚数乗法論の具体的な萌芽が見られるが，アーベルはガウスの思索を継承したのである．アーベルはアーベル方程式の概念も発見した．

クロネッカーはガロアとアーベルの代数方程式論を省察し，アーベル方程式と楕円関数との間に見られる親密な関係を洞察し，「クロネッカーの青春の夢」と言われる問題を提示した．クロネッカーの言葉をつなげていくと，虚数乗法論がクロネッカーの数学的思索から生れた様子が手に取るようにわかる．理論形成の担い手の当の本人の言葉を聞くだけで十分なのであり，アーベルの遺稿の場合と事情は同じである．

クロネッカーの言葉（1）　アーベルとガロアの代数方程式論への言及

「素次数［既約］方程式の可解性に関するこれまでの研究－－－特にアーベルとガロアの研究．それらはこの領域において引き続き行われたすべての研究の土台をなすものである－－－は本質的に，ある与えられた方程式が［代数的に］解けるか否かを判定しうる二通りの基準を明らかにした．」（「代数的に解ける方程式について（第二論文）より」）

クロネッカーの言葉（2）　代数的可解性の真実の泉

「任意の可解方程式の諸根の間のこのような関係こそ，アーベルとガロアによって素次数可解方程式の根の特色として報告された性質，すなわち「どの根も，何かある二根の有理関数でなければならない」という性質の真実の泉である．」（「代数的に解ける方程式について（第二論文）より」）

クロネッカーの言葉（3）　整係数アーベル方程式と円周等分方程式

「どの整係数アーベル方程式の根も，1の冪根の有理関数の形に表される．」（「代数的に解ける方程式について（第二論文）より」）

クロネッカーの言葉（4）　「クロネッカーの青春の夢」

「その係数が $a+b\sqrt{-1}$ という形の複素数のみを含むようなアーベル方程式の根と，レムニスケートの分割にあたって現れる方程式の根の間にも，類似の関係が認められる．そうして究極的には，この結果をいっそう広範に，その係数が一定の代数的数に由来する非有理性を含むようなすべてのアーベル方程式にまで一般化することが可能である．」（「代数的に解ける方程式について（第二論文）より」）

クロネッカーの言葉（5）　クロネッカーに及ぼされたアーベルの影響

「アーベルの論文[1)]（アーベル全集[2)]，巻1，272頁[3)]）の中に，虚数乗法が生起する楕円関数のモジュールはすべて冪根を用いて書き表される，という所見がみいだされる．しかしアーベルがそのような特別の種類の楕円関数の，この注目すべき性質を発見するに至った方法についての示唆は欠如している．この発見が起こったのはまさしく論文「楕円関数研究」の起草の**後の**ことであったという事実は，この論文の中の一節（アーベル全集[4)]，248頁[5)]．またはクレルレの数学誌，巻3，182頁[6)]）から明らかになる．そこではなお，上に言及されたモジュールを定める方程式の可解性に対して疑念が表明されているのである．一番はじめに挙げたアーベルの所見に刺激され，わたしはその証明を見つけようとする意図をもって，この前の冬[7)]に，虚数乗法が生起する楕円関数の研究に打ち込んだ．そうしてそのおりに，わたしは探し求めていた証明のほかにもなお，多くの興味ある結果をみいだした．それらのうちのいくつかをここで手

短に報告したいと思う．」（「虚数乗法が生起する楕円関数」より）

註1）　「楕円関数の変換に関するある一般的問題の解決」（アーベル全集，巻1，403～428頁）

註2）　このアーベル全集はホルンボエが編纂した旧版（1839年）を指す．

註3）　シローとリーが編纂した「アーベル全集」（1881年）では第一巻，426頁．

註4）　ホルンボエが編纂した旧版のアーベル全集．

註5）　シローとリーが編纂した「アーベル全集」（1881年）では第一巻，383頁．

註6）　クレルレの数学誌，巻3，160～187頁，にはアーベルの論文「楕円関数研究」の後半の本文が掲載されている．

註7）　1856年の冬．

クロネッカーの言葉（6）　クロネッカーの青春の夢の表明

「わたしはすでに1857年の月報の455頁以下の場所で，楕円関数の特異モジュール，もしくは特異モジュールをもち，しかもその変数は周期に対して有理比をもつという性質を備えた楕円関数それ自身を根とする方程式の性質を説明した．上の箇所で詳述した事柄によれば，これらの方程式を手短にアーベル方程式－－－その係数には，整数の平方根のほかにはいかなる非有理量も含まれていない－－－と呼んでさしつかえない．そうしてそのような方程式の全体は，楕円関数の理論に由来する方程式で汲み尽くされると予想しなければならない．」（「アーベル方程式について」より）

クロネッカーの言葉（7）　「青春の夢」という言葉の初出

「この数カ月間，わたしはある研究に立ち返って鋭意心を傾けてきました．この研究が終結に至るまでには依然として多くの困難が行く手に立ちはだかっていたのですが，今では最後の困難を克服したと信じます．そのことをあなたにお知らせするよい機会と思います．それは**わたしの最愛の青春の夢**のことです．詳しく申し上げますと，整係数アーベル方程式が円周等分方程式で汲み尽くされるのと同様に，有理数の平方根を伴うアーベル方程式は特異モジュールをもつ楕円関数の変換方程式で汲み尽くされるという事実の証明のことなのです．」（1880年3月15日付のクロネッカーのデデキント宛書簡より）

クロネッカーの言葉（8）　「青春の夢」の解決のプログラム

「わたしは先ほど申し上げた定理[1]の証明を長い間おぼろげに心に描いて探し求めてきたのですが，そのためにはなお，特異モジュールに対するあの注目するべき方程式の本性に向けて，あるまったく別の－－－そのように申し上げてよろしいかと思います－－－哲学的洞察がわたしにとって不可欠でした．その哲学的洞察の力をもって，このような方程式はなぜ－－－クンマーの表記法（わ

たしはそれを1857年にも報告[2]の中で使用しました）によりますと－－－ $a+b\sqrt{-D}$ に対する理想数をもたらすのかという，そのわけが明らかにされなければなりませんでした．」（1880年3月15日付のクロネッカーのデデキント宛書簡より）

1）　「青春の夢」を指す．

2）　「虚数乗法が生起する楕円関数」を指す．

クロネッカーの言葉（9）　特異モジュール

「・・・はじめて楕円関数の特異モジュールの研究に打ち込んでいたころ，わたしはそのときすでに，この［随伴種の究明という］問題の重要性に気づいていた．」（「代数的量のアリトメチカ的量の概要」より）

クロネッカーの言葉（10）　楕円関数の虚数乗法

「楕円関数の虚数乗法の研究に専念していたころ（1856年冬），負整数の平方根の種に随伴する代数的数の種が，指示された通りの仕方でわたしの眼前に現れたとき，それはまったく新しい，驚くべき，そうして興味ある現象であった．種 $\sqrt{-n}$ に附随するこのような種 Γ は，わたしがすでに1857年10月の月報に印刷された報告[1]において強調しておいたように，クンマーのめいめいにならうならば，種 $\sqrt{-n}$ のすべての理想因子を供給する．種 Γ の位数は種 $\sqrt{-n}$ の類数に等しい．そうして一般に，種 $\sqrt{-n}$ の合成および類の分配に関する深い諸性質はすべて，随伴種 Γ の初等的な諸性質の中に，いわばコピーをもっているのである．この例に教えられて，わたしは複素数に関するわたしの諸論文を，この問題を解決して真に完成することが可能となる日までは発表するべきではないと思った．まさにそれゆえに，わたしはクンマーの言葉の引用の中で言及されている論文の発表も，その当時はさしひかえたのである．しかし，最近になって，詳しく言うと前年のはじめに，**種 $\sqrt{-n}$ に随伴する種の性質のアプリオリな認識，すなわち解析的な起源に依存しない把握の様式**に到達し，それと同時にこのような種類の随伴に関する一般的な問題の研究のための視点を獲得したとき，わたしは今や，他の方法の吟味も踏まえたうえで（序文参照），代数的な量と数を取り扱うわたしの方法をここで早々に書き表わしておこうと決意した．」（「代数的量のアリトメチカ的量の概要」より）

註1）　「虚数乗法が生起する楕円関数」を指す．

クロネッカーの言葉（11）　アーベル方程式の構成問題

「代数的および数論的研究に関する同時代の仕事に導かれて，わたしはすでに早い時期から，代数学のアリトメチカ的側面を特別に注視しなければならないという見解に達していた．そこでアーベル方程式の根から形成される複素数の

研究は，ある有理域におけるすべてのアーベル方程式の構成という，代数的－アリトメチカ的問題へとわたしを導いたのである．」（「代数的量のアリトメチカ的量の概要」より）

クロネッカーの言葉（12）　特異モジュールと冪剰余の理論

「すでに非常に早い時期に，オイラーは，ある定まった判別式Dをもつ二次形式の素因子はある一定の一次式$mD+\alpha$に包含されるという観察を行っていたが，1783年になってはじめて，彼はこの数論にとってきわめて豊饒な観察を注目すべき様式で定式化した．相互法則という呼称は，その由来をこの定式化の様式に負っているのである．その際に－－正当にも－－つねに特別に重視されていた相互関係の美しさのあまり，そとき以来，元来のオイラーの観察の意味と目的はかなり背景にしりぞいてしまった．ところが，近ごろ，**特異モジュールのアリトメチカ的理論の，複素数の冪剰余への応用**にあたって，わたしはある特異な新しい現象に直面したが，それは即座に，オイラーが二次相互法則の本質的内容を公に語った，あの最初の言い回しを想起させるのである．そうして冪剰余の理論におけるこの現象は，単にこの理論の歴史的出発点との類似性によりそのような回想に誘われるという点においてばかりではなく，この理論の展開の途次，新しい段階へと向かうためのヒントを通じて先行きを展望するという点から見ても，特に興味深いものである．そこでわたしは本日，学士院にこの現象をめぐって手短な報告を行いたいと思う．」（「ある種の複素数の冪剰余について」より）

註1）　オイラーの論文「素数による平方数の割り算に関するさまざまな観察」（オイラー全集Ｉ－3，497～512頁）を指す．この論文には平方剰余相互法則が出ている．

クロネッカーの言葉（13）　クンマーの研究では除外された場合

「・・・そうして冪剰余の理論のいっそう進んだ展開に向けての明確な指示を，クンマーの研究では除外された場合に対しても含んでいるのは，まさにこの状勢なのである．」（「ある種の複素数の冪剰余について」より）

長い引用になったが，こんなふうにして「数学者の言葉」を並べていけば，おのずと数学史が成立することを示したいと思い，クロネッカーに範例を求めたのである．言葉と言葉をつなぐ説明や，クロネッカーを取り巻いていた数学的環境を説明を補う作業はもとより不可欠である．

クロネッカーとクンマーを踏まえてヒルベルトに目を移し，まず「数論報告」を読み，それから類体論のアイデアが表明されたいくつかの論文を読めば，虚数乗法論へと向かうヒルベルトの思索の痕跡はたちどころに見つかるであろう．

X.　多変数関数論

多変数関数論のはじまりは「ヤコビの逆問題」と「ヒルベルトの第12問題」である．すなわち，二つの起源が存在する．ヤコビの手でヤコビの逆問題が定式化されたとき，すでに「２複素変数の4重周期をもつ2価解析関数」が認識された．ヤコビの逆問題の解決に向けてなされた研究の歴史を顧みると，最後の段階で多変数関数論に固有の諸問題が発生した．これをひとことで言うと，多変数関数論はヤコビの逆問題そのものの中から生れたのである．アーベルの「パリの論文」とヤコビを経てヴァイエルシュトラスに移ると，アーベル関数の理論との関連のもとで，「有理型関数の存在領域は任意である」というまちがった発言の記録に出会う．E.E.レビはこのヴァイエルシュトラスの言葉を引用して，はっきりと疑念を表明した．多変数関数論はこのあたりから具体的に一般理論への道が開かれていくのである．リーマン，ポアンカレ，クザンとたどり，ヒルベルトにいたると，「ヒルベルトの第12問題」の表明の中で「多変数解析関数論」という言葉に出会う．この道はジュラー関数に関するヒルベルトのノート，それを受け取ったブルメンタール，もうひとつのモジュラー関数を考案したジーゲルへと続いていく．

一般理論はハルトークス，E.E.レビ，ジュリアを経てベンケとトゥルレンの著作『多複素変数関数の理論』にいたり，岡潔の論文集へと手が届いていく．ここに名前を挙げた数学者たちはそれぞれみな，多かれ少なかれ多変数関数論研究の意図を語っている．

C　数学の歴史的考察について

数学を創った人たち自身の語る数学史叙述が完結したなら，それを踏まえて，数学史の成立をめぐってさまざまに考察を加えたい．ぼくらが数学という学問に向かうとき，共鳴の対象は「理論」それ自体ではなく，理論形成にあたった「人」なのではないかと思う．

たとえば微積分形成の担い手を顧みると，ニュートンはひとまず措くと，ライプニッツ，ベルヌーイ兄弟（ヤコブとヨハン），オイラーが挙げられる．これで4人である．オイラー以降に目を向けると，ラグランジュ，コーシー，フーリエ，ディリクレ，ヴァイエルシュトラス，デデキントあたりまで進み，これで6人である．全部で10人ほどにしかすぎないばかりか，個人的交友も密接であった．初期の近代数論（不定解析）の担い手を見ると，フェルマ，オイラー，ラグランジュ，ルジャンドルと続き，およそ150年の間にわずかに4人を数えるにすぎない．第二期の数論（相互法則）では，ガウス，ヤコビ，アイゼンシュタイン，ディリクレ，クンマー，クロネッカー，ヒルベ

ルトと継承されていくが，19世紀全体を通じてこれで7人である．しかも人と人とのつながりが非常に密接である．微積分も二つの数論も，理論だけが抽象的に浮遊するのではなく，ごくわずかな人々の間で交わされた有形無形の対話の中から生れたように見えるのである．他の諸理論，諸概念についても，同様の事情が観察される．

「人」を離れた場において数学という学問を考察する場合にも，数学を抽象的に把握しようとする試みは形式に流れやすいのではないかと思う．どのような理論も概念も法則も，数学的自然における具体的な諸現象とそのつどペアを作って理解するようにしなければならない．そのようにしないと数学と数学史は空洞化してしまうからである．一例としてガウス以降の相互法則の生い立ちを見ると，平方剰余相互法則から高次冪剰余相互法則へと移り，完全な証明を可能にするために類体論が創られて決着した．では，相互法則そのものと類体論それ自体とではどちらが重いのであろうか．もうひとつの例として代数方程式論を見ると，「不可能の証明」の探究の試みの中からガロア理論が生れたが，それでは「不可能の証明」とガロア理論それ自体とでは，どちらがより重い意味をもつのであろうか．類体論やガロア理論そのものを重視して，相互法則を類体論形成のための方便のように思い，「不可能の証明」をガロア理論が誕生するための方便のように見ることも観念上では可能である．だが，理論形成の根幹をなす契機は相互法則や「不可能の証明」のような具体的な事象にあったのであり，理論形成の担い手たちもそこに関心を寄せていたのである．ぼくらの心を打つのは抽象理論の構成様式ではなく，具体的な数学的諸事象と，それらの解明に専念した「数学を創った人々」の思索の姿なのである．その模様を原典に即して具体的に叙述したいというのが，通史叙述に寄せる現在の念願である．

【平成18年（2006年）1月31日（水）】