Frobenius による「群の指標と表現」の研究（その２）

平井　武 (Kyoto)
hirai.takeshi@math.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

2003 年 10 月の数学史シンポジウムにおいて，Frobenius の群の指標および表現に関する研究の発端から Schur との共著論文に到る軌跡について大まかに報告した [平井 2]．2004 年 10 月の同シンポジュウムでは，シュアーの学位論文を主として，彼の対称群の指標の研究について報告した [平井 3]．2004 年 10 月の同シンポジュウムでは，あらためて Frobenius の論文について彼の全集第 3 巻所載の「群の指標および表現」に関する論文を，すべてリストアップし，順を追って読んでみて，どこまで読み込めるかを調べ，その数学的内容等との関連に於いて，感想等を報告する積もりになった．しかし，始めて見るとすぐに，その計画がおそろしく無謀なものであることが分かった．そこで，順番に論文を詳しく読んでその検討を始めた．このときには，群の線形表現導入以前の最初期の論文 **53**, **54** をかなり詳しく報告し，最初に線形表現を導入した **56** までを報告文にまとめた [平井 4]．その続きの論文は **57** から **61** が一区切り（太文字の論文番号は全集に従う）なので，今回は出来ればそこまでを読んで報告したいと思ったが，各論文の内容は濃くてそう簡単にはいかなかった．**57**, **58** をシンポジュウムで報告し，その後 **60** の書面報告を追加した．通り一遍のサーベイでは論文の面白さが逃げて行ってしまうので重点的に詳しく書いた部分もある．

Frobenius の有限群の指標および線形表現に関する論文は，すべて Frobenius 全集 Band III にあるが，それらの論文は，最終頁にリストアップしてある．論文番号と年代は以下の通り： **53**(1896), **54**(1896), **56**(1897), **57**(1898), **58**(1899), **59**(1899), **60**(1900), **61**(1901); **68**(1903), **69**(1903), **72**(1903), **73**(1904); With I. Schur, **75**(1906), **76**(1906);　単著 **78**(1907).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

57. Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaftten zu Berlin, 501–515(1898).

序文 (pp.104-104): 有限群の指標，ついでその既約表現（primitive Darstellung durch lineare Substitutionen）を求めるには，論文 **53** で与えた一般的方法だけでは足りない．私は，特別な場合に適用される，２つの全く異なる方法を発見した．

その第1は，与えられた群 $\mathfrak{H}$ が部分群 $\mathfrak{G}$ を含んでいる場合で，
① (§1) $\mathfrak{H}$ の群行列式の既約因子（Primfactor）から， $\mathfrak{G}$ のそれを導く方法
（注： 表現から見ると，現代用語で，$\mathfrak{H}$ から， $\mathfrak{G}$ への制限 $\mathrm{Res}^{\mathfrak{H}}_{\mathfrak{G}}$）．
② (§3) その逆の方向の方法，である．
（注： 表現から見ると，現代用語で，$\mathfrak{G}$ から， $\mathfrak{H}$ への誘導 $\mathrm{Ind}^{\mathfrak{H}}_{\mathfrak{G}}$）．
とくに， $\mathfrak{G}$ が $\mathfrak{H}$ の正規部分群であるときに，簡単な結果を得る．(それぞれ §2, §4)

その第2は，指標の積（Composition der Charaktere）によって新しい指標を得る方法（注： 表現から見ると，テンソル積）であるが，この理論は別の論文で展開する（論文 58）．

§1 (pp.105-108): 場合①：$h = |\mathfrak{H}|$, $g = |\mathfrak{G}|, n = h/g$, とおく．

$$\Theta = \prod\nolimits_\lambda {\Phi_\lambda}^{f_\lambda}, \qquad H = \prod\nolimits_\kappa \Psi_\kappa^{e_\kappa},$$

をそれぞれの群行列式の既約分解とする．

$x_R = 0\ (R \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{G})$ と置けば，

$$\Theta = H^n, \qquad \Phi_\lambda = \prod\nolimits_\kappa \Psi_\kappa^{r_{\kappa\lambda}}$$

である．x_E を $x_E + u$ で置き換えて，$u^{f_\lambda - 1}$ の係数を比較して，

$$(3) \qquad \sum\nolimits_\kappa r_{\kappa\lambda}\psi^{(\kappa)}(P) = \chi^{(\lambda)}(P) \quad (P \in \mathfrak{G})$$

である．$\mathfrak{G}$ の指標の直交関係式を使えば，

$$(4) \qquad \sum\nolimits_\kappa \psi^{(\kappa)}(P^{-1})\chi^{(\lambda)}(P) = g\, r_{\kappa\lambda} \quad (P \in \mathfrak{G}).$$

$$(5) \qquad \sum\nolimits_\lambda r_{\kappa\lambda}\chi^{(\lambda)}(R) = \frac{h}{gh_\rho}\sum\nolimits_{P\in\mathfrak{G}\cap\rho} \psi^{(\kappa)}(P) \quad (R \in \rho \subset \mathfrak{H}, P \sim R \ (\text{in } \mathfrak{H})).$$

$$(6) \qquad \sum\nolimits_\kappa r_{\kappa\lambda}e_\kappa = f_\lambda, \qquad \sum\nolimits_\lambda r_{\kappa\lambda}f_\lambda = \frac{h}{g}\,e_\kappa\,,$$

$$(9) \qquad \sum\nolimits_\rho g_\rho\chi_\rho^{(\lambda)} = g\, r_{0\lambda}, \qquad \sum\nolimits_\lambda r_{0\lambda}\chi_\rho^{(\lambda)} = \frac{hg_\rho}{gh_\rho}.$$

§2 (pp.109-110): とくに，$\mathfrak{G}$ が $\mathfrak{H}$ の正規部分群（invariante Untergruppe）であるときを取り扱う．

注意：すでに，指標の最初の論文 **53** の §7 (5) 式で，正規部分群 $\mathfrak{G}$ の指標 χ を centralize する形で

$$\frac{f}{f'}\chi'(R) := \frac{1}{|\mathfrak{G}|}\sum\nolimits_{U\in\mathfrak{G}} \chi(U^{-1}RU) \qquad (R \in \mathfrak{G})$$

を定義して，χ' を **relativen Charaktere von $\mathfrak{G}$ in Bezug auf $\mathfrak{H}$** と名付けて，既約指標への分解を論じている．このときには，群の線形表現の概念はまだ出てきていないが，実質上は，誘導表現の指標の $\mathfrak{G}$ 上の値（$\mathfrak{G}$ が正規なので $\mathfrak{G}$ 上にしか値がないが）を議論していることになる．

§3 (pp.110-112): 場合②：群行列・群行列式を使って議論するので，結構ややこしい．しかし，ここでは，部分群 $\mathfrak{G}$ の（行列）表現 $P \to (P)$ から，具体的に $\mathfrak{H}$ の誘導表現を作っている．それの trace の計算を用いて，$\mathfrak{G}$ の既約指標を $\mathfrak{H}$ に誘導したときの既約成分の話をしている．

そして，既約成分の重複度を勘定して，いわゆる，フロベニウスの reciprocity を得ている．これは，現代風に書くと，

“$\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ の既約表現を π, τ とすると，重複度について，$[\mathrm{Ind}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}}\,\pi : \tau] = [\mathrm{Res}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}}\,\tau : \pi]$.”

誘導表現の構成法: 現代の方法とは異なり，また姿・形も違っていて実に面白い．$P \to (P)$ を部分群 $\mathfrak{G}$ の e-次元の表現とする．独立変数 x_P ($P \in \mathfrak{G}$) を用いた行列 $X := \sum_{P\in\mathfrak{G}}(P)x_P$ を eine zur $\mathfrak{G}$ gehörige Matrix des Grades e とよぶ．x_P を y_P, z_P で置き換えて，Y, Z を作る．z_P に関係式

$$z_Q = \sum\nolimits_{P\in\mathfrak{G}} x_{P^{-1}}\, y_{PQ} \qquad (Q \in \mathfrak{G}),$$

を入れると，$Z = XY$ となり，これが，関係式 $(PQ) = (P)(Q)$ を表す．今後表現の記号があった方が分かりやすいので $\pi(P) = (P)$ とも書く．$\tau := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}}\,\pi$ とおく．$\widetilde{X} := \sum_{T\in\mathfrak{H}} \tau(T)x_T$ の作り方を与える（変数の個数は増えている）．$A, B \in \mathfrak{H}$ に対し，X で x_P を $x_{APB^{-1}}$ に置き換えた行列を $X_{A,B}$ とかく．$\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ の代表元系 $\Omega = \{A, B, \ldots\}$ をとって，$X_{A,B}$ を格子の位置 $(A,B), A, B \in \Omega$, に置いたブロック型行列を $\widetilde{X}$ とおく．$|\mathfrak{H}/\mathfrak{G}| = n$ ならば，$\widetilde{X}$ は ne-次である．$\widetilde{X}$ での変数 x_T を y_T, z_T で置き換えて，$\widetilde{Y}, \widetilde{Z}$ を作る．積 $\widetilde{X}\widetilde{Y}$ での (A,N)-ブロックと (N,B)-ブロックとの積 $X_{A,N}Y_{N,B}$ は，$(P^{-1})(PQ) = (Q)$ により，

$$\sum\nolimits_Q (Q)\Big\{\sum\nolimits_P x_{AP^{-1}N^{-1}}y_{NPQB^{-1}}\Big\}$$

を生ぜしめる．$\widetilde{X}\widetilde{Y}$ の (A,B)-ブロックは，$\sum_N X_{A,N}Y_{N,B}$ であるから，上の和をさらに，$N \in \Omega$ に渡って加えることになる．すると，変数 z_S に関係式

$$z_S = \sum\nolimits_{R\in\mathfrak{H}} x_{R^{-1}}y_{RS} \qquad (S \in \mathfrak{H}),$$

を入れれば，$\sum_N X_{A,N}Y_{N,B} = Z_{A,B}$ となり，表現の関係式 $\widetilde{X}\widetilde{Y} = \widetilde{Z}$ を得る．すなわち，$\widetilde{Z} = \sum_{T\in\mathfrak{H}} \tau(T)x_T$ と書けば，$T \to \tau(T)$ が行列表現を与える．これが，現代でいう $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}}\,\pi$ の実現に他ならない．これを現代風に証明してみよう．

現代風証明： 表現 π の表現空間を $V(\pi)$，$\tau = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}}\pi$ の表現空間を $V(\tau)$ と書く．$V(\tau)$ は，$\mathfrak{H}$ 上の $V(\pi)$-値関数 $f(S)$ で，

$$f(SP) = \pi(P)^{-1}f(S) \qquad (S \in \mathfrak{H}, P \in \mathfrak{G}),$$

を満たすものの全体に，内積 $\sum_{A\in\mathfrak{H}/\mathfrak{G}}\|f(A)\|^2$ を入れたものである．ここに，A は $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ の代表元系を動く．そして，$T \in \mathfrak{H}$ に対して，表現作用素 $\tau(T)$ は次で与えられる：

$$(\tau(T)f)(S) = f(T^{-1}S) \qquad (S \in \mathfrak{H}).$$

$f \in V(\tau)$ に対して，$\Gamma(f) := (f(A))_{A\in\Omega} \in \sum_{A\in\Omega}^{\oplus}V(\pi)_A$, $V(\pi)_A = V(\pi)$, を対応させれば，Hilbert 空間の同型 Γ を得る．$f' = \Gamma(\tau(T)f)$ とおくと，$A \in \Omega$ に対して，$T^{-1}A = BP^{-1}$ とすれば，

$$f'(A) = f(T^{-1}A) = f(BP^{-1}) = \pi(P)f(B).$$

これは，ブロック $X_{A,B} = \sum_{P\in\mathfrak{G}}\pi(P)x_{APB^{-1}}$ において，$x_{APB^{-1}} = x_T$ として得られる関係式 $APB^{-1} = T \quad \therefore T^{-1}A = BP^{-1}$ に丁度適合している．(証明終わり)

§4 (pp.112-115): $\mathfrak{G}$ が $\mathfrak{H}$ の正規部分群のときを取り扱う．とくに，商群 $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ の指標と $\mathfrak{H}$ の指標との関係を論ずる．

(**注：** 指標を線形表現の trace だと捉えると，ここでの証明は簡単になる.)

§5 (pp.115-118): $\mathfrak{H}$ を 2 つの部分群 $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$ について，左-，右-module と捉えたときに，*Doppelmodul* というようである．その定義等については，次の論文を引用している．

36. Über die Congruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul, J. für die reine und angewante Mathematik, **101**(1887), 273-299.

ここでは $\mathfrak{H}$ を Doppelmodul と考えて，とくに $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$ の場合を取り扱っている．$h = |\mathfrak{H}|, g = |\mathfrak{G}|$ とし，ρ を $\mathfrak{H}$ の共役類として，$h_\rho = |\rho|, g_\rho = |\rho \cap \mathfrak{G}|$ とする．類関数

$$\chi : \rho \to \chi_\rho = \frac{hg_\rho}{gh_\rho} - 1$$

につき，次の命題が証明されている．ここでの証明は簡単ではない.(**注：** 現代的には，誘導表現 $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}}\mathbf{1}_{\mathfrak{G}}$ が，$\mathbf{1}_{\mathfrak{H}} \oplus \tau_\chi$, τ_χ 既約，となるための条件であるから，intertwining operators の理論から分かる.)

類関数 χ_ρ が（既約）指標であるための必要十分条件は，$\mathfrak{H}$ が $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$-Doppelmodul として2個に分かれることである．（注：すなわち，$\mathfrak{H}$ が $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ に2重加遷に働くことである.）

53 での $PGL(2, \boldsymbol{Z}_p)$ の具体的な指標計算において，p-次元の（表現の）指標が与えられているが，それがこの場合である，と注意している．実際，$\mathfrak{H} = GL(2, \boldsymbol{Z}_p)$, $\mathfrak{G}$ = 上三角行列全体, とすれば，$\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ は射影空間 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z}_p)$ であり，$\mathfrak{H}$ は2重加遷に働く．

57 全体に対する私の感想： 指標（**53**，**54** の定義では既約指標）は最初，群行列式の Primfactor を用いて定義された．**56** で初めて線形表現を定義して，その trace として，指標が得られることを示して，理論を再構成した．しかしこの **57** では，上記の2種類の定義を場面によって使い分けて，結果を出している．しかも，Frobenius 自身の次の重要なコメントが §5 の頭にある．

"**（現代風に言えば，$\left(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}}\,\mathbf{1}_{\mathfrak{G}}\right)\ominus \mathbf{1}_{\mathfrak{H}}$ の指標 χ を既約指標 $\chi^{(\lambda)}$ で書く）公式**

$$\sum_\lambda r_\lambda \chi_\rho^{(\lambda)} = \frac{hg_\rho}{gh_\rho} - 1\ (=: \chi_\rho) \quad (r_\lambda \text{ は } \chi^{(\lambda)} \text{ の重複度}, \rho \text{ は } \mathfrak{H} \text{ の共役類}) \qquad (1)$$

$\Big($注：$\left[\left(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}}\,\mathbf{1}_{\mathfrak{G}}\right) : \mathbf{1}_{\mathfrak{H}}\right] = 1$ である$\Big)$ を用いて，n-次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の指標を全て決定できる"

しかし，実際に，書かれたのは，**60**(1900) である．正確を期すために，Frobenius の原文を記載しておこう： Mit Hülfe der letzteren Formel (実質は，§1, (5) と上記 (1)) ist es mir, wie ich bei einer anderen Gelegenheit darlegen will, gelungen, die Charaktere der symmtrischen Gruppe des Gerades n allgemein zu bestimmen.

（この報告での**規約**として，**数式の左にある番号は原論文での番号であり，式の右に付ける番号は原論文の番号ではない．**）

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

58. Über die Composition der Charaktere einer Gruppe, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 330–339(1899).

序文 (pp.119-119): ここで定義する係数 $f_{\kappa\lambda\mu}$ は **53** で定義した $h_{\alpha\beta\gamma}$ と類似の性質を持つ．係数 $f_{\kappa\lambda\mu}$ の意味を調べる．

§1 (pp.119-122): 群行列式の Primfactor $\Phi_\kappa, \Phi_\lambda$ に対する指標を $\chi^{(\kappa)}, \chi^{(\lambda)}$ として，対応する線形表現を $A \to (a), A \to (a')$ とし，指標の積 $\chi^{(\kappa)}\chi^{(\lambda)}$ に対応する表現を $A \to (A)$ とする.（**注：** これは先の2つの表現のテンソル積に当たる）

（表現に対する記号がまだ発明されていないので，ここでの説明や記号の取り方が面白い）．

対応する行列 $(A)x_A+(B)x_B+(C)x_C+\cdots$ の行列式は次の形に分解される：$\prod_\mu \Phi_{\mu'}^{f_{\kappa\lambda\mu}}$. ここに $\Phi_{\mu'}=\overline{\Phi_\mu}$.

$$\chi_\rho^{(\kappa)}\chi_\rho^{(\lambda)}=\sum_\mu f_{\kappa\lambda\mu'}\chi_\rho^{(\mu)}$$ （**注**：テンソル積表現の既約分解に当たる），

$$hf_{\kappa\lambda\mu}=\sum_\rho h_\rho\chi_\rho^{(\kappa)}\chi_\rho^{(\lambda)}\chi_\rho^{(\mu)}$$ （**注**：既約分解の重複度の公式），

$$f_{\kappa_0\lambda_0\mu_0}=f_{\kappa\lambda\mu}$$ (勝手な添字の置換).

さらに，$f_{\kappa\lambda\mu}$ および $f_{\kappa\lambda\mu\nu}:=\sum_\rho f_{\kappa\lambda\rho'}f_{\rho\mu\nu}$ の性質を議論.

§2 (pp.122-124): 指標は，対応する既約表現の表現行列の対角要素の和であるが，その対角要素がどんな多項式の根であるか，を議論している.（**注**：表現がどの拡大体上で実現できるかに関連？）

§3 (pp.125-125): 対称群 $\mathfrak{S}_6$ と交代群 $\mathfrak{A}_6$ の指標の計算. 部分群 $\mathfrak{G}$ の自明表現 $\mathbf{1}_\mathfrak{G}$ の誘導表現の指標に関する公式（[**57**, §5] 参照，とくに上記の (1) 式）を使う.

$\mathfrak{S}_6$ について，指標は $\chi^{(0)}$ から $\chi^{(10)}$ までであるが，指標 $\chi^{(6)}$ の計算には，部分群 $\mathfrak{G}$ として，部分集合 $\{1,2,3\},\{4,5,6\}$ を不変にする位数 $(3!)^2 2!=72$ のものを使う.

$\chi^{(4)},\chi^{(2)}$ の計算には，3 重可遷群で $\mathfrak{S}_5$ と同型なものを使う.

$\mathfrak{S}_6$, $\mathfrak{A}_6$ の指標表が与えられている（Frobenius の用語では，**指標**とは既約指標のこと）.

§4 (pp.125-128): $\mathfrak{A}_4,\mathfrak{S}_4,\mathfrak{A}_5$ の指標表（[**53**, §8]）を使った，これらの群の binären Gruppe の指標の計算，また [**56**, §4] の（指標を表現の trace として与える）公式を binäre lineare Substitutionen に使った計算（**注**：指標は **53** で線形表現とは関係なくまず代数的に定義された），などによって得られた binären Gruppe の完全な指標表.

疑問 58.1： binären Gruppe を $\mathfrak{H}$ とすると，位数 2 の中心 $\mathfrak{Z}$ があり，$\dfrac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{Z}}$ がそれぞれ $\mathfrak{A}_4,\mathfrak{S}_4,\mathfrak{A}_5$ と同型になるので，前者は後者の $\boldsymbol{Z}_2$ による中心拡大である. 後者は，正四面体，正六面体，正二十面体の運動群であるが，それに空間の反転の分も添加した群を $\mathfrak{H}'$ とすると，その中心は $\{\mathbf{1}\},\boldsymbol{Z}_2,\boldsymbol{Z}_2$ であるが，$\mathfrak{H}'$ は binären Gruppe $\mathfrak{H}$ とは別物か？ 与えられている指標表から逆算すると，交換子群での商群はそれぞれ $\dfrac{\mathfrak{H}}{[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]}\cong\boldsymbol{Z}_3,\boldsymbol{Z}_2,\{\mathbf{1}\}$ である.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

59. *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen II*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenfchaften zu Berlin, 482–500(1899).

今回は割愛する.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

60. *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichle der Königlich Preußifchen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 516–534(1900).

序文 はとくに無し.

§1 (pp.148-150): $\mathfrak{H}$ を n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ とする. その位数は $h = n!$ である. その共役類は, $R \in \mathfrak{H}$ にどの長さの巡回置換が何個入っているかによって決まるので, 共役類の個数 k は n の分割

$$n \;=\; \alpha + 2\beta + 3\gamma + \cdots, \tag{2}$$

の個数である. この分割で決まる共役類を (ρ) と書くと, その位数は,

$$h_\rho = \frac{n!}{1^\alpha \alpha!\, 2^\beta \beta!\, 3^\gamma \gamma!\, \cdots}. \tag{3}$$

ρ を数字に対応づけて $\rho = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ とし, $\rho = 0$ は単位元よりなる共役類とする. $\mathfrak{H}$ の Charakter（既約指標）は k 個あるので, $\kappa\ (0 \le \kappa \le k-1)$ で番号づけて $\chi^{(\kappa)}$ と書き, それの共役類 ρ での値を $\chi^{(\kappa)}_\rho$ と書く.

n の分割 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m\ (n_i > 0)$ に対応して, $\mathfrak{H}$ の部分群 $\mathfrak{G}$ を定義する：n 文字のはじめの n_1 個を不変にし, 次の n_2 個を不変にし, ・・・・. この $\mathfrak{G}$ の位数は,

$$g = n_1!\, n_2! \,\cdots\, n_m!. \qquad (\text{注}: \mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \cdots \times \mathfrak{G}_m,\ \mathfrak{G}_i \cong \mathfrak{S}_{n_i}). \tag{4}$$

$R \in \mathfrak{G}$ は, $R = R_1 R_2 \cdots R_m, R_i \in \mathfrak{G}_i$, と分解するが, $R_i\ (1 \le i \le m)$ の型が, n_i の分割

$$n_i = \alpha_i + 2\beta_i + 3\gamma_i + \cdots, \tag{5}$$

で決まるとすれば, R の共役類 (ρ) を与える n の分割は, 次で与えられる：

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 + \cdots, \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots, \quad \ldots \tag{6}$$

このとき，$\mathfrak{G}$ と $\mathfrak{H}$ の共役類 (ρ) との共通部分の位数は，

$$g_\rho = \sum_{(5)+(6)} \frac{n_1!}{1^{\alpha_1}\alpha_1!\,2^{\beta_1}\beta_1!\,3^{\gamma_1}\gamma_1!\,\cdots} \cdot \frac{n_2!}{1^{\alpha_2}\alpha_2!\,2^{\beta_2}\beta_2!\,3^{\gamma_2}\gamma_2!\,\cdots} \cdot \cdots . \tag{7}$$

われわれだけの記号として，上の n の分割を，$\boldsymbol{n} := (n_i)_{1\le i\le m}$ とおき，

$$X^{\boldsymbol{n}}(\rho) := \frac{hg_\rho}{gh_\rho} = \sum_{(5)+(6)} \frac{\alpha!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\cdots} \cdot \frac{\beta!}{\beta_1!\,\beta_2!\,\cdots} \cdot \cdots . \tag{8}$$

とおけば，論文 **57** により，類関数 $X^{\boldsymbol{n}}$ は，部分群 $\mathfrak{G}$ の自明表現 $\mathbf{1}_{\mathfrak{G}}$ を $\mathfrak{H}$ に誘導した表現 $\pi := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}}\mathbf{1}_{\mathfrak{G}}$ の指標である．これは既約指標 $\chi^{(\kappa)}$ の和に書ける：

$$X^{\boldsymbol{n}}(\rho) := \sum\nolimits_{\kappa} r_\kappa \chi_\rho^{(\kappa)} \tag{9}$$

命題 60.1.1（勝手に名前を付けてまとめた）．$x_1, x_2, \ldots, x_m$ を独立変数とする．(8) 式の右辺の和は，次の積の展開における $x^{\boldsymbol{n}} := x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$ の係数に等しい：

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+\cdots+x_m)^\alpha\,(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2)^\beta\,(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_m^3)^\gamma\cdots \\ = \sum\nolimits_{\boldsymbol{n}} X^{\boldsymbol{n}}(\rho)\,x^{\boldsymbol{n}}.\end{aligned} \tag{10}$$

用語： Frobenius の用語では，Charakter は既約指標を意味する．一般の線形表現の指標は，**zusammengesetzten Charakter** と呼ぶ．以下の §2 では，$\boldsymbol{Z}$-係数の一次結合である virtual character もこの名で呼んでいる．

§2 (pp.150-152): 差積を

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \prod\nolimits_{1\le i<j\le m}(x_j - x_i),$$

とおき，整数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ に対して，

$$[k_1, k_2, \ldots, k_m] := \mathrm{sgn}\big(\Delta(k_1, k_2, \ldots, k_m)\big), \tag{11}$$

とおく．すると，$[k_1, k_2, \ldots, k_m]$ は交代的である．$k_i = k_j\ (i \ne j)$ のときには，$[k_1, k_2, \ldots, k_m] = 0$ とおく．下の多項式展開の係数より，類関数 $\rho \mapsto \chi_\rho^{(\lambda)}$ を λ ごとに定義する：

$$\begin{aligned}&(x_1+x_2+\cdots+x_m)^\alpha\,(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2)^\beta\,(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_m^3)^\gamma\cdots\times \\ &\qquad \times\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ &= \sum\nolimits_{(\lambda)}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]\,\chi_\rho^{(\lambda)}\,x^\lambda, \qquad x^\lambda := x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots, x_m^{\lambda_m},\end{aligned} \tag{12}$$

ここに，$(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$，$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m = n + \frac{1}{2}m(m-1)$. (13)

定理 60.1（勝手に名付けた）．1つの λ に対して，$\rho \mapsto \chi_\rho^{(\lambda)}$ は $\mathfrak{H}$ $(= \mathfrak{S}_n)$ の指標を与える．$(\lambda) = (\lambda_i)_{1 \le i \le m}$ における順序を無視すると，相異なる λ には異なる指標が対応する．

$m = n$ の場合には，

$$\kappa_1 < \kappa_2 < \ldots < \kappa_n, \quad \kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_n = \frac{1}{2} n(n+1),$$

となる $(\kappa) = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n)$ が対応し，その個数は k (= 共役類の個数) である．

この定理の証明のために，まず，$\chi_\rho^{(\lambda)}$ は，ρ に無関係な整係数を持つ $X^{\boldsymbol{n}}(\rho)$ の一次結合であるから，zusammengesetzten Charakter である．それらが，指標であること，互いに相異なること，を示すには次の補題を用いる：

補題 60.2.1（勝手に名付けた）．

(i) zusammengesetzten Charakter χ_ρ が指標であるための必要十分条件は，

$$\chi_0 > 0, \qquad \sum\nolimits_\rho h_\rho \chi_\rho \chi_{\rho'} = h, \tag{14}$$

ここに，(0) は単位元の共役類，(ρ') は (ρ) の元の逆元よりなる共役類を表す．

(ii) 指標 χ_ρ と ψ_ρ とが異なるための必要十分条件は，

$$\sum\nolimits_\rho h_\rho \chi_\rho \psi_{\rho'} = 0. \tag{15}$$

一般に $\chi_{\rho'} = \overline{\chi_\rho}$ であるが，とくに n-次対称群 $\mathfrak{H}$ においては，$\rho' = \rho$ であるから，指標 χ_ρ はつねに実数値である．

§3 (pp.152-154): 定理1の証明として，補題 2.1 の条件を示し，次元公式を与えている．これはこの論文中の**白眉**である（文献 [岩堀, 第3章] に丁寧な解説がある）．

m 個の新変数 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ を導入して次の和を考える：

$$\sum_\rho \frac{h_\rho}{h}(x_1 + \cdots + x_m)^\alpha (x_1^2 + \cdots + x_m^2)^\beta \cdots \times (y_1 + \cdots + y_m)^\alpha (y_1^2 + \cdots + y_m^2)^\beta \cdots$$
$$= \sum \left\{ \frac{1}{1^\alpha \alpha!}(x_1 + \cdots + x_m)^\alpha (y_1 + \cdots + y_m)^\alpha \cdot \right.$$
$$\left. \frac{1}{2^\beta \beta!}(x_1^2 + \cdots + x_m^2)^\beta (y_1^2 + \cdots + y_m^2)^\beta \cdot \frac{1}{3^\gamma \gamma!}(x_1^3 + \cdots + x_m^3)^\gamma (y_1^3 + \cdots + y_m^3)^\gamma \cdots \right\}$$

ここに，共役類 ρ の位数 h_ρ は，(3) で与えられている．いま，条件

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \cdots = n \tag{16}$$

を廃止して，勝手な $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0, \ldots,$ にわたっての和を取ることにすると，和は，

$$e^{(x_1+\cdots+x_m)(y_1+\cdots+y_m)+\frac{1}{2}(x_1^2+\cdots+x_m^2)(y_1^2+\cdots+y_m^2)+\frac{1}{3}(x_1^3+\cdots+x_m^3)(y_1^3+\cdots+y_m^3)+\cdots}$$

となる．この肩の部分は各項を展開して変数 $x_\mu y_\nu$ ごとにそれぞれに和をとれば，$-\sum_{1\leq\mu,\nu\leq m}\log(1-x_\mu y_\nu)$ となるので，上の和は結局 $\dfrac{1}{\prod_{\mu,\nu}(1-x_\mu y_\nu)}$ になる．これに $\Delta(x_1,\ldots,x_m)\,\Delta(y_1,\ldots,y_m)$ を乗ずれば，**Cauchy の公式**

$$\left|\frac{1}{1-x_\mu y_\nu}\right| = \frac{\Delta(x_1,\ldots,x_m)\,\Delta(y_1,\ldots,y_m)}{\prod_{\mu,\nu}(1-x_\mu y_\nu)},$$

により，上式の左辺になる．ついで この行列式を行によって展開すると，

$$\begin{aligned}
&= \sum_\mu [\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m]\,\frac{1}{(1-x_{\mu_1}y_1)(1-x_{\mu_2}y_2)\cdots(1-x_{\mu_m}y_m)}\\
&= \sum_\mu\sum_\lambda [\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m]\,x_{\mu_1}^{\lambda_1}y_1^{\lambda_1}x_{\mu_2}^{\lambda_2}y_2^{\lambda_2}\cdots x_{\mu_m}^{\lambda_m}y_m^{\lambda_m}\\
&= \sum_\kappa\sum_\lambda [\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_m]\,[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m]\,x_1^{\kappa_1}x_2^{\kappa_2}\cdots x_m^{\kappa_m}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdots y_m^{\lambda_m}.
\end{aligned}$$

そこで，はじめの和 (16) に $\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,\Delta(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ を乗じて，ρ に関する条件 (16) を満たす項のみを拾って，上の結果と比較すれば，

$$=\sum_{\kappa,\lambda}\left(\sum_\rho \frac{h_\rho}{h}\,\chi_\rho^{(\kappa)}\,\chi_\rho^{(\lambda)}\right)[\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_m]\,[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m]\,x_1^{\kappa_1}x_2^{\kappa_2}\cdots x_m^{\kappa_m}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdots y_m^{\lambda_m},$$

ここに，$\kappa=(\kappa_i), \lambda=(\lambda_i)$ は相異なる非負整数の組であって，次を満たすものである：

$$\kappa_1+\kappa_2+\cdots+\kappa_m = n+\frac{1}{2}m(m-1),\quad \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m = n+\frac{1}{2}m(m-1).$$

両辺を比較することによって次を得る．$(\kappa_i),(\lambda_i)$ の成分の順序を無視して一致するとき，$(\kappa)\sim(\lambda)$ と書けば，

$$\sum_\rho h_\rho\chi_\rho^{(\kappa)}\chi_\rho^{(\lambda)} = \begin{cases} 0 & \text{if } (\kappa)\sim(\lambda),\\ h & \text{if } (\kappa)\not\sim(\lambda),\end{cases}$$

これは，補題 60.2.1 (i), (ii) の条件の主要部分をを検証したことになる（すごい！）

さらに，次元公式を与えるには，単位元の共役類 $(\rho) = (0)$ での値 $\chi_0^{(\lambda)} = f^{(\lambda)}$ が問題なので，

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{\lambda} [\lambda_1, \cdots, \lambda_m] f^{(\lambda)} x_1^{\lambda_1} \cdots x_m^{\lambda_m} \tag{17}$$

$$\text{左辺} = \left(\sum_{\mu} \frac{n!}{\mu_1' \mu_2! \cdots \mu_m!} x_1^{\mu_1} \cdots x_m^{\mu_m} \right) \left(\sum_{\kappa} [\kappa_1, \ldots, \kappa_m] x_1^{\kappa_1} \cdots x_m^{\kappa_m} \right), \tag{18}$$

$$= n! \times \sum_{\lambda} \sum_{\kappa} [\kappa_1, \ldots, \kappa_m] \frac{1}{(\lambda_1 - \kappa_1)!} \cdots \frac{1}{(\lambda_m - \kappa_m)!} x_1^{\lambda_1} \cdots x_m^{\lambda_m}.$$

ここに，$\mu_1 + \cdots + \mu_m = n$ で，$\kappa_1, \ldots, \kappa_m$ は $0, 1, \ldots, m-1$ の $m!$ 個の置換を動く．

定理 60.2.

$$f^{(\lambda)} = \frac{n! \, \Delta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)}{\lambda_1! \, \lambda_2! \cdots \lambda_m!},$$

したがって，　$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$　のとき，　$f^{(\lambda)} > 0.$

証明. (17), (18) 式より，

$$\frac{f^{(\lambda)}}{h} = \left| \frac{1}{(\lambda_\mu - \nu + 1)} \right| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, m).$$

$$\therefore \qquad \frac{\lambda_1! \, \lambda_2! \cdots \lambda_m!}{0! \, 1! \cdots (m-1)!} \frac{f^{(\lambda)}}{h} = \left| \begin{pmatrix} \lambda_\mu \\ \nu - 1 \end{pmatrix} \right|,$$

ここに，$\displaystyle \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \frac{x(x-1)\cdots(x-p+1)}{1 \cdot 2 \cdots p}$

また，$\displaystyle \left| \begin{pmatrix} \lambda_\mu \\ \nu - 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)}{\Delta(0, 1, \ldots, m-1)}.$

命題 60.3.1. 得られている指標の集合は**完全**である，すなわち，全ての指標が得られている．

証明. 得られた指標の個数が，群 $\mathfrak{H}$ の共役類の個数 k に等しいので，完全性が分かる．

§4 (pp.154-157): 指標のパラメーターとして，$\chi^{(\kappa)}$

$$\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n), \qquad 0 \leq \kappa_1 < \kappa_2 < \ldots < \kappa_n, \tag{19}$$

が得られている．$m < n$ や $m > n$ の場合の $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$ による $\chi^{(\lambda)}$ との関係も分かる．しかし，より実用的なパラメーターとして，**Charakteristik von** $\chi^{(\kappa)}$ と呼ばれる

$$(\kappa) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\begin{cases} 0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_r \leq n-1, \\ 0 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_r \leq n-1, \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_r + b_1 + b_2 + \cdots + b_r = n - r, \end{cases} \tag{21}$$

を導入する．ここに，r は **Rang der Charakteristik** と呼ばれる．そして，κ_i のうちで $\geq n$ となるものを $n+b_1, n+b_2, \ldots, n+b_r$ と書き，$< n$ となるものを，$n-1-a_{r+1}, n-1-a_{r+2}, \ldots, n-1-a_n$ として，$\{a_1, a_2, \ldots, a_r\} = \{0,1,2,\ldots,n-1\} \setminus \{a_j\,;\, n-r \leq j \leq n\}$ である．すると，$r \leq \sqrt{n}$ である．

定理 60.3. 次元公式は次のように書き表される：

$$\begin{aligned} f^{(\kappa)} &= \frac{n!\,\Delta(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n)}{\kappa_1!\,\kappa_2!\cdots\kappa_n!} = \frac{n!\,\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_r)\Delta(b_1, b_2, \ldots, b_r)}{a_1!\,a_2!\cdots a_r!\,b_1!\,b_2!\cdots b_r!\prod(a_\alpha + b_\beta + 1)} \\ &= \frac{n!}{a_1!\,a_2!\cdots a_r!\,b_1!\,b_2!\cdots b_r!}\left|\frac{1}{a_\alpha + b_\beta + 1}\right|, \end{aligned} \tag{22}$$

ここに，$\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r$.

そして，$\chi\begin{pmatrix} 0 \\ n-1 \end{pmatrix} \equiv 1,\ \chi\begin{pmatrix} 1 \\ n-2 \end{pmatrix} = \alpha - 1,\ \chi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & n-3 \end{pmatrix},\ \chi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n-4 \end{pmatrix}$,
$\chi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & n-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 2 \end{pmatrix}\beta + (\alpha-1)\gamma + \begin{pmatrix} \beta \\ 2 \end{pmatrix} - \delta,$
の一般公式が与えられている．ここに，$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ は (2), (3) により ρ を決定している．

§5 (pp.157-159): Rang der Charakteristik $r = 1$ の場合：

この場合の指標公式を与えている．とくに，$\chi\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の共役類 ρ での値を $\chi\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_\rho$ とかくと，

$$\chi\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}_\rho = (-1)^{\beta+\delta+\cdots}\chi\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_\rho = \mathrm{sgn}(\rho)\,\chi\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_\rho .$$

§6 (pp.159-161): $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_n, \mathfrak{G} = \mathfrak{A}_n$ とすると，$\dfrac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}}$ の 1 次元指標として，

$$\chi_\rho^{(1)} = \chi \begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \end{pmatrix}_\rho = (-1)^{\beta+\delta+\cdots} = (-1)^{n-s} = \mathrm{sgn}(\rho),$$

を得る．ここに，s は共役類 ρ の元に現れる（長さ 1 のものを込めた）Cyklen の個数である．

$$\chi^{(\lambda)} = \chi^{(1)}\chi^{(\kappa)} = \mathrm{sgn} \cdot \chi^{(\kappa)} \tag{23}$$

となっているときに，$\chi^{(\lambda)}$ と $\chi^{(\kappa)}$ とは **associirte** であるという．

定理 60.4. $\chi^{(\lambda)}$ と $\chi^{(\kappa)}$ とが *associirte* であるとすると，

$$(\kappa) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_r \\ b_1 & b_2 & \dots & b_r \end{pmatrix}, \qquad (\lambda) = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix}. \tag{24}$$

§7 (pp.161-166): 指標の値を決定しうる 2， 3 の場合を示す．

定理 60.5. 共役類 ρ の元が s 個の Cyklen からなるとする．Rank r der Charakteristik (κ) に対して，$s < r$ ならば，$\chi_\rho^{(\kappa)} = 0$.

定理 60.6. 共役類 ρ の元が長さ c の 1 個の Cyklus と長さ 1 の $n-s$ 個の Cyklen からなるとする．指標の値 $\chi_\rho^{(\kappa)}$ は次のように求められる：

$$f(x) := \frac{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_r)}{(x+a_1+1)(x+a_2+1)\cdots(x+a_r+1)} \qquad \text{と置けば,}$$

$$\frac{-c^2\, h_\rho\, \chi_\rho^{(\kappa)}}{f^{(\kappa)}} = \left[\frac{f(x-c)\; x(x-1)\cdots(x-c+1)}{f(x)}\right]_{x^{-1}}, \quad h_\rho = \frac{n!}{(n-c)! \cdot c},$$

ここに，直上の第 1 式右辺は，x の降冪の順に展開したときの x^{-1} の係数を表す．

とくに，ρ が互換（$c=2$）のとき，

$$\frac{h_\rho\, \chi_\rho^{(\kappa)}}{f^{(\kappa)}} = \frac{1}{2}\left(\sum_i b_i(b_i+1) - \sum_i a_i(a_i+1)\right).$$

感想： Frobenius のやり方自体が実に興味深い．それで §3 については，結構詳しくテキストを忠実にたどった．また，§4 以降での既約指標の Charakteristik には初めてお目にかかった．

引 用 文 献：

[岩堀] 岩堀 長慶，対称群と一般線形群の表現論 — 既約指標・Young 図形とテンソル空間の分解 —，岩波講座 基礎数学 線形代数 iv，1978.

[平井 1] 群の表現の指標について（経験よりの管見），第 12 回数学史シンポジュウム（2001），津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**23**, pp.84-94, 2002/03/20.

[平井 2] 対称群の指標に関する Frobenius, Schur の仕事，第 13 回数学史シンポジュウム（2002），津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**24**, pp.53-58, 2003/03/20.

[平井 3] Schur の学位論文および対称群の表現，第 14 回数学史シンポジュウム（2003），津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**25**, pp.1233-131, 2004/03/09.

[平井 4] Frobenius による「群の指標と表現」の研究，第 15 回数学史シンポジュウム（2004），津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**26**, pp.222-240, 2005/03/09.

フロベニウス： 有限群の指標および線形表現に関する論文リスト
すべて Frobenius 全集 Band III より

53. *Über Gruppencharaktere*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 985–1021(1896).

54. *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1343–1382(1896).

56. *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 944–1015(1897).

57. *Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschafttten zu Berlin, 501–515(1898).

58. *Über die Composition der Charaktere einer Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 330–339(1899).

59. *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen II*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenfchaften zu Berlin, 482–500(1899).

60. *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichle der Königlich Preußifchen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 516–534(1900).

61. *Über die Charaktere der alternierenden Gruppe*, Sitzungsberichle der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 303–315(1901).

68. *Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 328–358(1903).

69. *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante II*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 401–409(1903).

72. *Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 987–991(1903).

73. *Über die Charaktere der mehrfach transitiven Gruppen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 558–571(1904).

75. *Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen* (mit I. Schur), Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 186–208(1906).

76. *Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen* (mit I. Schur), Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 209–217(1906).

78. *Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie II*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 428–437(1907).

Appendix: 関連するシュアーおよびヤングの論文のリスト.

射影表現3部作

[**Sch1**] J. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. für die reine und angewante Mathematik, **127**(1904), 20–50（全集での論文番号は **4** なので，[**S4**] とも引用する）

[**Sch2**] J. Schur, Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, ibid., **132**(1907), 85–137 （= [**S10**]）.

[**Sch3**] J. Schur, Über Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, ibid., **139**(1911), 155–255 （= [**S16**]）.

[**S1**] J. Schur, Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen（Inaugural-Dissertation), 1901, Berlin, Reprinted in *Gesammelte Abhandlungen*, Band I, pp.1–71.

[**S6**] J. Schur, Über eine Klasse von endlichen Gruppen linearer Substitutionen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1905, Physikalisch-Mathematische Klasse, 77–91.

[**S7**] J. Schur, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharactere, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1905, Physi- kalisch-Mathematische Klasse, 406–432.

[**S9**] J. Schur, Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen lineare Substitutionen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1906, Physikalisch-Mathematische Klasse, 164–184.

[**S11**] J. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1908, Physikalisch-Mathematische Klasse, 664–678.

[**S14**] J. Schur, Beiträge zur Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen, American Mathematical Society Transactions, **10**(1909), 159–175.

（注： [S4], [S10], [S16] は上記の射影表現三部作である）

[**Y1**] A. Young, On quantitative substitutional analysis, Proceedings London Math. Soc., **33**(1901), 97–146.

[**Y2**] A. Young, On quantitative substitutional analysis (second paper), Proceedings London Math. Soc., **34**(1902), 361–397.