種数 3 の超楕円曲線と $\sin^2$-予想

難波完爾

729-1117 岡山県総社市北溝手 463-3

tel/fax. 0866-90-1886

2007. 02. 12

1. 諸定義とそれにまつわる話

種数 2 の超楕円曲線

$$C:\quad y^2 = x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = f(x)$$

の終結変換(resultant transform)多項式の話から始めよう。先ず、終結式(resultant)についてである。二つの多項式

$$f(x),\ g(x)$$

の、変数 x に関する終結式は、通常

$$\mathrm{res}(f(x), g(x); x) = \mathrm{resultant}(f(x), g(x); x)$$

と書かれるが、それは重複して用いられることが多いので、ここだけの略記記法として、例えば、変数 x を消去(eliminate)する場合、変数 x を積(product)の記法と考えて、x を丸で囲んだ記号ⓧを導入して

$$f(x) ⓧ g(x) = \mathrm{res}(f(x), g(x); x)$$

のように記し、消去積(elimination product)と呼ぶことにする。算法ⓧの結合力(adhesiveness)は加減乗除よりも弱いものとする。

例えば、

$$f(x) = x^5+7x^4+29x^3+44x^2+48x-72$$

の場合の判別式は

$$\det(f(x)) = f(x) ⓧ f'(x) = 2^6\cdot 3^8\cdot 691^2$$

である。終結式については、分配法則(distributive law)

$$f(x)g(x) ⓧ h(x) = (f(x) ⓧ h(x))(g(x) ⓧ h(x))$$

$$f(x) ⓧ g(x)h(x) = (f(x) ⓧ g(x))(f(x) ⓧ h(x))$$

や結合の法則(associative law)

$$f(x) ⓧ (g(x,y) ⓨ h(y)) = (f(x) ⓧ g(x,y)) ⓨ h(y)$$

などが成立する。

また、多項式 $f(x)$ の Tschirnhaus 変換（W. von Tschirnhaus, 1651-1708, チルナウスまたはチルンハウス）を

$$f_1(u) = f(x) \otimes x+u$$

$$f_2(u,v) = f(x) \otimes x^2+ux+v$$

$$f_3(u,v,w) = f(x) \otimes x^3+ux^2+vx+w$$

などと定義する。具体的には、例えば、

$$f(x) = x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

であれば、

$$f_2(u,v) = f(x) \otimes x^2+ux+v = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c & d & e & 0 \\ 0 & 1 & a & b & c & d & e \\ 1 & u & v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u & v \end{vmatrix}$$

である。終結式、この場合は消去積と呼んでいるが、は所謂、差積（difference product）である。つまり、

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

$$g(x) = (x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_m)$$

のときは、

$$f(x) \otimes g(x) = \prod_{i=1}^{m} f(b_i) = (-1)^{nm} \prod_{i=1}^{n} g(a_i)$$

である。従って、

$$x^2+ux+v = (x-a)(x-b)$$

のときは、

$$f_2(u,v) = f(x) \otimes x^2+ux+v = f(x) \otimes (x-a)(x-b) = f(a)f(b)$$

となっている。

素数個の元より成る体、つまり、有限素体（finite prime field）を

$$F_p = GF(p) = p = \{0,1,2,\cdots, p-1\}$$

のように記する。

数 n の Legendre 記号（Adrien Marie Legendre, 1752-1833）

$$(n/p) = -1, 0, 1$$

を n が p を法（modulus）として 0 でない数の平方に等しいとき 1、0 と合同のとき 0、そうでないとき-1 と定める。つまり、奇素数 p に対しては

$$(n/p) = \#\{x \in p: n = x^2 \text{ mod. } p\} -1 = n^{(p-1)/2} \text{ mod } p$$

である。Legendre 記号は平方剰余の記号とも呼ばれる。そこで、

$$a_p = \sum x \in p\,(f_1(x)\,p)$$

$$b_p = \sum x,y \in p\,(f_2(x,y)\,p)$$

と定める。そして、例えば、5 次多項式

$$f(x) = x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

の場合は、その終結変換多項式（resultant transform polynomial）を

$$\underline{f}_p(x) = x^4+a_px^3+b_px^2+pa_px+p^2$$

と定義する。志村・谷山理論によって終結変換方程式（resultant transform equation）

$$\underline{f}_p(x) = x^4+a_px^3+b_px^2+pa_px+p^2 = 0$$

の解は絶対値 $\sqrt{p}$ の複素数であることが知られている。つまり、

$$\underline{f}_p(x) = x^4+a_px^3+b_px^2+pa_px+p^2 = (x^2+cx+p)(x^2+dx+p)$$

の形に（実数の範囲で）分解されることが知られている。この係数 c,d を根とする 2 次方程式は、u を未知数として、連立方程式

$$x^4+a_px^3+b_px^2+pa_px+p^2 = 0$$

$$x^2+ux+p = 0$$

が x を共通根とする条件として、

$$x^4+a_px^3+bx^2+pa_px+p^2 \ ⓧ\ x^2+ux+p = p^2(u^2-a_pu+b_p-2p)^2$$

から、（勿論、容易に、直接にも）

$$u^2-a_pu+b_p-2p = 0$$

であることが解る。この方程式は $[-2\sqrt{p},\ 2\sqrt{p}]$ の範囲に 2 実根をもつ。この条件は、$\pm 2\sqrt{p}$ での値が正であること、

$$2p+b_p > 2\sqrt{p}|a_p|$$

及び、$-2\sqrt{p} < u = a_p/2 < 2\sqrt{p}$ での値が負であることである。まとめると

$$4(b_p-2p) < a_p^2 < (2p+b_p)^2/4p$$

である。さて、$u^2-a_pu+b_p-2p = 0$ の解は

$$u = \ a_p/2 \pm \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}$$

であるが、平面上の点

$$[a_p/\sqrt{p}\,,\ \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ ]$$

は４直線

$$|x \pm y \pm 4| = 0$$

あるいは

$$(x^2-y^2)^2-32(x^2+y^2)+256=0$$

で囲まれた正方形のなかにあるはずである。

平成19年8月26日17時06分のことである。

$$y^2 = x(x^2-1)(x^2-2)$$

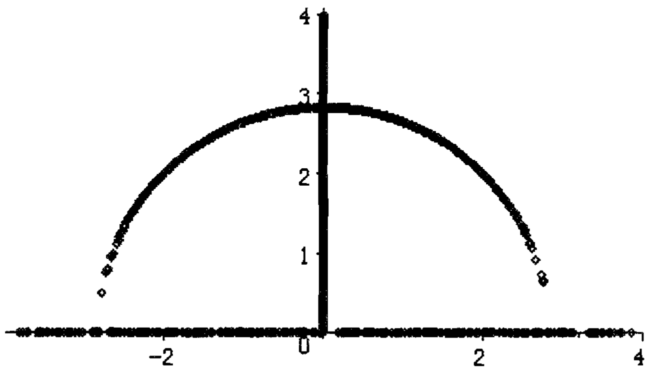
の場合、状況はどうかと思って

$$y^2 = x(x^2-1)(x^2-2)$$

$$[a_p/\sqrt{p},\ \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}]$$

$$p = 3 \sim 30011$$

について、グラフを描かせると



のような“絵”が「突然」出てきた。うわっ！、こりゃ何じゃ！…と驚く。

半径は

$$2\sqrt{2} = 2.8284271 \cdots$$

ふわふわよにない…、うわっうわっ世にない。こんなのあり？…と思う。

しかし、現実である。内容は

$$x^2+y^2 = 8 = 2^3$$

の円周上に分布するということであろう。あるいは、一般形は

$$xy(x^2+y^2-8) = 0$$

の方がよいであろうか。この曲線が

$$|x-y| = 4$$

に内接するという意味で、半径は $2\sqrt{2}$ でなければならなかったのである。

当然といえば当然である。内容は既に知っていたと思っていたことばかりである。しかし、想像力が、遠くそこまでは及ばなかったのである。

$[0, 4\sqrt{2}/\sqrt{3}]$, $[-2/\sqrt{5}, 6/\sqrt{5}]$, $[0, 8/\sqrt{7}]$, $[0, 4\sqrt{2}/\sqrt{11}]$, $[6/\sqrt{13}, 2\sqrt{17}/\sqrt{13}]$, $[0, 4]$, $[0, 4\sqrt{2}/\sqrt{19}]$, $[0, 8/\sqrt{23}]$, $[6/\sqrt{29}, 14/\sqrt{29}]$, $[0, 16/\sqrt{31}]$, $[-2/\sqrt{37}, 2\sqrt{73}/\sqrt{37}]$, $[0, 20/\sqrt{41}]$, $[0, 4\sqrt{2}/\sqrt{43}]$, $[0, 16/\sqrt{47}]$, $[-2/\sqrt{53}, 2\sqrt{105}/\sqrt{53}]$, $[0, 12\sqrt{2}/\sqrt{59}]$, $[6/\sqrt{61}, 2\sqrt{113}/\sqrt{61}]$, $[0, 4\sqrt{2}/\sqrt{67}]$, $[0, 24/\sqrt{71}]$, $[-4/\sqrt{73}, 0]$, $[0, 0]$, $[0, 20\sqrt{2}/\sqrt{83}]$, $[28/\sqrt{89}, 0]$, $[0, 4\sqrt{33}/\sqrt{97}]$

が $p = 3 \sim 97$ までの表である。しかし、

$$a_p^2 + (a_p^2 + 8p - 4b_p) - 8p = 2(a_p^2 - 2b_p)$$

であるから、直接 a_p, b_p の表から $a_p^2 = 2b_p$ を確かめた方が賢明そうである。

$$[p, a_p, a_p^2+8p-4b_p, a_p^2-2b_p]$$

[3, 0, 32, 4], [5, -2, 36, 0], [7, 0, 64, 4], [11, 0, 32, -28], [13, 6, 68, 0], [17, 0, 272, 68], [19, 0, 32, -60], [23, 0, 64, -60], [29, 6, 196, 0], [31, 0, 256, 4], [37, -2, 292, 0], [41, 0, 400, 36], [43, 0, 32, -156], [47, 0, 256, -60], [53, -2, 420, 0], [59, 0, 288, -92], [61, 6, 452, 0], [67, 0, 32, -252], [71, 0, 576, 4], [73, -4, 0, -284], [79, 0, 0, -316], [83, 0, 800, 68], [89, 28, 0, 36], [97, 0, 528, -124]

の表である。p の部分の外に、どこかの部分が 0 になっている。最後の座標が

$$x^2+y^2 = 8$$

に対応する

$$a_p^2 = 2b_p$$

部分である。

$$p = 5, 13, 29, 37, 53, 61, \cdots$$

$[-2/\sqrt{5}, 6/\sqrt{5}]$, $[6/\sqrt{13}, 2\sqrt{17}/\sqrt{13}]$, $[6/\sqrt{29}, 14/\sqrt{29}]$, $[-2/\sqrt{37}, 2\sqrt{73}/\sqrt{37}]$, $[-2/\sqrt{53}, 2\sqrt{105}/\sqrt{53}]$, $[6/\sqrt{61}, 2\sqrt{113}/\sqrt{61}]$, $\cdots$

に対応している。勿論、$b_p \geq 0$ でなければならない。元の表は

$$[p, a_p, b_p]$$

[3, 0, -2], [5, -2, 2], [7, 0, -2], [11, 0, 14], [<u>13, 6, 18</u>], [17, 0, -34], [19, 0, 30], [23, 0, 30], [<u>29, 6, 18</u>], [31, 0, -2], [<u>37, -2, 2</u>], [41, 0, -18], [43, 0, 78], [47, 0, 30], [<u>53, -2, 2</u>], [59, 0, 46], [<u>61, 6, 18</u>], [67, 0, 126], [71, 0, -2], [73, -4, 150],

$$[79, 0, 158], [83, 0, -34], [89, 28, 374], [97, 0, 62], \cdots$$

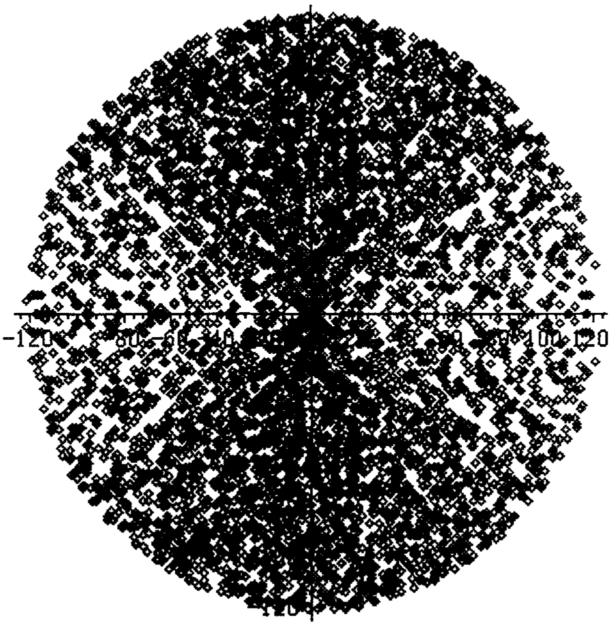
これらには、以前も着目していたが、円

$$x^2+y^2=8$$

との関連では見ていなかったのである。

$$y^2 = x(x^2-1)(x^2-2)$$

$$p = 3 \sim 15053$$



「見れば解る」という言葉の意味を“今回も”実感したのである。「解ってなかった」という内容である。

余談。

ふわふわとした認識が突然“絵”として現れたので、故前原昭二先生の“夢”の話を思い出す。その夢の内容は、

「夢に可憐な少女が現れたので、この種のものは、急に鬼婆に変わる可能性があると(夢のなかで)思うがはやいか、バッ！と鬼婆に変わった。シマッタ！。そう思ったのが失敗(の原因)であった。…と(夢と現実の狭間で)後悔した」

というものである。私は、この種の(夢であるが)「事実」が人類の記憶から消えてしまうのを惜しんで敢えて、(品性のことも考えずに)これは記する価値があると思ったのである。それは、この場合前原先生であるが、人

は(誰でも何時でも)…という一般性・普遍性を感じさせるからである。つまり、変数(variable)の概念の登場である。

夢中出現、顔容麗美嬢子、爾突然変化、

醜悪鬼婆而、即後悔反省、故試再見夢

などという(品欠・欠陥)文字列を思う。

ともあれ、一つの類型が“存在”すると知れば後は“かなり”容易である。連想の糸を辿ればよいのである。そして、ものごとは「何度でも」発見されるものだと思う。その度に“新鮮”なのである。否、新鮮と感じたときが“発見”なのかも知れない。

次の類型は、前回、第17回数学史シンポシウム報告集 p.168 の

$$y^2 = f(x) = x^5-20x^3-40x^2-16x+nx^2(x+2)^2$$

などと記した一変数の助変数 n をもった超楕円曲線の族である。

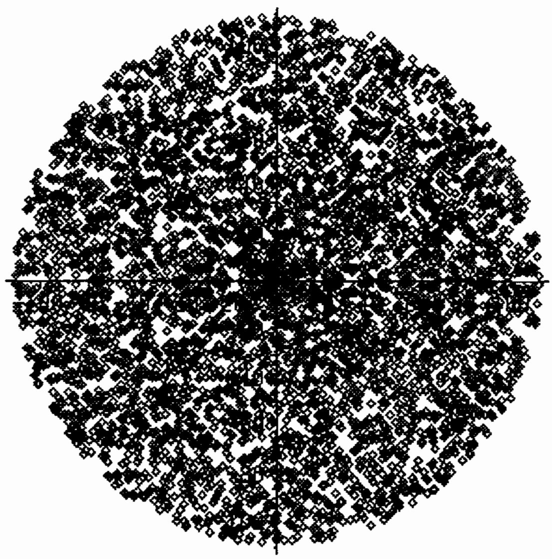
これは、x に x-1、n に n+5 を代入すると

$$(x^2-1)(x(x^2-9)+n(x^2-1)) = x(x^2-1)(x^2-9)+n(x^2-1)^2$$

の形に整理されるものである。

$$y^2 = x(x+2)(x^3-2x^2-16x-8)$$

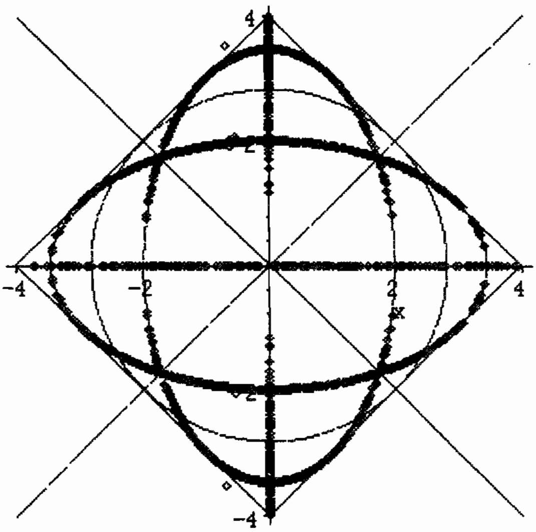
$$p = 2 \sim 12211$$



$$y^2 = x(x+2)(x^3-2x^2-16x-8)$$

$$\left[\, a_p/\sqrt{p}\ ,\ \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p} \,\right]$$

$p = 2 \sim 12211$



ここで、不思議な点は

$$[a_p/\sqrt{p}\ ,\ \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ ]$$

のグラフが

$$x = a_p/\sqrt{p}\ ,\ y = \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}$$

という、一見、非対称な式に関する、$x = y$, $x+y = 0$ に関する対称なグラフの上に“非対称”な分布をしていることである。

“対称”なグラフの上の“非対称”な分布

は何を意味しているのであろうか。興味のある問題である。

このグラフに現れる、2 個の楕円と 1 個の円は何を意味しているのであろうか。少し、説明する。

先ず、原点を中心とする楕円と直線 $x+y = 4$

$$ax^2+by^2+1 = 0,\ x+y-4 = 0$$

が点 $(t,4-t)$ で接する場合を考えてみよう。

y を消去して、あるいは y の消去積ⓨをとる、あるいは $y = 4-x$ を代入して

$$ax^2+by^2+1 \ ⓨ\ x+y-4 = (a+b)x^2-8bx+16b+1 = 0.$$

接線であるためには完全平方でなくてはならないから、判別式は 0 である。

$$64b^2-4(a+b)(16b+1) = -4(16ab+a+b) = 0$$

これから、

$$b = -a/(16a+1)$$

である。接点 $(x, y)=(t, 4-t)$ を考えると

$$ax^2+by^2+1 = at^2-a(4-t)^2/(16a+1)+1 = (4at+1)^2/(16a+1)=0$$

によって、

$$a = -1/4t$$

である。従って、求める楕円の方程式は

$$(4-t)x^2+ty^2 = 4t(4-t)$$

となる。

$$x = a_p/\sqrt{p}\ ,\ y = \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}$$

であるから、

$$(4-t)a_p^2+t(a_p^2+8p-4b_p)-4t(4-t)p = 4(pt^2-(2p+b)t+a^2)=0$$

である。従って、接点の充たすべき方程式は

$$pt^2-(2p+b)t+a^2=0$$

である。終結変換方程式を決定する係数は

$$[p, a_p, b_p]$$

によって決定され、p は素数であるから、Gauss の原始多項式の定理から、

$$pt^2-(2p+b)t+a^2$$

が、有理数体で可約 (reducible) なら、その因子 (factor) は整数係数でなくてはならない。つまり、

$$pt^2-(2p+b)t+a^2=0$$

に有理数解が存在すれば、その一つは $t = 0, 1, 2, 3, 4$ の何れかでなければならないのである。そして、実際には、一般の場合は、つまり特殊な場合

$$y^2 = x^5-a$$

$$y^2 = x(x^4+ax^2+b)$$

$$y^2 = x(x^2-1)(x^2-9)+a(x^2-1)^2$$

$$\cdots$$

などに、一次式を代入したような場合を除いて、楕円分解方程式 (ellips resolution equation)

$$pt^2-(2p+b)t+a^2=0$$

は既約なのである。勿論、これらの例は一部にすぎない。

楕円分解方程式が可約な素数の密度が正のものは、

$$y^2 = x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = f(x)$$

とした場合、f(x)が既約なものは、

$$f(x) = x^5 - a$$

の(変数に一次式を代入するなどで帰着できる)類型を除いて、常に、可約密度が0であろうと思う。

現実には、経験則であるが、t = 2、つまり円の場合と t = 1, 3、つまり(円でない)楕円の両方の上に点

$$[a_p/\sqrt{p}\ ,\ \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ ]$$

が分布するものは存在しない。また、一般に、二つの楕円上には同時に分布する。そして、t = 1 の楕円、つまり、y-軸に近い楕円の上のみに(xy = 0 を除いて)分布するものは存在するが、t = 3、つまり x-軸に近い楕円上のみに分布するものは存在しないのではないかと予想している。兎も角、探しているが見つからないのである。

類型の全体像の明示と判定条件の記述・証明は、魅力的な問題であろう。

また、係数方程式(coefficient equation)

$$u^2 - a_p u + b_p - 2p = 0$$

の標準化解(normalized solution)

$$[x,y] = [a_p/\sqrt{p}\ ,\ \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ ]$$

が xy-平面の曲線あるいは点上に正の密度で分布するような場合は、曲線では、上記の、5個の図形

$$(4-t)x^2 + ty^2 = 4t(4-t),\quad t = 0, 1, 2, 3, 4$$

つまり、2個の有界線分、円、2個の楕円の外のものが存在するのか、あるいは、それらの交点の場合に限られるのかは基本的な問題である。

問題

$$C_t : (4-t)x^2 + ty^2 = 4t(4-t),\quad t = 0, 1, 2, 3, 4$$

と異なる代数曲線 D 上に、点

$$[x,y] = [a_p/\sqrt{p}\ ,\ \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ ]$$

が、無限個、あるいは、正密度で存在するような

超楕円曲線

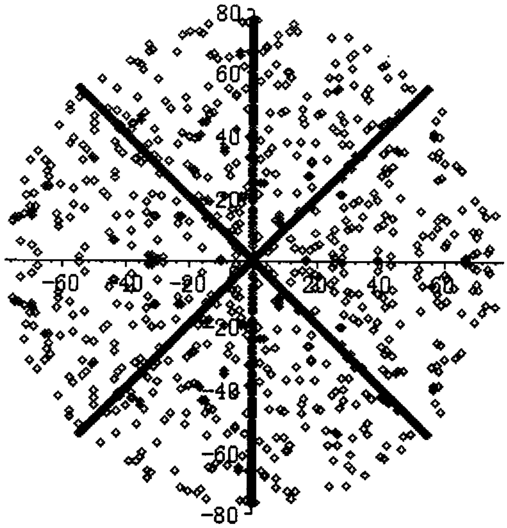
$$y^2 = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = f(x)$$

と、分布代数曲線 D の組は存在するか。

例. $y^2 = x^5+a$ 型の超楕円曲線

$y^2 = x^5+11$

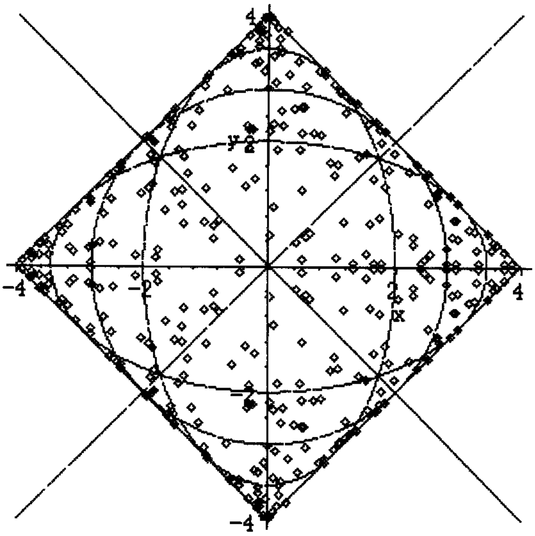
$p = 2 \sim 5987$



$y^2 = x^5+11$

$[\, a_p/\sqrt{p}\ ,\ \sqrt{a_p{}^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ ]$

$p = 2 \sim 5987$



この場合

$[\, a_p/\sqrt{p}\ ,\ \sqrt{a_p{}^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ ]$

の分布には、

$$C_t : (4-t)\,x^2+ty^2 = 4t\,(4-t), \quad t = 0, 1, 2, 3, 4$$

は、曲線としては、見える形では表示されていない。現実の解の分布では、直線として見える点は、平面上の 0 次元の図形、つまり、1 点に退化しているのである。

以下は $p = 2 \sim 97$ での 25 個の素数についての例示である：

$$[p, a_p, b_p]$$

$$[2, 1, 2], [3, 0, 0], [5, 0, 0], [7, 0, 0], [11, 0, 0],$$
$$[13, 0, 0], [17, 0, 0], [19, 0, 38], [23, 0, 0], [29, 0, 58],$$
$$[31, 1, -39], [37, 0, 0], [41, 9, 71], [43, 0, 0], [47, 0, 0],$$
$$[53, 0, 0], [59, 0, 118], [61, -16, 166], [67, 0, 0], [71, 1, -9],$$
$$[73, 0, 0], [79, 0, 158], [83, 0, 0], [89, 0, 178], [97, 0, 0]$$

これらに対応する

$$[a_p/\sqrt{p}\,,\ \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ ]$$

は次のようである。

$$[1/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2}], [0, 2\sqrt{2}], [0, 2\sqrt{2}], [0, 2\sqrt{2}], [0, 2\sqrt{2}],$$
$$[0, 2\sqrt{2}], [0, 2\sqrt{2}], [0, 0], [0, 2\sqrt{2}], [0, 0],$$
$$[1/\sqrt{31}, 9\sqrt{5}/\sqrt{31}], [0, 2\sqrt{2}], [9/\sqrt{41}, 5\sqrt{5}/\sqrt{41}], [0, 2\sqrt{2}], [0, 2\sqrt{2}],$$
$$[0, 2\sqrt{2}], [0, 0], [-16/\sqrt{61}, 4\sqrt{5}/\sqrt{61}], [0, 2\sqrt{2}], [1/\sqrt{71}, 11\sqrt{5}/\sqrt{71}],$$
$$[0, 2\sqrt{2}], [0, 0], [0, 2\sqrt{2}], [0, 0], [0, 2\sqrt{2}],$$

明白なことは、$[0,\ 2\sqrt{2}]$や$[0,\ 0]$が重複して、つまり、この場合は、素数のなかの正の密度で現れていることである。これが、上の図の 3 本の直線として見えているのである。

これらは

$$[0, 2\sqrt{2}]: \quad x^2+y^2 = 8, x = 0$$

$$[0, 0]: \quad x = 0, y = 0$$

の交点である。下の図では 1 点に見えるけれども多重の重複点、つまり、0 次元の代数的点 (algebraic point) なのである。

統計であるが、$p = 2 \sim 5987$ では、素数の個数 783 個、$[0, 0]$のもの 190 個、$[0, 2\sqrt{2}]$のもの 399 個である。

$$[0, 0] \quad 190/783 = 0.2426564496 \fallingdotseq 1/4$$

$$[0, 2\sqrt{2}] \quad 399/783 = 133/261 = 0.5095785441 \fallingdotseq 1/2$$

であるから、終結変換方程式の解のグラフ、つまり、上の方のグラフの直線上には 1/4 の等しい確率で点が存在し、恐らく、残りの 1/4 の点の偏角は一様分布を成すのであろう。　興味ある点は、終結変換方程式の標準化

$$x^4+(a_p/\sqrt{p})x^3+(b_p/p)x^2+(a_p/\sqrt{p})x+1=0$$

と、その係数方程式の標準化

$$u^2-(a_p/\sqrt{p})u+b_p/p-2=0$$

が、ギリシャ数学の基本問題、つまり、円と正方形を代数的に結びつけていることである。　この点に、何等かの真実を含む可能性を見て美しさを感ずるのであろう。

2. 楕円分解方程式による類型

2.1 一般型（generic form）

このタイプの超楕円曲線は、

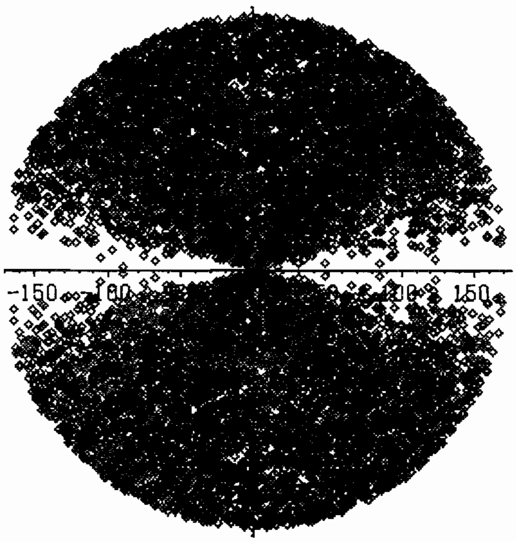
$$y^2=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=f(x)$$

の形で、5 次多項式 $f(x)$ が非可解（non-solvable）、つまり、そのガロア群（Galois group）が非可解群 $S(5)$, $A(5)$ の場合を含む類型で、終結変換方程式の解の偏角の分布が $\sin^2 x+\sin^2 2x$ に比例すると予想されている場合である。

$$y^2=x^5+5x+5$$

$$\mathrm{gal}=5!=S(5),\ \det=5^5\cdot 881$$

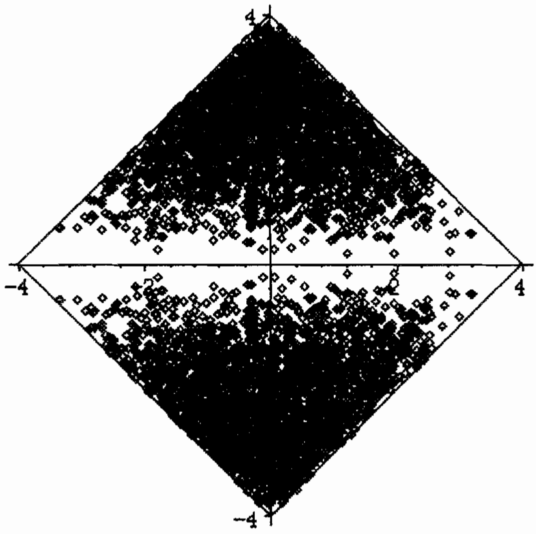
$$p=2\sim 30047$$



$$y^2 = x^3+5x+5$$

$$\left[a_p/\sqrt{p}\ ,\ \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ \right]$$

$$p = 2 \sim 30047$$



この図は一般の場合の特徴をよく備えていると思う。辰宿列張ではないが、何かの代数曲線の上に無限にのるものがあるのであろうか。

楕円分解方程式

$$pt^2-(2p+b)t+a^2=0$$

が因数分解、つまり、可約なものは、その整数解の一つ

$$5 = \{0,1,2,3,4\}$$

に応じて、$p=2 \sim 30047$ の範囲で、$[p, a_p, b_p]$ は次のようである。

[[5, 0, 0], [29, 0, -8], [137, 0, 154], [193, 0, 30],
[293, 0, -94], [349, 0, -494], [449, 0, -210], [461, 0, -170],
[613, 0, 832], [1153, 0, 1230], [1279, 0, 1962], [1637, 0, -2548],
[2351, 0, -2052], [2633, 0, 2414], [3719, 0, 1558], [4253, 0, -380],
[4283, 0, 1610], [6763, 0, 5610], [6791, 0, -6506], [8627, 0, 12850],
[10613, 0, 9594], [12547, 0, 2618], [16349, 0, 4446], 0], [26497, 0, 23340],
[28771, 0, 19704], [30011, 0, 17748], …

これらは、$a=a_p=0$ のために、

$$pt^2-(2p+b)t+a^2 = t(pt-(2p+b))$$

と因数分解されたものである。$a = a_p = 0$ となる素数 p は無限個存在すると

予想される。しかし、正の密度、つまり、q を素数を表す変数として、p より小さい素数 q の個数と、そのような q で $a_q = 0$ となるものの個数の比

$$\#\{q < p : a_q = 0\} / \#\{q < p : \}$$

が、極限として、正の定数より大きくなる、ということはないであろう。

判別式の値が $\det = 5^5 \cdot 881$ であることとも関係して、$[p, a_p, b_p] = [5, 0, 0]$ では、

$$[a_p/\sqrt{p}\ ,\ \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ ] = [0, 2\sqrt{2}]$$

であり、その点は円 $x^2+y^2 = 8$ 上に存在する($p = 2 \sim 30047$ の範囲での)唯一の点である。勿論、$x = 0$ との交点でもある。同じ範囲で、$p = 1283$ では

$$[p, a_p, b_p] = [1283, -3, 1286]$$

であり、

$$pt^2 - (2p+b)\,t + a^2 = (1283x-3)\,(x-3)$$

と分解して、$t = 3$、つまり、$x+y = 4$ と $(x,y) = (3,1)$ で接する楕円 $x^2+3y^2 = 12$ の上に存在する唯一の点である。

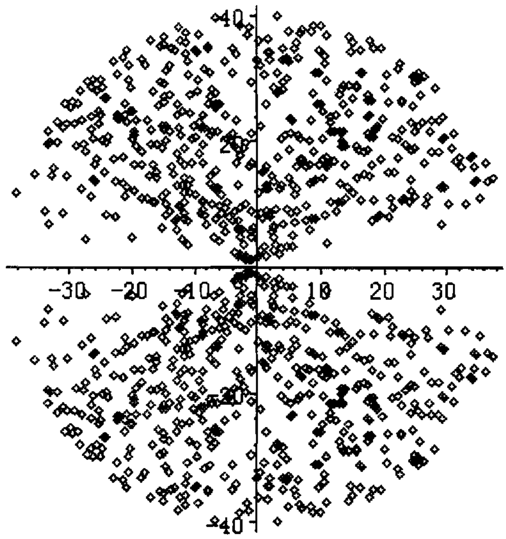
でたらめに取ってきた、超楕円曲線、例えば

$$y^2 = 3x^5+x^4+4x^3+x^2+5x+9$$

$$\mathrm{gal} = 5!,\ \det = 3 \cdot 3319 \cdot 484543$$

を考えてみよう。(出鱈目というのは超困難(現実には不可能)を意味する。ここでは $\pi = 3.14159265\cdots$ などという規則的列を参考にした。矛盾を感ずる…)、この場合も状況は似ている。データの個数は少ないが…

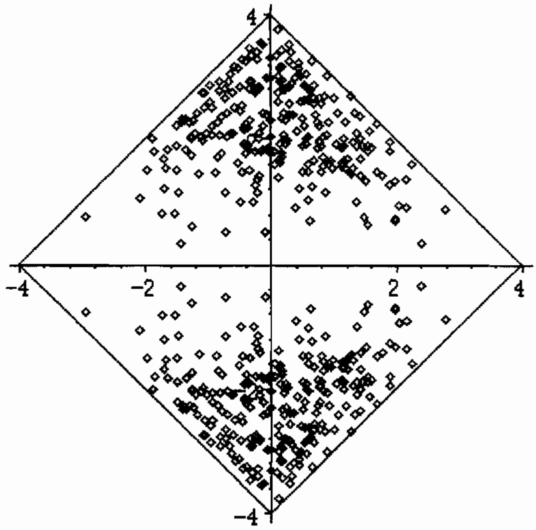
$$y^2 = 3x^5+x^4+4x^3+x^2+5x+9,\ p = 2 \sim 1627$$



$$y^2 = 3x^5+x^4+4x^3+x^2+5x+9$$

$$\left[\, a_p/\sqrt{p}\ ,\ \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ \right]$$

$$p = 2 \sim 1627$$



この場合も、実数軸、つまり y ＝ 0 から、あたかも斥力がはたらくように点が分布している。現実に、y の絶対値は 2 根の差を意味している。お互いの距離を保っているのである。

既約で可解群 C(5), D(5) などをもつ場合も“ほとんど”この類型に属する。可約な場合も、例えば、

$$y^2 = (x-1)\,x\,(x+1)\,(x+2)\,(x+4)$$

などの偏角の分布も

$$\sin^2 x + \sin^2 2x$$

の標準型であろうと予想されている。

2.2 $\sin^2 x$ 分布型の場合

次の例は、虚 2 次体の整数環 $Z(\sqrt{-47})$ に関するもので、この場合類数は 5 である。右辺の既約多項式は Hilber-Weber の類多項式 (class polynomial) の関数

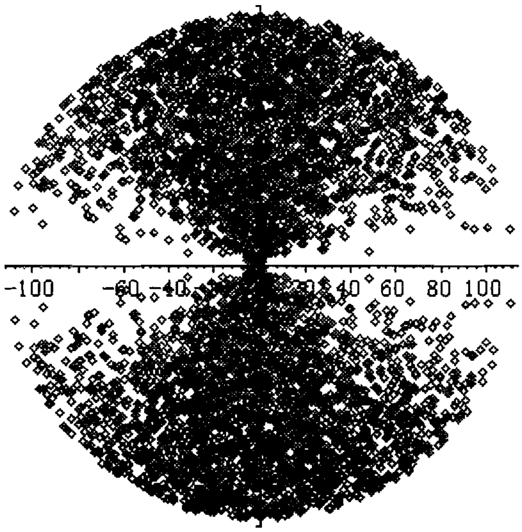
$$g(x) = (1-16x^{24})/12x^{16}$$

による簡約形である。分布型は $\sin^2 x$ であろうと予想されている。

$$y^2 = x^5-x^3-2x^2-2x-1$$

$$gal = D(5),\ det = 47^2$$

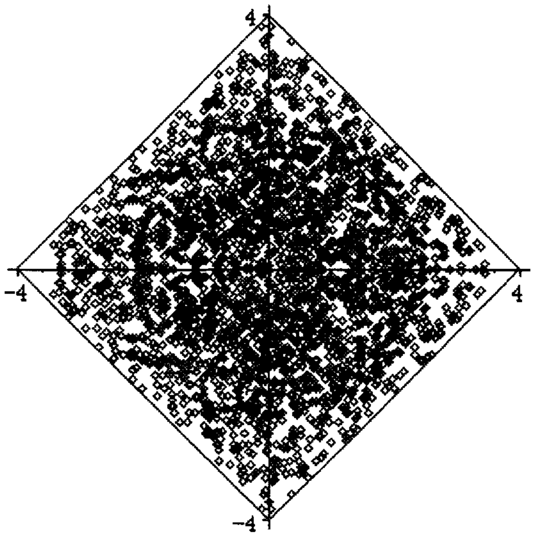
p = 3 ~ 11541



$y^2 = x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1$

$[a_p/\sqrt{p}\ ,\ \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ ]$

p = 3 ~ 11541



これについても、楕円分解方程式が因数分解する場合は多くない。
例えば、p = 3 ~ 11541 の範囲では t = 0 のみ存在し、それらは

[[19, 0, 18], [67, 0, 114], [83, 0, 86], [167, 0, 14], [349, 0, 518],
[619, 0, 518], [761, 0, 542], [919, 0, 1658], [1861, 0, 3702], [3449, 0, 5918],

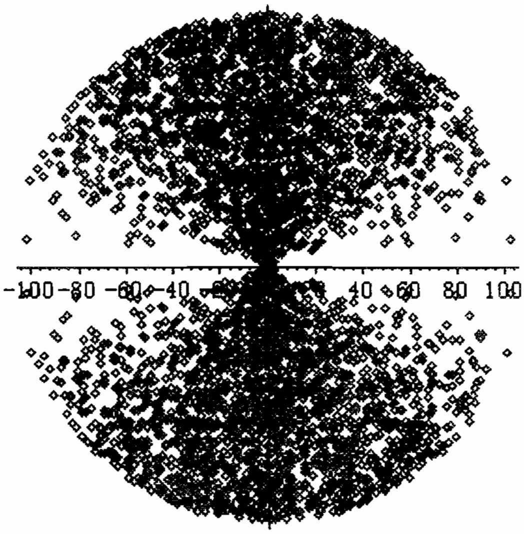
[5081, 0, 8882], [11483, 0, 3746], [11981, 0, 23782],…

である。恐らくは無限個存在するであろうことも同様である。

次のものは可約な場合である。

$$y^2 = x(x^2-1)(x^2+4)$$

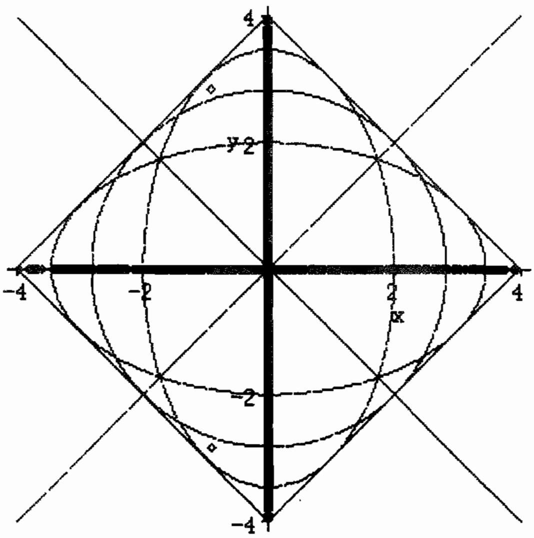
$$p = 2 \sim 11597$$



$$y^2 = x(x^2-1)(x^2+4)$$

$$[a_p/\sqrt{p},\ \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ ]$$

$$p = 2 \sim 11597$$



この場合はかなり極端である。楕円が退化して、t = 0, 4 のみとなり、x, y-軸の上にのみ集中している。この場合も、分布型は $\sin^2 x$ であろうと想像している。

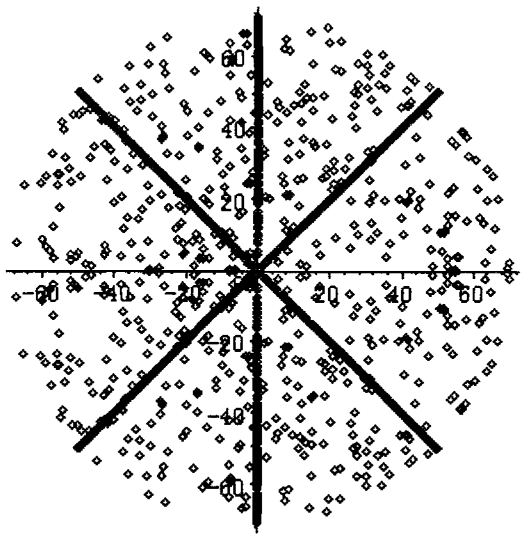
2.3　x^5-a の場合

この場合の、x^5-a が既約な場合、一般にはガロア群は

$$F(5) = M_{20}$$

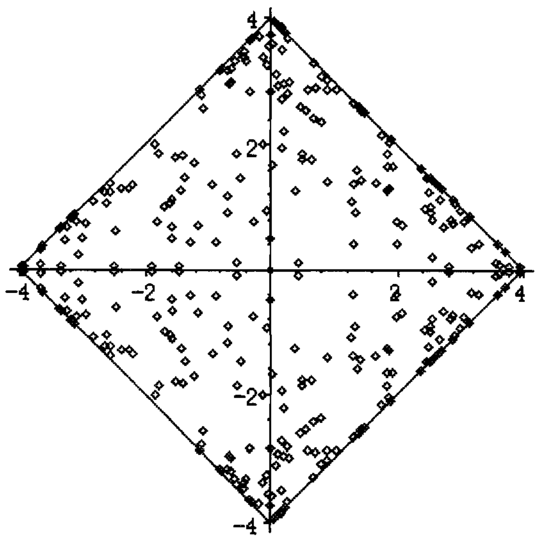
などと記される。位数(order) 20 の可解群(solvable group)である。

$y^2 = x^5-2,\ p = 3 \sim 5009$



$y^2 = x^5-2,\ p = 3 \sim 5009$

$[\, a_p/\sqrt{p}\ ,\ \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ ]$



2.4　t＝1 の楕円に対応するもの

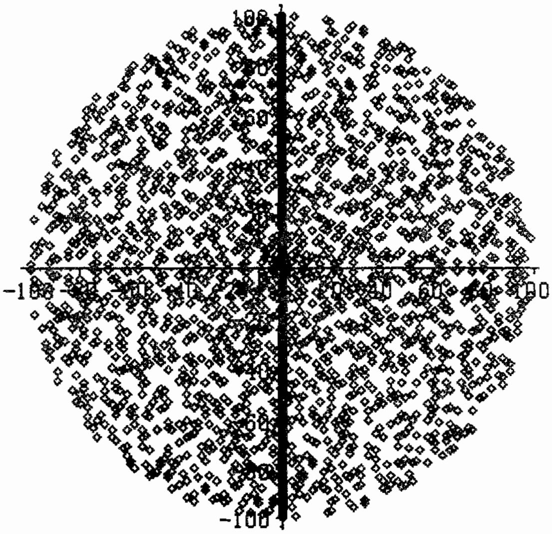
例として、2 次式と 3 次式に分解するものであるが

$$y^2 = x^5+5x^4-5x^3+10x^2-4x+4 = (x^2-x+1)(x^3+6x^2+4)$$

の場合を考えてみる。この場合も、楕円分解方程式は常に分解する。

$$y^2 = x^5+5x^4-5x^3+10x^2-4x+4 = (x^2-x+1)(x^3+6x^2+4)$$

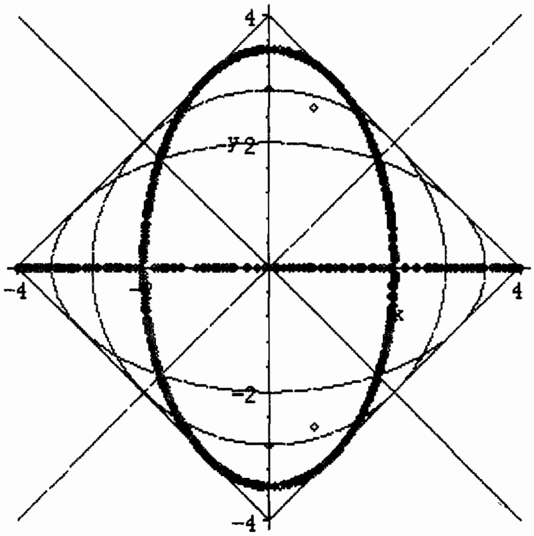
$$p = 2 \sim 10039$$



$$y^2 = (x^2-x+1)(x^3+6x^2+4)$$

$$\left[a_p/\sqrt{p}\ ,\ \sqrt{a_p{}^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ \right]$$

$$p = 2 \sim 10039$$

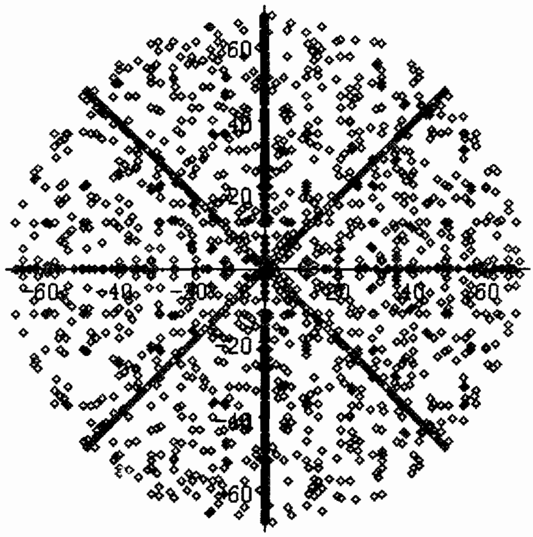


この場合は、接点の x 座標が 1、つまり、t = 1 の場合の楕円と、x-軸の上にのみ存在する。例外的な点は p=2 に対応するものだけである。

現在までの(私の)探査では、x 座標が 3 の楕円の上にのみ存在する超楕円曲線は知られていない。存在しないのかも知れないと考えているが…、興味ある問題である。

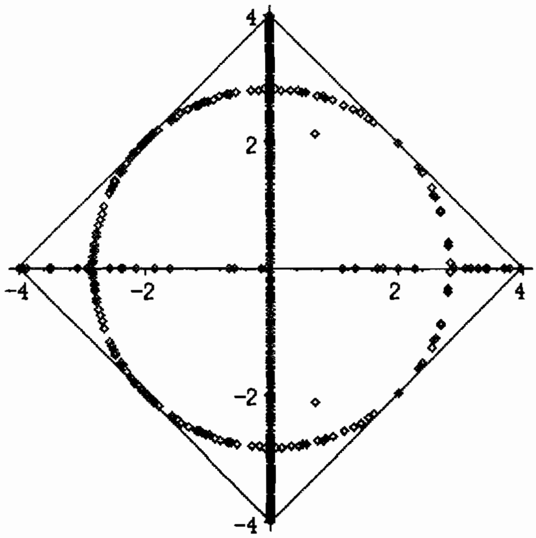
次の例は、奇関数の場合 $y^2 = x(x^4+8x^2+18)$ である。

$y^2 = x(x^4+8x^2+18)$, $p = 2 \sim 4649$



$y^2 = x(x^4+8x^2+18)$, $p = 2 \sim 4649$

$[\, a_p/\sqrt{p}\,,\ \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ ]$



この場合、x-軸とy-軸を除くと、半径 $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ の円周上に分布している。しかし、x成分が正の部分と負の部分では、個数が異なるような印象をうける。

実際のこの部分まで（$p = 2 \sim 4649$）のデータでは

負75個，y-軸510個，正43個，全体は628個である。正のものと負のものの比は（ここまででは不均衡であるが）

$$75/43 = 1.744186047 \fallingdotseq 7/4$$

であるが、どの程度極限の状態を近似しているか解らない。等しくない極限値をもつかどうかなど興味ある問題である。

$$y^2 = x(x^4-5x^2+5)$$

$$y^2 = x(x^4+5x^2+5)-11$$

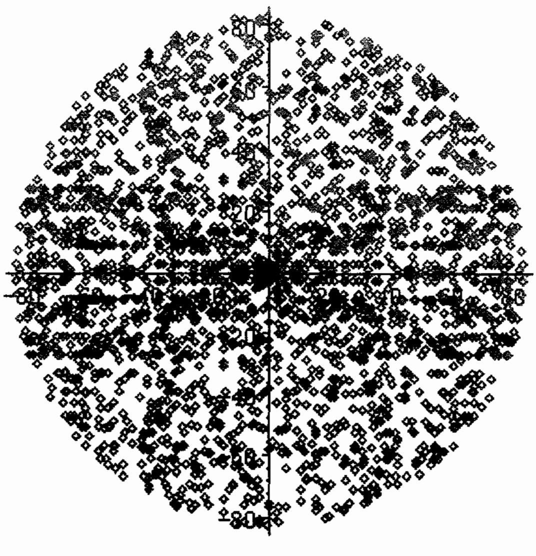
などの対比や類似は何を意味しているのであろうか。偶然と必然の間の関係も興味あることである。恐らく、無視も過度の関係を期待するのも…などと惑うところである。

2.5　$5 = \{0,1,2,3,4\}$ の2個に対応する場合。

今までには、$t \in 5$ の唯一つの図形の上に分布するものの例を知らないので、ここでは、$t \in 5 = \{0,1,2,3,4\}$ の二つの図形上に分布するもので知られているものについて記す。

例として、$y^2 = x^5+5x^3+5x-11 = (x-1)(x^4+x^3+6x^2+6x+11)$、あるいは、x に x-1 を代入すれば $y^2 = x(x^4+5x^3+15x^2+25x+25)$ と同値である。

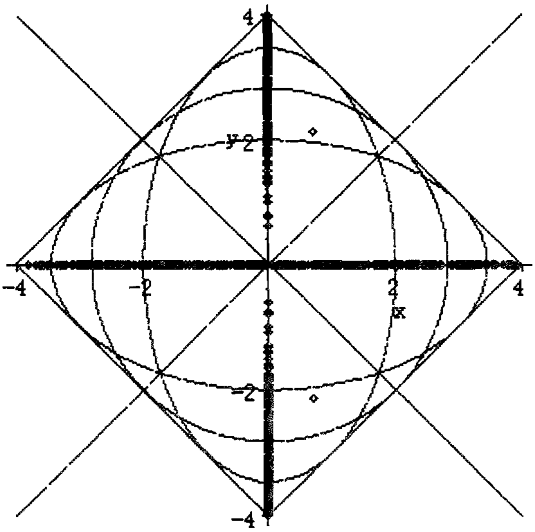
$$y^2 = x^5+5x^3+5x-11,\ p = 2 \sim 6869$$



$$y^2 = x^5+5x^3+5x-11$$

$$[a_p/\sqrt{p}, \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}]$$

$$p = 2 \sim 6869$$



である。この場合、y-軸上の成分は、原点の近傍には非常に少なく分布している。つまり、2根は斥力のある場に存在している如く分布している。

楕円分解方程式

$$f(x) = px^2-(2p+b)x+a^2$$

の整数解は、この場合、{0, 4}のみである。0, 4を共通にもつもの、つまり

$$[a_p/\sqrt{p}, \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}] = [0,0]$$

が原点になるものは、$p=2 \sim 6869$の範囲では9個で、それらは

[11, 0, 22], [131, 0, 262], [251, 0, 502], [491, 0, 982], [599, 0, 1198],

[1439, 0, 2878], [3371, 0, 6742], [5639, 0, 11278], [5879, 0, 11758]

である。このような素数は無限個存在するであろうけれども、密度は0であろうと思う。

a) 0が根の場合、つまりy-軸上の点の場合

$$y^2 = x^5+5x^3+5x-11,\ a_p = 0,\ p = 2 \sim 6869,\ [a_p/\sqrt{p}, \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}],$$

の場合は100までに

[3, 0, -2], [5, 0, 0], [7, 0, -10], [11, 0, 22], [13, 0, -22],

[17, 0, 2], [23, 0, -10], [37, 0, -70], [43, 0, 14], [47, 0, -58],

[53, 0, -70], [67, 0, -130], [73, 0, -142], [83, 0, -130], [97, 0, -190]…

だけ存在し、25個のうち15個で(ここまででは)過半数である。

しかし、$p=2\sim6869$ の範囲の素数 884 個のうち 456 個で

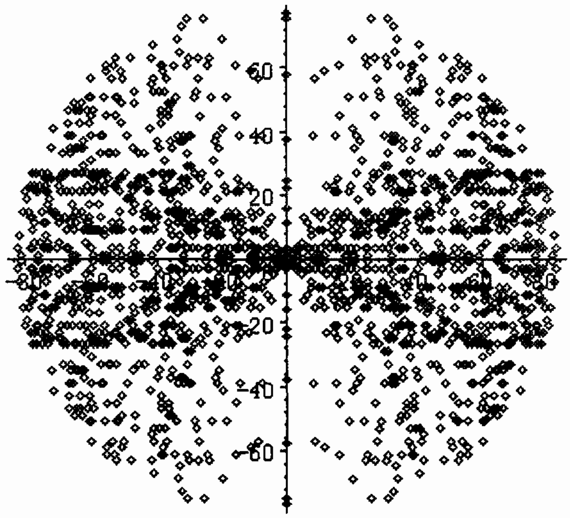
$$456/884 = 114/221 = 0.5158371041 \fallingdotseq 1/2$$

であり、恐らくは、密度は 1/2 の分布であろう。

そこでの複素根の分布は

$$y^2 = x^5+5x^3+5x-11,\ a_p = 0,\ p = 2 \sim 6869$$

$$[\,a_p/\sqrt{p}\ ,\ \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ ]$$

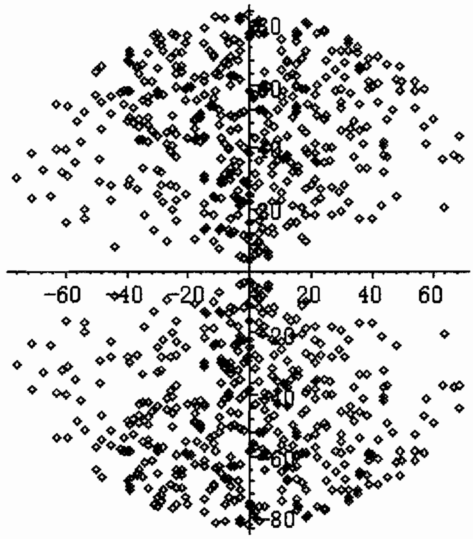


の如く、実数軸の近くに引き寄せられるように分布している。

b)　4 が根の場合、つまり x-軸上の点の場合

$$y^2 = x^5+5x^3+5x-11,\ a_p^2+8p-4b_p = 0,\ p = 2 \sim 6869$$

$$[\,a_p/\sqrt{p}\ ,\ \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ ]$$



のような分布である。これは、

$$\sin^2 x$$

分布を彷彿とさせる分布である。100までの素数では

[2, 1, 2], [19, 8, 54], [29, 12, 94], [31, -8, 78], [41, -12, 118],

[59, -24, 262], [61, -4, 126], [71, -24, 286], [79, -16, 222], [89, -12, 214],

である。その比は

$$436/884 = 109/221 = 0.4932126697 \fallingdotseq 1/2$$

であり、これも1/2の密度であろう。

2.5 楕円分解方程式の解が0のものが正の密度で存在するもの

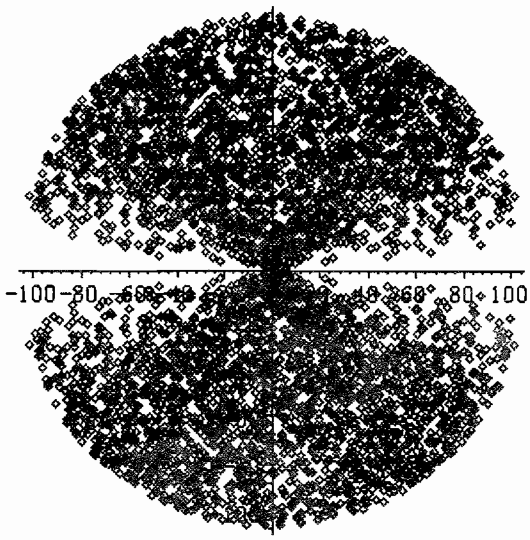
例として

$$y^2 = x^5+4x^3+12x^2+11x+4$$

をあげる。xにx+1を代入すると、$y^2 = x\,(x^4-5x^3+14x^2-10x+4)$と同値である。

$$y^2 = x^5+4x^3+12x^2+11x+4$$

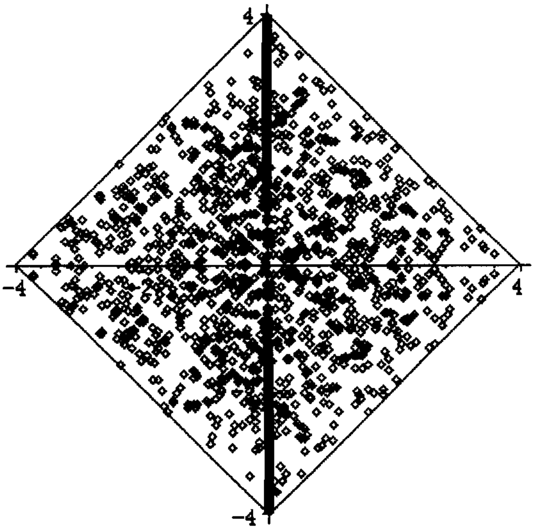
$$p = 2 \sim 11351$$



$$y^2 = x^5+4x^3+12x^2+11x+4$$

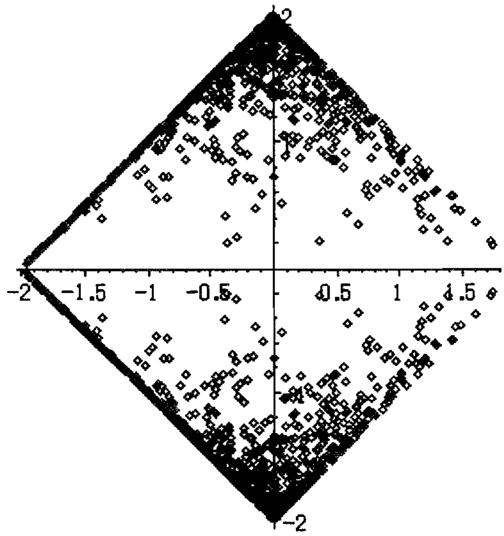
$$[\,a_p/\sqrt{p}\ ,\ \sqrt{a_p^2+8p-4b_p}/\sqrt{p}\ ]$$

$$p = 2 \sim 11351$$



また、楕円分解方程式の解の平面では

$$[\,b/(2p)-1,\ y:=\sqrt{(b+2p)^2-4pa^2}\,/(2p)\,]$$



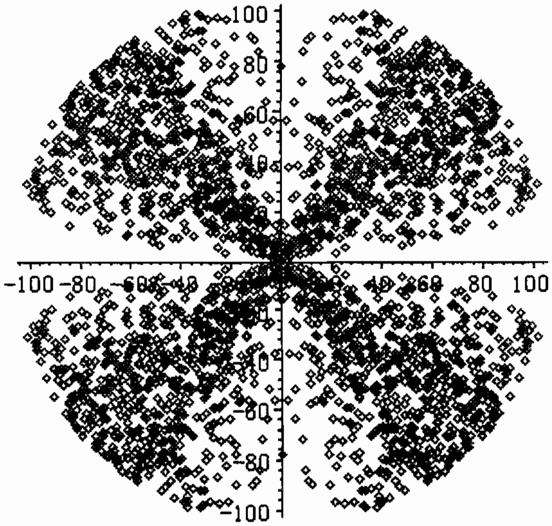
がその分布である。第 2,3 象限の辺が y-軸に対応している。

この場合、楕円分解方程式が解 0 をもつ場合とそうでない場合に分解することができる。a) 解 0 に対応する部分。

$$y^2 = x^5+4x^3+12x^2+11x+4$$

$$a_p = 0$$

$$p = 2 \sim 11351$$



この場合は、角の分布は、恐らくは、

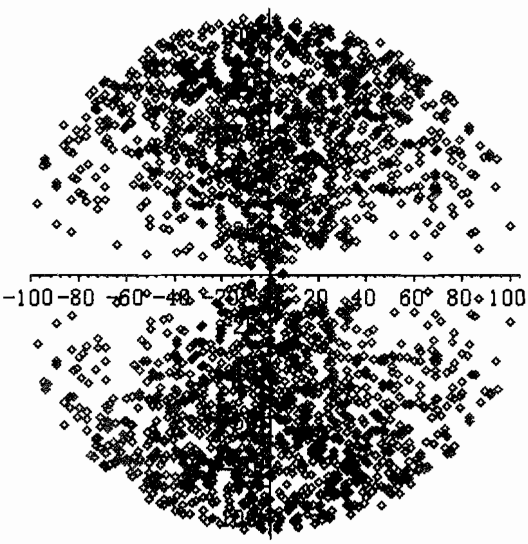
$$\sin^2 2x$$

に比例すると予想される。これは、久しく待っていた分布である。単独でこの分布をもつ曲線には未だ出会わないけれども、これが期待していたものである。(2007. 10. 06. 11:30)

$p = 2 \sim 11351$ の範囲の統計は、この範囲の素数が 1371 個で、715 個が $a_p = 0$ であり、715/1371 = 0.5215171408 ≒ 1/2 の意味するところは、半数が $\sin^2 2x$ の分布にそうであろうということである。

a) 残りの部分、

$$y^2 = x^5+4x^3+12x^2+11x+4,\ a_p \neq 0,\ p = 2 \sim 11351$$



$$656,\ 1371,\ 656/1371 = 0.4784828592 \fallingdotseq 1/2$$

何度も見慣れた

$$\sin^2 x$$

の分布である。この場合は、証明された訳ではないけれども、全体の分布が

$$\sin^2 x + \sin^2 2x$$

であろうという予想の意味づけを明確に示している。

3. 種数 3 の超楕円曲線

この場合は $f(x)$ は 7 次の重根をもたない多項式についての

$$C: y^2 = f(x)$$

の形の超楕円曲線である。以前と同様に

$$f_1(u) = f(x) \otimes x+u,\ f_2(u,v) = f(x) \otimes x^2+ux+v,\ ,\ f_3(u,v,w) = f(x) \otimes x^3+ux^2+vx+w,\ \cdots$$

と定義し、ルジャンドル記号の和

$$a_p = \Sigma x\in p\,(f_1(x)/p),\ b_p = \Sigma x,y\in p\,(f_2(x,y)/p),\ c_p = \Sigma x,y,z\in p\,(f_3(x,y,z)/p),\ \cdots$$

を考え、$f(x)$ の終結変換 (*resultant transform*) 多項式を

$$f_p(x) = x^6+a_px^5+b_px^4+c_px^3+pb_px^2+p^2a_px+p^3$$

と定義すれば $f_p(x)=0$ の根はすべて

$$\sqrt{p}\,e^{i\theta} = \sqrt{p}\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

の形をしていることが志村・谷山理論から知られており、一般の場合、つまり、$f(x)$ が可解でない (non-solvable) 場合は、その角分布は

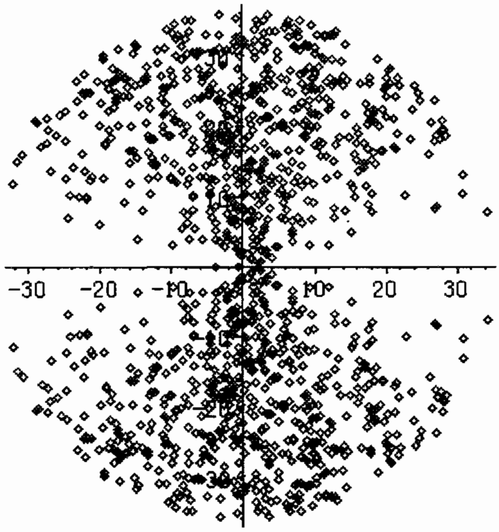
$$\sin^2\theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta.$$

に比例するであろうと予想されている。$f(x)$ が既約で可解な場合でも殆どの場合は上記の分布に従うのであるがその全体像は未だ知られていないと思う。

例えば、次の例はガロア群が可解群 D(7) をもつ場合であるが

$$C: y^2 = x^7+3x^6+2x^5-x^4-2x^3-2x^2-x-1$$

$$\mathrm{gal} = D(7),\ \det = 71^3,\ p = 2\sim1283$$



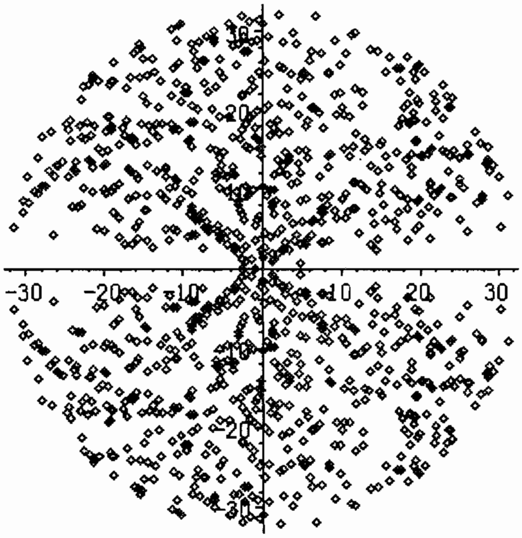
その角分布は

$$\sin^2\theta$$

に従うと予想される場合である。また、次の例は f(x)が可約(reducible)な場合であるが

$$C:\quad y^2 = x\,(x^4+2)\,(x^2+2x+2)$$

$$\det = 2^{21},\ p = 2\sim1063$$



角の分布は、一般の場合の

$$\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2 3\theta$$

に従うと考えられる。

ここでは、終結変換多項式(resultant transformation ppolynomial)の係数多項式

(coefficient polynomial)を考えてみよう。係数多項式は

$$f_p(x) = x^6+a_px^5+b_px^4+c_px^3+pb_px^2+p^2a_px+p^3 = (x^2+c_px+p)(x^2+d_px+p)(x^2+e_px+p)$$

と表現したときの実係数 c_p, d_p, e_p

$$|c_p|, |d_p|, |e_p| \le 2\sqrt{p}$$

を根とする3次の方程式であって、

$$x^6+ax^5+bx^4+cx^3+pbx^2+p^2ax+p^3 \otimes x^2+ux+p = (u^3-au^2+(b-3p)u+2pa-c)^2$$

から求まる多項式

$$x^3-ax^2+(b-3p)x+2pa-c$$

である。

3.1 係数方程式の解の分布

ここでは、係数方程式の解が特徴的な分布をする二三の例

$$f(x) = x^7+k, \quad x(x^6+ax^4+bx^2+c), \quad x(x^6+ax^3+b)$$

を示すが、やはり全体像は未知である。

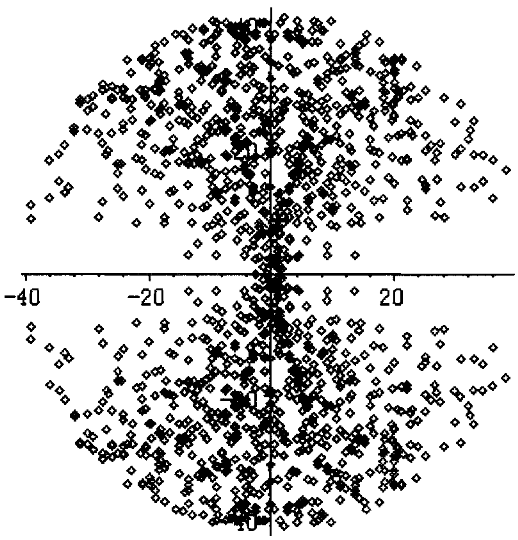
例 1. $f(x) = x(x^6+x^3+1)$

この場合は、角分布は $\sin^2\theta$ に従うと予想される場合である。

$$C: \quad y^2 = x(x^6+x^3+1)$$

$$f_p(x) = x^6+a_px^5+b_px^4+c_px^3+pb_px^2+p^2a_px+p^3 = 0$$

$$p = 2 \sim 1733$$

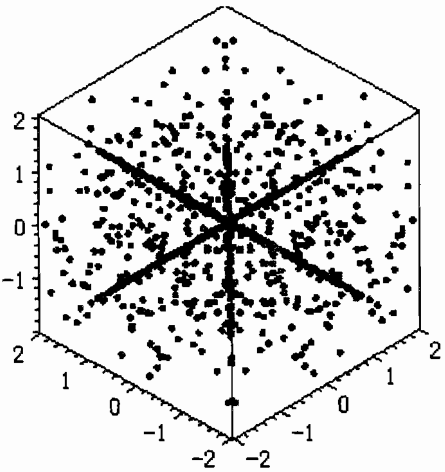


以下の図は、係数方程式

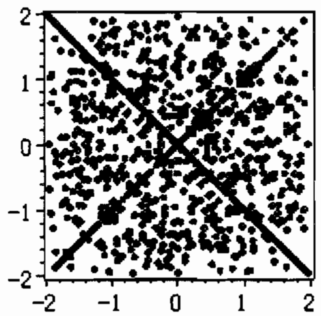
$$x^3-ax^2+(b-3p)x+2pa-c = 0$$

の3根の $1/\sqrt{p}$ の形に標準化したものの3次元空間表示である。最初のも

のは x = y = z の方向から見たもの、何個かの平面上に分布している。



同じものを xy-平面に射影したもの。



次のものは、偏角を倍にした場合の係数方程式の解の分布である。この方程式は、余弦の倍角の公式

$$\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1$$

から得られる $g(x)=2x^2-1$ を用いて、この場合は 2 に標準化しているので、

$$y=2g(x/2)=x^2-2$$

に注意して、

$$x^3-ax^2+(b-3p)x+2pa-c \otimes y-(x^2-2)=$$

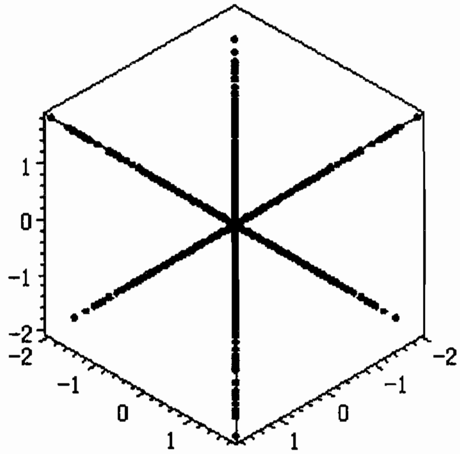
$$y^3+(-a^2+2b)y^2+(-3+2b-2ac+b^2)y+2-4b-c^2+2b^2$$

が得られる。

$$C:\quad y^2 = x(x^6+x^3+1)$$

$$y^3+(-a^2+2b)y^2+(-3+2b-2ac+b^2)y+2-4b-c^2+2b^2 = 0$$

$$p = 2 \sim 1733$$



この場合、倍角に関する係数方程式

$$g(y) = y^3+(-a^2+2b)y^2+(-3+2b-2ac+b^2)y+2-4b-c^2+2b^2 = 0$$

は常に重根をもつことが予想される。例えば、次のものは、最大公約因子

$$(g(y), g'(y))$$

の $p = 3 \sim 97$ の表である：

$$[3, 3], [5, 9+5y], [7, 7y+5], [11, -3+11y], [13, 1+13y], [17, (17y+30)^2],$$

$$[19, (19y+22)^2], [23, 45+23y], [29, -23+29y], [31, 61+31y], [37, (37y+38)^2],$$

$$[41, 73+41y], [43, 85+43y], [47, 85+47y], [53, (53y+102)^2], [59, -3+59y],$$

$$[61, 73+61y], [67, 133+67y], [71, 126+71y], [73, 142+73y], [79, 157+79y],$$

$$[83, 165+83y], [89, -146+89y], [97, 25+97y]$$

かなり多くのものは完全立方になっている。$p = 2 \sim 1733$ の範囲では

$$p = 17, 19, 37, 53, 107, 163, 181, 307, 683, 719, 883, 937, 991, 1187, 1531, \cdots$$

である。

例 2. $f(x) = x(x^6+1) = x(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

この場合は、一様分布と点分布に従うと予想される場合である。最初の方の

$$[p, a_p, b_p, c_p]$$

の表は

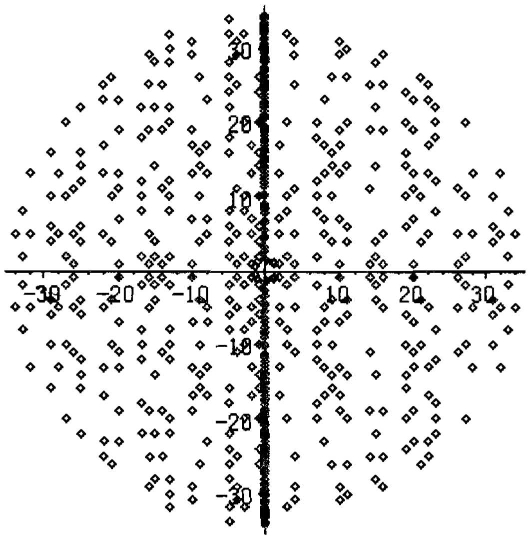
[2, 0, 0, -2], [3, 0, 3, 0], [5, -2, -1, 12], [7, 0, 21, 0], [11, 0, 33, 0], [13, -6, 3, 60],
[17, -2, -13, 60], [19, 0, 57, 0], [23, 0, 69, 0], [29, -10, 71, -420], [31, 0, 93, 0],
[37, -6, 123, -452], [41, -10, 59, -180], [43, 0, 129, 0], [47, 0, 141, 0],
[53, 14, 143, 1260], [59, 0, 177, 0], [61, -30, 483, -4660], [67, 0, 201, 0],
[71, 0, 213, 0], [73, -6, 183, -660], [79, 0, 237, 0], [83, 0, 249, 0], [89, -10, 11, 780],
[97, 18, -33, -2340], [101, -2, -97, 396], [103, 0, 309, 0], [107, 0, 321, 0],
[109, -6, 291, -1092], [113, 14, 83, -420], [127, 0, 381, 0], [131, 0, 393, 0],
[137, 22, 347, 4620], [139, 0, 417, 0], [149, 14, 47, -1428], [151, 0, 453, 0],…

などである。$a_p = c_p = 0$ となる場合が $\theta = 0$ に対応し、ここまでは 18/36 = 1/2 の密度は、偶然であろうが、丁度 1/2 である。

$$C:\quad y^2 = f(x) = x(x^6+1) = x^7+x$$

$$f_p(x) = x^6+a_px^5+b_px^4+c_px^3+pb_px^2+p^2a_px+p^3 = 0$$

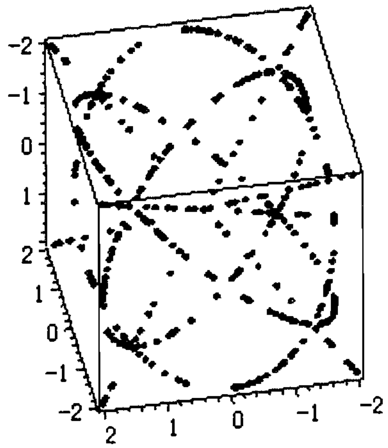
$$p = 2 \sim 1193$$



$$C:\quad y^2 = f(x) = x(x^6+1) = x^7+x$$

$$x^3-ax^2+(b-3p)x+2pa-c = 0$$

$$p = 2 \sim 1193$$

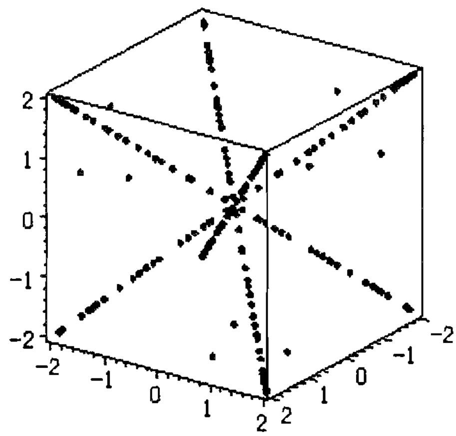


のような、なかなか美しい曲線上に分布している。倍角の係数方程式については

$$C:\quad y^2 = x(x^6+x^3+1)$$

$$y^3+(-a^2+2b)y^2+(-3+2b-2ac+b^2)y+2-4b-c^2+2b^2 = 0$$

$$p = 2 \sim 1193$$



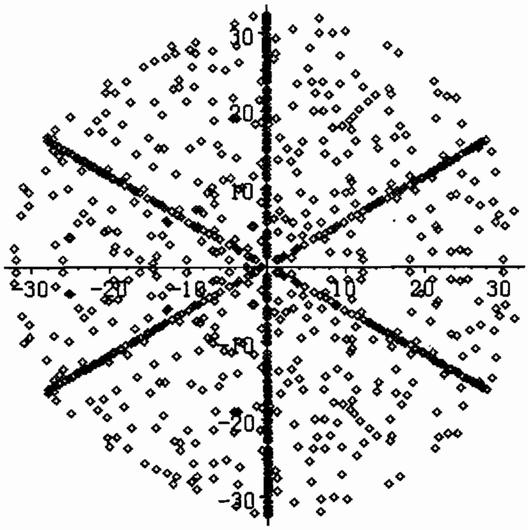
のように p＝2 を除いてすべて直線の上に分布している。

例 3.　$f(x) = x^7-2$

$$C:\quad y^2 = f(x) = x^7-2$$

$$f_p(x) = x^6+a_px^5+b_px^4+c_px^3+pb_px^2+p^2a_px+p^3 = 0$$

$$p = 2 \sim 1061$$

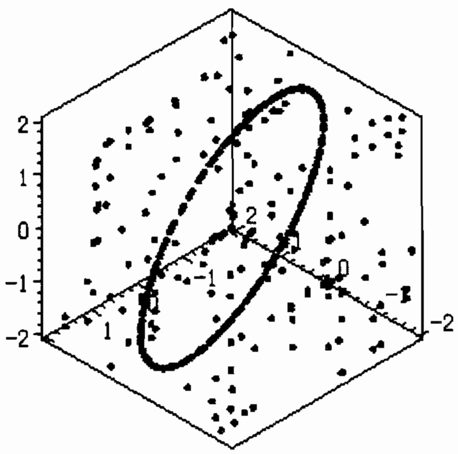


これに関しても、係数方程式の根は、円の上と、平面などに退化しない分布との和になっているようである。

$$C: \quad y^2 = f(x) = x^7 - 2$$

$$x^3 - ax^2 + (b-3p)x + 2pa - c = 0$$

$$p = 2 \sim 1061$$



倍角の係数方程式の方はやはり円を含むが、3倍角の分布は円が直線に変化した図形を含む。3倍角については、

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$$

より、$h(x) = 4x^3 - 3x$ とおき、$2h(x/2) = x(x^2-3)$ から、

$$x^3 - ax^2 + (b-3p)x + 2pa - c \otimes y - x(x^2-3) =$$

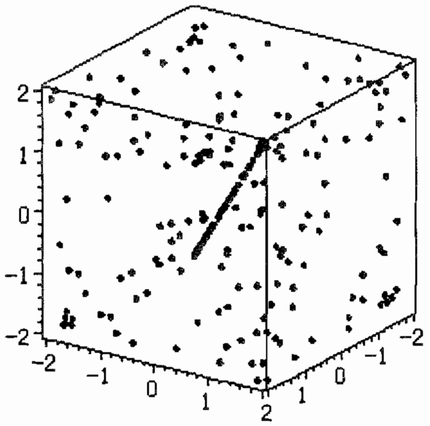
$$y^3+(3ba-3c-a^3)y^2+(-3abc+3c^2-3a^2+3ba^2+b^3-3b^2)y-c^3+3cb^2+3a^2c-6ab^2+2a^3$$

を得るので、これが3倍角の係数方程式である。

$$C:\quad y^2=f(x)=x^7-2$$

$$y^3+(3ba-3c-a^3)y^2+(-3abc+3c^2-3a^2+3ba^2+b^3-3b^2)y-c^3+3cb^2+3a^2c-6ab^2+2a^3=0$$

$$p=2\sim 1061$$



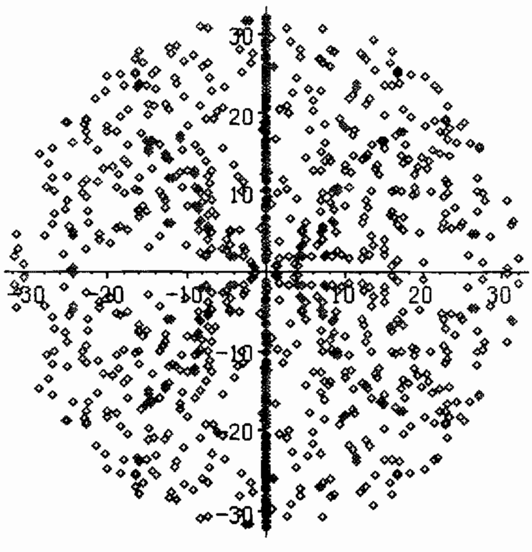
例 4. $f(x)=x(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)=x^7-14x^5+49x^3-36x$

この例では円は現れないが、直線の線分が現れる。

$$C:\quad y^2=f(x)=x(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$$

$$f_p(x)=x^6+a_px^5+b_px^4+c_px^3+pb_px^2+p^2a_px+p^3=0$$

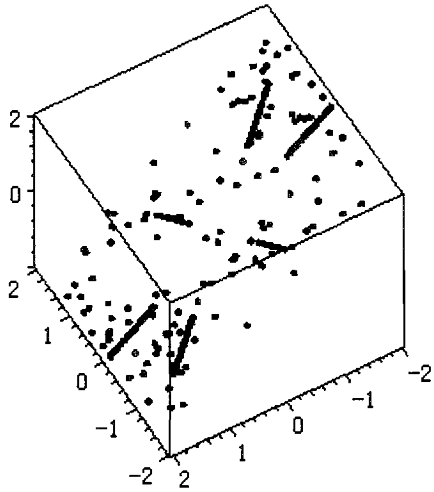
$$p=2\sim 1033$$



$$C:\quad y^2 = f(x) = x(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$$

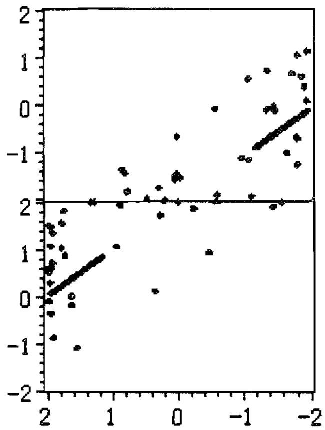
$$x^3-ax^2+(b-3p)x+2pa-c = 0$$

$$p = 2 \sim 1033$$



この場合、6本の線分は一平面上にある。残りの点も空間の全体を満たしている訳ではなく存在の禁止空間が存在する。

以下の図は、xy-平面に射影したものである。一つの直線は中央の点に退化して示されている。直線の存在範囲にもかなり制限が存在するようである。



ここまで特殊な例を数例あげてきた。しかし、一般の曲線では、係数方程式の根の分布は曲面あるいはこの場合のように曲線に退化する例は、少

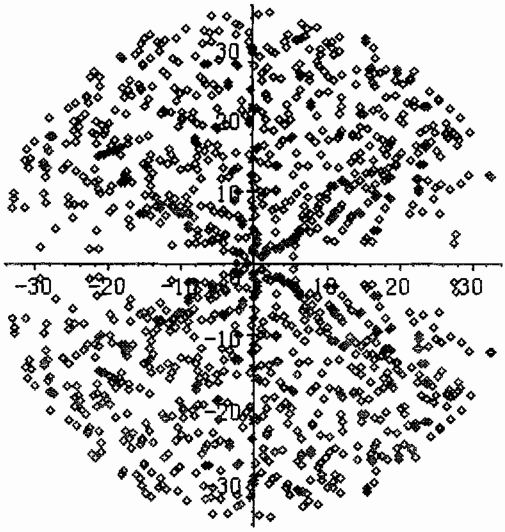
なくとも私は多く知らない。

例 5. $f(x) = (x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1) = x^7-x^5+x^4+x^3-x^2+1$

$$C: \quad y^2 = f(x) = (x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1) = x^7-x^5+x^4+x^3-x^2+1$$

$$f_p(x) = x^6+a_px^5+b_px^4+c_px^3+pb_px^2+p^2a_px+p^3 = 0$$

$$p = 2 \sim 1223$$



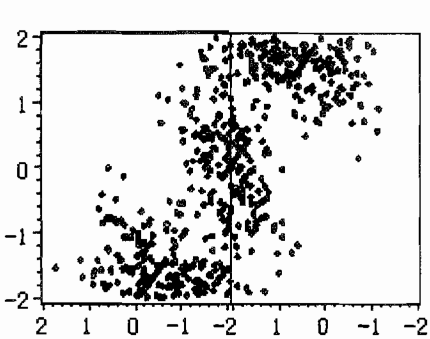
この例の場合も分布は一般の場合の

$$\sin^2\theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta$$

に従うと考えられる。

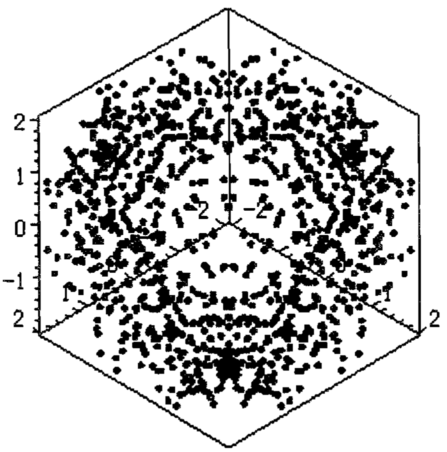
$$C: \quad y^2 = f(x) = (x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$$

$$x^3-ax^2+(b-3p)x+2pa-c = 0, \ p = 2 \sim 1033$$



のような分布になる。この場合は、あまり濃くないが線状の構造が見える。しかし、一般の場合はこのように退化の傾向はみられないようであるが、S字状の形に濃く分布するというのが常のようである。

以下の図は、倍角の係数方程式の解の空間像である。



現在の段階では、種数 3 の超楕円曲線の角分布の類型の全体構造は、私には、見えてはいないけれども処理不可能な程の複雑性をもっているとは考えていない。唯、一つづつの例を得るための計算量が大きいために多くの例を検討することができないのである。

参考文献

[1] Kanji Namba; genus 2 hyper-elliptic curves and resultant transformation 2006 年度応用数学合同研究集会報告集 Ryukoku Univ. 2006. pp.57-62

[2] 難波完爾; 種数 2 の超楕円曲線と $\sin^2$-予想, 津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 28, 第 17 回数学史シンポジウム (2006), pp.101-174.

[3] Kanji Namba; genus 3 hyper-elliptic curves and resultant transformation 2007 年度応用数学合同研究集会報告集 Ryukoku Univ. 2007. pp.102-107