オイラーとファニャノの楕円積分論

高瀬正仁（福岡県福岡市）

［凡例］
1．ファニャノの論文を訳出して引用する場面で，4枚の図20,21,22,23を参照するように指示する箇所がある．その際，図の番号はファニャノの原論文に附されている通りとし，末尾にまとめて掲示した．
2．末尾に添えたファニャノの肖像はファニャノの数学著作集から採った．この画像のファニャノは，レムニスケート曲線が描かれた紙片を手にしている．

はじめに

楕円積分，特にレムニスケート積分に関するファニャノの5篇の論文と，それらの影響を受けてオイラーが書いた2篇の論文をはじめて読んだのは昭和63年(1988年)のことであるから，すでに20年の昔の出来事である．当時，耳にしたうわさでは，オイラーは積分の理論において行き詰まっていたところ，ファニャノの論文に接して打開することができたということであった．そこで，

(1) オイラーのいう積分の理論とは何か

(2) 行き詰まりというのは具体的にはどのようなことなのか

(3) ファニャノは何をしたのか

(4) ファニャノはいかなる点でオイラーに影響を及ぼしたのか

等々，いくつかの素朴な疑問が浮かび，ファニャノに関心を寄せる契機が形成されたのである．

オイラー以後の積分論ということであれば，コーシー積分のコーシーやリーマン積分のリーマンの名が即座に浮かぶが，コーシーやリーマンによる積分の定義がなくとも，積分の理論はオイラーの時代にすでにあり，ファニャノもまたオイラーと同じ場に生きていた．しかもその積分論はオイラーの発明というわけでもなく，オイラーはオイラー以前の理論をライプニッツやベルヌーイ兄弟たちから継承したのである．オイラーのいう積分論というのは，ひとことで言えば「微分方程式の解法理論」のことであり，オイラーの行き詰まりという出来事の内実は，あるタイプの微分方程式の積

分を見つけることができなかった点に認められる．それなら，オイラーのいう「積分」とコーシーやリーマンの意味での積分，すなわち今日の通有の意味における「積分」との関係もまた問題になると思う．この論点を押していけば，微積分の始まったころの状勢におのずと立ち返ってしまう．

20年前，おおよそこのような疑問を念頭に置いてファニャノとオイラーの諸論文を読んだが，一読して不審はほぼ解消した．だが，オリジナルを読んであらたに発生した疑問もあった．すなわち，ファニャノがオイラーに及ぼした影響の様相は諒解できたが，それならファニャノ自身の数学的意図はどのようなものだったのであろうか，という疑問である．そこで本稿ではこの論点に着目し，問題の姿形の輪郭を明確にしたいと思う．最終的な結論を下すにはオイラー以前の微積分を深く研究しなければならないが，まだ不明な事柄が多く，確信のもてる結論には到達していない．

1. ファニャノとオイラーの出会い―論文[E252]の序文より―

ファニャノは1682年12月6日にイタリア中部の町シニガリアに生れた人である．シニガリアは現在のマルケ州アンコーナ県のコムーネ「セニガリア」に該当する．イタリアの貴族だったようで，オイラーも「ファニャノ伯爵」と敬称をつけて呼んでいる．1750年，68歳のファニャノはそれまでに蓄積された論文をまとめ，

『数学論文集』（全二巻）

を刊行した．この論文集がベルリンのオイラーのもとに届けられたのは，翌1751年と記録されている．

ファニャノの数学論文集に収録されている5篇の基礎的論文は次の通りである．

1. 楕円，双曲線およびサイクロイドの弧の新たな測定を取り出すことのできる一定理
2. レムニスケートを測定する方法　第一論文
3. レムニスケートの測定に関する第一論文への補足
4. レムニスケートを測定する方法　第二論文
5. 主三次放物線の弧の新たな測定の仕方を見つける方法

ファニャノの論文集を受けてオイラーが執筆した二論文は次の通り．ともにオイラー

全集，第一系列，巻20に収録されている．

1. ［E251］微分方程式 $\frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{n\,dy}{\sqrt{1-y^4}}$ の積分について

初出はペテルブルグ帝国科学アカデミー新紀要6(1756/7年．1761年刊行), 37-57頁．オイラー全集，第一系列，巻20，58-79頁．1753年4月30日，ペテルブルグのアカデミーに提出された．

2. ［E252］求長不能曲線の弧の比較に関するさまざまな観察

初出はペテルブルグ科学アカデミー新紀要6(1756/7年．1761年刊行), 58-84頁． オイラー全集，第一系列，巻20, 80-107頁．1752年1月27日，ベルリンのアカデミーに提出された．

エネストレームナンバーは初出誌への掲載順に割り当てられているが，実際に執筆されてアカデミーに提出された順序は逆で，［E252］の方が［E251］より先である．［E252］の提出日は1752年1月27日であるから，前年，ファニャノの論文集を受け取ってすぐに想を得て，書き始めた様子がうかがえるように思う．

最初の論文［E252］の書き出しの部分は次の通り．解析学の重要さが指摘されている．

《数学の諸考察は，もしそれらの有益さに目を留めることにするならば，二通りのグループに分けなければならないように思われる．第一のグループには，ひとつには日常の生活のために，またひとつには，わけても他の諸学問のために数々の著しい利益をもたらしてくれる諸考察を所属させるのが至当であろう．そのために，それらの考察の値打ちは，その利益の大きさに基づいて判断される習わしになっているのである．他方，もうひとつのグループには，決して顕著な利益を伴うわけではないが，それにもかかわらず解析学の領域を拡大するために，また，われわれの生来の資質を高めるためによいきっかけを与えてくれるような諸考察が含まれている．実際のところ，解析学が衰退するというだけで，その代償として，大きな利益が期待されるきわめて多くの研究の放棄を強いられることになるのである．それゆえ，解析学のあなどるべからざる進展を約束する諸考察を基準にして，少なからざる価値の判断がなされるべきなのではないかと思う．ところが，この目的にとっては，ほとんど偶然になされて，また経験を通じて発見された諸観察，それらに到達するべきまっすぐな道筋を通じてのアプリオリな理由づけがほんの

かすかにしか，あるいはまったく認められないような諸観察が，とりわけ適切であるように思われる．もちろん，すでに知られている事実に関しては，そこにまっすぐに導いてくれるいろいろな方法により，いっそう容易に調べることができるであろう．他方，探究されるべき新しい方法により，解析学の領域が適度に，もしくは十分に拡大されるということが起らないとも思われない．》

この長い前置きの眼目は，「この目的にとっては，ほとんど偶然になされて，また経験を通じて発見された諸観察，それらに到達するべきまっすぐな道筋を通じてのアプリオリな理由づけがほんのかすかにしか，あるいはまったく認められないような諸観察が，とりわけ適切であるように思われる」という所見を表明するところに認められるように思う．大きな進展の端緒が開かれるためには，個々の数学的発見が重要であるというのである．明らかにファニャノの発見を念頭に置いてなされた発言である．ファニャノの発見にはアプリオリな根拠はないが，それでもなお解析学の進展のための第一着手を与えてくれるというのである．

オイラーの言葉は続き，ファニャノの発見に寄せる関心の所在が具体的に語られていく．

《ところで，私は最近刊行されたファニャノ伯爵の著作の中で，確実な方法でなされたのではなく，また，その理由づけは奥深く隠されているように思われる観察をいくつか見いだした．それゆえ，それらの観察はありとあらゆる注目に値するとみなされてしかるべきであるが，他方，それらの観察のいっそう立ち入った究明に費やされて実を結ばずに終った努力は，公にされるべきではないであろう．ところで，この本では，楕円，双曲線，それにレムニスケートが備えている二三の著しい性質が語られて，これらの曲線の相異なる弧と弧が相互に比較されている．それらの性質の根拠は奥深く隠されているように思われるのであるから，私が深い関心を寄せないとは全く信じられないことである．もし私がそれらをいっそう注意深く調べたとして，それによって私の心がこれらの曲線にいっそう引きつけられることになったとするならば，私はその旨を人々に伝えたであろう．》

《まず第一に，これらの曲線に関する限り，それらの求長は解析学のあらゆる手段を越えている事柄であって，それらの曲線の弧は代数的に表現されえないばかりではなく，円や双曲線の求積法に帰着させることもできないこと

はよく知られている．ファニャノ伯爵は，楕円と双曲線については，それらの差を幾何学的に指定することができるような二つの弧を無限に多くの仕方で提示することが可能であることを発見している．また，レムニスケートについては，等しいか，もしくは一方が他方に対して比率2をもつような二つの弧を無限に多くの仕方で与えることができることを発見し，そのことから次々と，やはりこの曲線において他の相互比をもつような弧を指定する方法を得ている．ファニャノ伯爵がどのようにしてこれらの事柄を発見したのかということについては，むしろ不思議なことと思わなければならない．》

《楕円と双曲線に対しては，確かに，私はこれ以上究明を進めることはできない．それゆえ，私はそれらの差を幾何学的に示すことが可能であるような弧と弧のいっそう容易な構成を与えたことで満足するであろう．だが，レムニスケートに対しては，同じ歩みを押し進めて，決して無数というわけではないが，はるかに多くの公式を私はみいだした．それらの公式の助けを借りて，私は，等しいか，あるいは相互比2をもつような二つの弧を無限に多くの仕方で定めることができるばかりか，どのような相互比をもつ二つの弧を定めることもまたできるのである．》

このような序文に続いて，オイラーは本論に入っていく．本論は三部に分かれ，

Ⅰ　楕円

Ⅱ　双曲線．

Ⅲ　レムニスケート

というふうに，三種類の曲線が次々と取り上げられていく．究明の目標は序文に明記されている通りだが，これらの曲線の求長，すなわち弧長の算出は解析学のあらゆる手段を越えているとオイラーは言う．弧長を表す積分，すなわち弧長積分を書き下すことは可能だが，それらの積分を「代数的に」表示することはできないという意味の数学的事実の指摘だが，そればかりではなく，「円や双曲線の求積法に帰着させることもまたできない」とオイラーは付言した．これらは周知の事実として，ファニャノは，

(1)　楕円と双曲線については，それらの差を幾何学的に指定することができるような二つの弧を無限に多くの仕方で提示することが可能であること

(2)　レムニスケートについては，等しいか，もしくは一方が他方に対して比率2をもつような二つの弧を無限に多くの仕方で与えることができること

を示し，レムニスケートについてはなお一歩を進めて，

(3)　2以外の相互比をもつ弧を指定する方法

を得た．オイラーはそのようにファニャノの諸論文を要約したうえで，「ファニャノ伯爵がどのようにしてこれらの事柄を発見したのかということについては，むしろ不思議なことと思わなければならない」というのである．どうしてこのような発見に到達したのかわからないが，これらは何かしら大きな数学的領域の糸口であることを，オイラーは洞察したというのであろう．そのオイラーの直観や洞察にも，アプリオリな根拠があるわけではない．

3.　ファニャノの発見(1)　レムニスケートの等分

オイラーが要約したファニャノの諸結果のうち，レムニスケートに関するものは広く知られていると思う．第二番目の，「レムニスケートについては，等しいか，もしくは一方が他方に対して比率2をもつような二つの弧を与えること」というのは，レムニスケートの弧を任意に指定するとき，それと同じ長さをもつもうひとつの弧（その弧は，与えられた弧とは別の始点を設定して描く），および二倍の長さをもつ弧を与えることを意味するが，二倍化のする方程式を解くことにより，「任意に指定された弧を二等分すること」もまた可能である．この始点を押し進めていくと，第三番目の指摘，すなわち「2以外の相互比をもつ弧を指定する方法」に到達する．もう少し具体的に言うと，レムニスケートの第一象限内の部分（以下，「四分の一部分」と略称する）を三等分する方法と五等分する方法を，ファニャノは発見したのである．これらの発見を，任意の弧の二等分の可能性と組み合わせると，次のように言える．

《第一論文においてレムニスケートの四分の一部分を二等分する方法を示したが，この論文の問題Ⅰと問題Ⅱでは，同じ四分の一部分を三等分する方法と五等分する方法を発見した．このことから明らかになるように，上記の問題Ⅳの解決により，レムニスケートの四分の一部分は三通りの式，すなわち2×2^m，3×2^m，5×2^mという形の式で表される個数だけの部分に，代数的に等分可能である．ここで，冪指数mは任意の正整数を表す．》

ファニャノは「レムニスケートを測定する論文　第二論文」の末尾でこのようなめざましい事実を指摘し，そのうえで

「これは私の曲線の新しくて特異な性質である」

と魅惑的な一語を言い添えた．後年，ガウス，アーベルによる楕円関数の等分理論の端緒を開くことになる大きな発見だが，オイラーの積分論に影響を及ぼしたのはこれではない．

3. ファニャノの発見(2)—曲線上の二つの弧の差を幾何学的に指定すること—

オイラーによる要約によれば，ファニャノにはもうひとつの発見がある．それは楕円と双曲線を対象にするもので，これらの曲線の二つの弧を，それらの差が「幾何学的に」指定可能であるような仕方で無数に提示することができるという事実である．この発見を記述したのが，ファニャノの論文

「楕円，双曲線およびサイクロイドの弧の新たな測定を取り出すことのできる一定理」

である．

二つの弧の差を「幾何学的に」指定できるということの意味を明らかにしなければならないが，ファニャノの言葉を直截引けば，おのずと諒解されると思う．このファニャノの論文にはただひとつの主定理が提示され，それを次々と双曲線，楕円，サイクロイドに適用すると，上記の通りの数学的状勢が現れるのである．主定理は次の通り．

論文「楕円，双曲線およびサイクロイドの弧の新たな測定を取り出すことのできる一定理」の主定理

定理　下記の二つの多項式 X と Z において，また方程式 (1) において，文字 h，l，f，g は任意の定量を表すとしよう．

第一に，もし方程式 (1) において冪指数 s が $+1$ を表すなら，二つの多項式の結合 $X+Z$ の積分は $\dfrac{-hxz}{\sqrt{-fl}}$ に等しい．

第二に，もし同じ方程式 (1) において冪指数 s が -1 を表すなら，$X+Z$ の積分は $\dfrac{xz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$ に等しい．

$$(X)\qquad \frac{dx\sqrt{hx^2+l}}{\sqrt{fx^2+g}}$$

$$(Z)\qquad \frac{dz\sqrt{hz^2+l}}{\sqrt{fz^2+g}}$$

$$(1)\qquad (fhx^2z^2)^2+(flx^2)^s+(flz^2)^s+(gl)^s=0$$

この事実それ自体は簡単な微分計算で確かめられるが，どうして発見することができたのかと問うと，説明はむずかしい．オイラーはこのような命題を指して，アプリオリな根拠を欠く経験的観察事項と評したのである．ファニャノに追随して証明を追うと，次のように進行する．

主定理の証明

第一に，もし方程式(1)において冪指数sが$+1$を表すなら，二つの多項式の結合$X+Z$の積分は$\frac{-h\,x\,z}{\sqrt{-f\,l}}$に等しい．

第二に，もし同じ方程式(1)において冪指数sが-1を表すなら，$X+Z$の積分は$\frac{x\,z\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$に等しい．

(X) $$\frac{dx\sqrt{h\,x^2+l}}{\sqrt{f\,x^2+g}}$$

(Z) $$\frac{dz\sqrt{h\,z^2+l}}{\sqrt{f\,z^2+g}}$$

(1) $$\left(f\,h\,x^2z^2\right)^2+\left(f\,l\,x^2\right)^s+\left(f\,l\,z^2\right)^s+\left(g\,l\right)^s=0$$

この定理の第一の部分の証明—方程式(1)から，方程式

(2) $$z=\frac{\sqrt{-f\,l\,x^2-g\,l}}{\sqrt{f\,h\,x^2+f\,l}}$$

が生じる．また，同じ方程式(1)からxの値が導出されるが，その場合，方程式(2)におけるzがxを用いて与えられるのとまさしく同様にして，xはzを用いて与えられる．そこで，多項式Xではzを使い，多項式Zではxを使うと，

(3) $$X+Z=\frac{dx\sqrt{-l}}{z\sqrt{f}}+\frac{dz\sqrt{-l}}{x\sqrt{f}}$$

が得られる．

ところが，方程式(1)を微分して，その後に$2\,f\,x\,z$で割ると，

$$h\,z\,dx+h\,x\,dz+\frac{l\,dx}{z}+\frac{l\,dz}{x}=0$$

が判明する．すなわち，諸項の配置を変えて，$\sqrt{-f\,l}$で割ると，

$$\frac{dx\sqrt{-l}}{z\sqrt{f}}+\frac{dz\sqrt{-l}}{x\sqrt{f}}=\frac{h\,z\,dx}{\sqrt{-f\,l}}-\frac{h\,x\,dz}{\sqrt{-f\,l}}$$

となる．そこで，この一番最後に得られた方程式の右辺を，方程式(3)の右辺の代りに用いて，その後に積分すると，

(4) $$\int X+\int Z=-\frac{h\,x\,z}{\sqrt{-f\,l}}$$

が得られる．

この定理の第二の部分の証明一方程式(1)において s の場所に -1 を配置し，適宜計算を遂行すると，

$$(5) \qquad z=\frac{\sqrt{-g\,h\,x^2-g\,l}}{\sqrt{f\,h\,x^2+g\,h}}$$

が見つかる．ここでもまた，等式(5)において z が x を用いて与えられるのとまさしく同様にして，x は z を用いて与えられることがわかる．そこで，多項式 X では z を使い，多項式 Z では x を使うと，

$$X+Z=\frac{z\,dx\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}+\frac{x\,dz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$$

が与えられる．積分すると，

$$(6) \qquad \int X+\int Z=-\frac{x\,z\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$$

となる．

これで主定理の証明が完成した．これを楕円，双曲線，サイクロイドの弧長積分もしくはこれらの曲線の線素を表す微分式に適用すると，「差を幾何学的に指定することのできる二つの弧」を自由に描くことができるようになる．その模様は次の通り．

主定理の楕円への応用（図20参照）

楕円 $AGHI$ の二本の軸の一方の上に横座標軸を取りたい．たとえば，軸 IG を $(2a)$，そのパラメータを (p) と呼び，中心 C を原点にもつ可変横座標 CD を x と呼ぼう．内面幾何学(geometria interiore)に精通している人々には，表記を簡単にするために $h=p-2a$ と置くと，切除線 CD に対応する弧 AB の線素が

$$\frac{dx\sqrt{h\,x^2+2\,a^3}}{\sqrt{2\,a^3-2\,a\,x^2}}$$

となることはよく知られている．

そこで，この多項式を一般の多項式 X に等しいと見ると，$l=2\,a^3$，$f=-2\,a$，$g=2\,a^3$ が得られる．方程式(2)と(4)においてこれらの値を代って用いると，

$$z=\frac{a\sqrt{2\,a^3-2\,a\,x^2}}{\sqrt{h\,x^2+2\,a^3}}$$

というもうひとつの横座標 $CF(z)$ を取るとき，

$$\text{弧}\,AB+\text{弧}\,AF=-\frac{h\,x\,z}{2\,a^2}+K$$

が得られることがわかる．

定量Kの値を見つけるために，$x=0$のときには，一次式$\frac{hxz}{2a^2}$とともに弧ABもまた0になること，この場合，弧AFは全弧AGに等しくなること，したがってKはその全弧に等しくなることに着目しよう．そこで，上記の一番最後の等式の諸項の配置を変えて，弧$AF-$弧AGに代って弧GFを用いると，結局，

$$弧AB-弧GF=-\frac{hxz}{2a^2}$$

となることが判明する．

<u>主定理の双曲線への応用</u>（図21参照）

双曲線ABFの第一軸HAを$(2a)$，そのパラメータを(p)と呼び，中心Cに端を発する可変切除線CDを(x)と呼びよう．また，$h=p+2a$と置こう．専門家は，切除線CDに対応する弧ABの線素は

$$\frac{dx\sqrt{hx^2-2a^3}}{\sqrt{2ax^2-2a^3}}$$

であることを知っている．

この多項式を一般多項式Xと等値すると，$l=-2a^3$，$f=2a$，$g=-2a^3$が示される．これらの値を方程式(5)および(6)に代入すると，$z=\frac{a\sqrt{hx^2-2a^3}}{\sqrt{hx^2-ha^2}}$となるもうひとつの切除線$CE(z)$を指定するとき，

$$弧AB+弧AF=\frac{xz\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}}+K$$

が得られることがわかる．

だれもがみずから確かめることができるように，xの増加に伴ってzは減少することに注意しよう．

さて，切除線Cdを(t)と呼び，もうひとつの切除線Ceを(u)と呼ぼう．ただし，uはtを通じて，zがxを通じて与えられるのと同様の仕方で与えられるものとする．すると，同じ論拠により，

$$弧Ab+弧Af=\frac{tu\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}}+K$$

が得られることになる．

したがって，この後者の等式を等式(7)から差し引くと，結局，

$$弧Ff-弧Bb=\frac{xz\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}}-\frac{tu\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}}$$

が判明する．

二つの弧Ff，Bbのうち，一方は任意であることは明らかである．

主定理のサイクロイドへの応用（図22,23参照）

サイクロイド $ABFG$ は，円 NTR が円弧 RSV に接触しながら回転していくときに生成される．このサイクロイドを描く点 A は，生成円の円周上もしくはその外側に取る．半円周 $AICH$ は，生成円と共通の中心 K と半径 KA をもって描かれる．AB はサイクロイドの可変弧であり，BI は土台になっている円と共通の中心 O と可変半径 OB をもって描かれる円弧である．その円弧 BI は点 I において半円 $AICH$ と交叉し，その点 I から直弧 AH 上に垂線 ID が降ろされている．

今，OB を b，KA を a，KN を c と呼び，半円 $AICH$ の切除線 AD を t と名づけよう．また，表記の簡易化をさらに押し進めるために，$a+c=q$ と置こう．名高いニコル氏は1708年のパリ科学アカデミー紀要に掲載された論文の中で，サイクロイドの弧 AB の線素は次に挙げる多項式

$$dt\frac{\sqrt{q^2-2ct}}{\sqrt{2at-t^2}}\times\frac{b+c}{b}$$

に等しいことを示している．

このように諸状勢を設定したうえで，弦 AI を x と呼ぶと，$t=\frac{x^2}{2a}$ および $dt=\frac{x\,dx}{a}$ が得られる．したがって，サイクロイドの弧 AB の線素は，次に挙げる多項式

$$dx\frac{\sqrt{aq^2-cx^2}}{\sqrt{4a^3-ax^2}}\times\frac{2b+2c}{b}$$

に等しい．

そこで，この最後に得られた多項式が一般多項式 $X\cdot\frac{2b+2c}{b}$ と等しいものとすると，$h=-c$，$l=aq^2$，$f=-a$，$g=4a^3$ がみいだされる．そこで，これらの値を方程式(2)と(4)に代入して，楕円の場合にそうしたのと同様の道筋を歩んでいくと，次に挙げる事柄が判明する．すなわち，もうひとつの弦 AC を z と名づけ，

$$z=aq\frac{\sqrt{4a^2-x^2}}{\sqrt{a^2q^2-acx^2}}$$

となるように設定する．そうして，O を中心として，半径を OC とし，点 F においてサイクロイドと交叉する円弧 CF を描くと，

$$\text{弧}\,AB-\text{弧}\,GF=\frac{2cxz}{aq}+\frac{2c^2xz}{abq}$$

となる．

楕円では弧 $AB-$ 弧 GF，双曲線では弧 $Ff-$ 弧 Bb，サイクロイドでは弧 $AB-$ 弧 GF という「二つの弧の差」がそれぞれ指定され，それらを表示する簡単な式が記述されている．それらの数式を図を描いて解釈すると，指定された弧と弧の差に等しい

線分を「幾何学的に」作図することが可能になる．それが，二つの弧の差を「幾何学的に」指定可能ということの具体的な姿形である．

曲線で囲まれる領域の面積の算出は積分計算の主テーマだが，面積のみではなく，曲線の弧長の算出もまた等しく積分計算の主テーマである．楕円や双曲線やサイクロイドの場合，一般弧の弧長の算出はうまくいかないが，代って「弧と弧の差」の算出というテーマが浮上する．このテーマはベルヌーイ兄弟がすでにもっていたようで，ファニャノの思索の契機はベルヌーイ兄弟の研究に根ざしているのである．「レムニスケートを測定する方法　第一論文」の冒頭で，ファニャノは研究の動機をはっきりと語っている．

> 二人の偉大な幾何学者，ベルヌーイ家のヤコブ氏とヨハン氏の兄弟は，1694年のライプチヒ論文集において見られるように，イソクロナパラケントリカを作図するためにレムニスケートの弧を利用して，レムニスケートの名を高からしめた．レムニスケートよりもいっそう簡単な何かある他の曲線を媒介としてレムニスケートを作図するとき，イソクロナパラケントリカのみならず，レムニスケートに依拠して作図することの可能な他の無数の曲線の，いっそう完全な作図が達成されることは明らかである．それゆえ，私は，二篇の論文を通じて相次いで説明する予定の，私が発見したこの曲線の測定が，賢明な人々のお気に召すよう，期待したいと思う．

イソクロナパラケントリカには「測心等時曲線」という訳語があてられることが多いが，変分計算に現れる著名な曲線である．そのイソクロナパラケントリカを作図するのに，ベルヌーイ兄弟はレムニスケートを利用しとファニャノの言う．そこでそのレムニスケートの弧長の測定を，レムニスケートよりももっと簡単な曲線の作図に帰着させようというのが，ファニャノの研究の動機なのであった．

続く第二論文「レムニスケートを測定する論文　第二論文」の末尾において，「註釈Ⅱ」を附して，次のように語っている．

> これからこの論文を書き進めていく間，私はもはやいろいろな方程式が完全であることを証明しない．読者にとっては，これから現れる諸方程式の完全性をみずからの手で確認するには，私が上記の二例において，調節を行うのに用いた手法のみで十分と思う．読者はまた，主三次放物線を描くことによりレムニスケートを測定するもうひとつの方法を導出するために，先行する

四つの定理を利用することもできるであろう．ただし，その作業を遂行する際には，省略をせずに，諸方程式を完全な方程式にするために，適切な定量を除去するか，もしくは加える必要がある．

これに加えて，読者はこのような諸定理から，上記の放物線などの弧の比較に関するまったく新しい真理を導くことができるであろう．

次の事実を示唆するだけに甘んじることにする．すなわち，主三次放物線の測定は，先ほどの四つの定理によりレムニスケートを描くことに依存し，レムニスケートの測定は，第一論文で明らかにされた通り，等辺双曲線とある種の楕円をいっしょに描くことに依存するのであるから，主三次放物線の測定は上記の二つの円錐曲線をいっしょに描くことに依存することが明らかになるのである．この発見は，1695年のライプチヒ記録集の64頁，および184頁の末尾の辺で読み取れる事柄をめぐって考察を加えたことのある人にとっては，お気に召さないということはありえないと思う．

主三次放物線とレムニスケートの関係については，もう一篇の論文「主三次放物線の弧の新たな測定の仕方を見つける方法」を参照しなければならないが，ファニャノの企図の所在地はここまでの記述によりおおよそ諒解されると思う．オイラーの論文［E252］「求長不能曲線の弧の比較に関するさまざまな観察」は，ファニャノによるこのような研究を受けて執筆されたのである．楕円と双曲線についてはほぼファニャノの諸結果の祖述に留まるが，レムニスケートについてはファニャノを大きく越えて前進した．オイラーは確かに，何事かをファニャノに学んだのである．

4.　微分方程式の積分について―ファニャノの発見に寄せるオイラーの解釈―

オイラーは第二番目の論文

［E251］「微分方程式 $\dfrac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=\dfrac{n\,dy}{\sqrt{1-y^4}}$ の積分について」

において，ファニャノが得た諸結果を微分方程式の解法理論，すなわち積分の理論の視点から観察した．標題に見られる $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ というタイプの微分式はレムニスケートの弧長計算に出てくるものであり，積分記号を附せば，レムニスケートの弧長を表す積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ が手に入る．これが，いわゆる「レムニスケート積分」であるオイラーの無限解析の立場から見れば，これはいわゆる「オイラー積分」の一種である．平方

根内の式 $1-x^4$ において，変化量 x の冪指数を「4」から「2」に変えれば，積分の形は $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ となるが，これは単位円周の弧長の計算に現れる積分であり，「円積分」と呼ばれる一番簡単なオイラー積分である．オイラーは円積分から出発して徐々に形を変えていき，複雑で一般性のある積分へと移行していったが，レムニスケート積分を取り上げた時点でたちまち難所に遭遇した．すなわち，論文［E251］では，標題に出ている微分方程式

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

の代数的積分が報告されているが，ファニャノの結果に出会い，触発されるまで，オイラーはこのタイプの微分方程式を積分することができず（言い換えると，解を見つけることができず），行く手をはばまれたのである．次に引用するのは［E251］の冒頭の部分である．

《1．ファニャノ伯爵による種々の発見を機として，私はまずはじめにこの方程式を考察した．するとただちに，この方程式を満たす変化量 x と y の間のひとつの代数的関係式が見つかった．ただし，その関係式には，積分による計算ではいつでも導入されることになっている任意定量が含まれていないのであるから，それを完全積分方程式と見ることはできない．そこで，よく知られているように，完全積分と特殊積分は区別するのが慣わしになっている．すなわち，完全積分は微分方程式の全内容を汲み尽くすが，特殊積分は微分方程式の一部分を満たすだけに留まり，その結果，そのほかにもなお，他の表示式もまた提示された微分方程式を満たすということがありうるのである．他方，完全積分方程式の判定基準は，その方程式に，提示された微分方程式には現れない定量を含んでいなければならないという点に求められる．》

《2．これらの事柄をいっそう明瞭に認識するためには，もっとも簡単な微分方程式 $dx=dy$ を考えれば十分である．積分 $x=y$ は確かにこの微分方程式を満たすが，実際にはこの積分は微分方程式 $dx=dy$ よりも守備範囲がせまいのは明らかである．というのは，a として任意の定量を取るとき，明らかにはるかに広い守備範囲を覆う積分 $x=y\mp a$ もまた，この微分方程式を満たすからである．そうして，この積分には，上記の微分方程式には姿を現さない定量 a が存在するのであるから，この積分は微分方程式 $dx=dy$ の全内容を汲み尽くすと考えられて，まさしくそれゆえに完全積分方程式という名で呼ばれるのである．不確定定量 a の代りに，定まった諸値を用いれば，完

全積分からいろいろな特別積分が得られるが，それらはこの手続きそれ自身に起因して，提示された微分方程式よりも守備範囲がせまいことは明らかである．》

《3. ところで，ある微分方程式について，その完全積分が超越的であるのに，特殊な代数的積分がもたらされるという事態がしばしば起りうる．このようなことは，もしその完全積分の超越的部分に任意定量が乗じられているなら，明らかに生起する．そのような形になっているために，定量を0と等値して計算するとその超越的部分が消失してしまい，特別な代数的積分が残されるのである．たとえば，値 $y=x$ が方程式 $dy=dx+(y-x)\,dx$ を満たすのは明らかだが，この微分方程式に含まれている特殊積分はただひとつにすぎない．というのは，e はその対数が $=1$ である数を表すとするとき，この微分方程式の完全積分は $y=x+a\,e^{x}$ であるからである．もし等しい任意定量 a が消失しない限り，この積分はいつでも超越的なのである．》

《4. このようなわけで，ある微分方程式について，たとえその完全積分が超越的であろうとも，それが代数的な特殊積分を許容することが起りうるのであるから，提示された微分方程式

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{n\,dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

の完全積分が，たとえこの微分方程式に対して代数的な特殊積分を提示することが可能であろうとも，超越的諸量を含むのではないかと疑う理由がないわけではない．実際，完全積分は

$$m\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=n\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}+C$$

となるが，これらの積分は円や双曲線の求積法に手段を求めても決して定めることができないのであるから，一般的に見て超越的なこれらの式が，定量 C は不定に留まるという状勢において，x と y の間の代数的関係式に帰着されるということが本当にありうるとは決して思われないのである．》

《5. なるほど確かに，微分方程式

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{1-xx}}=\frac{n\,dy}{\sqrt{1-yy}}$$

の完全積分は，もし係数 m と n の比が有理的であれば，いつでも代数的に提示することが可能である．だが，この式の両辺の積分はどちらも円弧を表している．したがってその完全積分は $m\,A\sin x=n\,A\sin y+C$ であるが，有理

的な相互比を保持する弧と弧に関する正弦と正弦の関係は代数的に表示されうるのであるから，これらの場合についても完全積分方程式が代数的に提示されうるのは不思議ではない．しかし，超越的な式 $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ と $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$ においてはこのような比較の可能性はないし，少なくとも確立されていないのであるから，代数的量への積分の還元は求めてもかなえられないことであろう．

6．しかし，それにもかかわらず，もしこのような微分方程式

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{n\,dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

が提出されたとするならば，その完全積分は，それはもちろん任意定量を含んでいるのだが，比率 $m:n$ が有理的であるときにはいつでも代数的に表示されうるという状勢を私は観察した．それに，これはよりいっそう注目に値すると私には思われるのだが，私は確実な方法によってその積分に導かれていったというわけではなく，むしろ，さまざまな試みと推測を通じてそれを発見したのである．それゆえ，この積分へと導いてくれる直接的方法が見つかれば，解析学の領域が相当に拡大されることになるのは疑う余地がない．まさしくそれゆえに，解析学の探究に向けてありとあらゆる努力が傾けられてしかるべきであろうと思われるのである．》

オイラーのねらいは，係数 m と n の比率は有理的として，微分方程式

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{n\,dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

の積分を求めることであった．ところが，「この微分方程式の完全積分は，係数 m と n の有理比がどのようであろうとも，方程式

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

の完全積分から導くことが，私には可能である」とオイラーは明言し，そのうえであらためて，微分方程式

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

を取り上げた．「一目見るだけで，方程式 $x=y$ がこの方程式を満たすのは明らかである」とオイラーは言う．したがって，この方程式はひとつの特殊積分である．ところが，この自明な特殊積分のほかにもうひとつ，自明とは言えない特殊積分が存在する．それは，

$$x=-\sqrt{\frac{1-yy}{1+yy}}$$

という積分である．言い換えると，方程式

$$xxyy+xx+yy-1=0$$

もまた，微分方程式 $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$ の特殊積分である．ファニャノはこの積分を発見した，とオイラーは言うのである．

オイラーの言うファニャノの発見に該当する命題をファニャノの諸論文の中から探すと，「レムニスケートを測定する方法　第一論文」の「定理Ⅲ」が目に留まる．それは次のような命題である．

《定理Ⅲ―下記の二つの方程式を(7)および(8)としよう．前者の方程式を後者の方程式に代入すると，後者の方程式もまた成立すると私は主張する．

(7) $$u=a\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

(8) $$\int\frac{a^2\,dz}{\sqrt{a^4-z^4}}=\int-\frac{a^2\,du}{\sqrt{a^4-u^4}}$$ 》

ファニャノの自身の数学的意図に沿えば，この命題は，人に与えられたレムニスケートの弧に対し，その弧と長さの等しいもうひとつの弧を見つける方法を教えているのであり，微分方程式の積分が見つかったというのではない．だが，等式(8)の両辺から積分記号を除去して，微分方程式

$$\frac{a^2\,dz}{\sqrt{a^4-z^4}}=-\frac{a^2\,du}{\sqrt{a^4-u^4}}$$

を書き下せば，等式(7)はこの方程式の積分を与えていることがわかる．オイラーはファニャノの命題をそのように観察したのである．

オイラーはなお一歩を進めて，微分方程式

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

の完全積分

$$xx+yy+ccxxyy=cc+2xy\sqrt{1-c^4}$$

を発見した．ここには「レムニスケート積分の加法定理」も内包されているが，そのあたりの消息は今日，オイラーの発見としてよく語れる通りである．

5. これからの課題

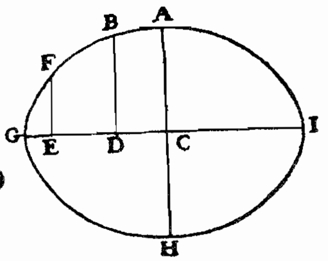
ファニャノの言葉に立ち返ると，ファニャノの研究の契機になったのは，イソクロナパラケントリカ（測心等時曲線）の作図をレムニスケートの作図に帰着させたベル

ヌーイ兄弟の発見であり，レムニスケート曲線の名が高まったのもこの発見によるのであった．ファニャノの後，レムニスケートはガウスとアーベルの手で取り上げられて，数論と楕円関数論の新たな領域が開かれるに至ったが，そのレムニスケート曲線が数学の現場に登場した時点にさかのぼると，イソクロナパラケントリカという変分計算の世界の著名な曲線に出会うのである．数論と楕円関数論と変分法が融合して一個の種子と化したかのような，真にめざましい数学的情景である．

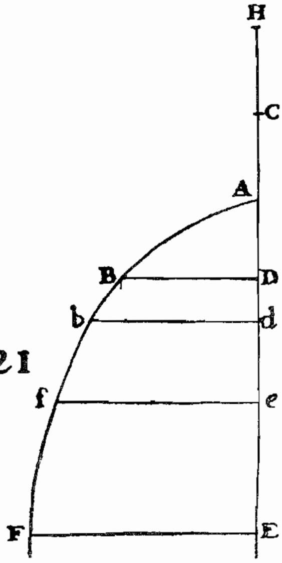
ファニャノの発見がオイラーに及ぼした影響については上述した通りであり，ファニャノの五論文とオイラーの二論文を読めば，すべてはたちどころに諒解される．だが，それだけではわからないことがなお残されている．それは，イソクロナパラケントリカの作図を試みたというベルヌーイ兄弟の数学的意図である．そのような試み通して，ベルヌーイ兄弟は何を明らかにしようとしたのであろうか．また，この問題をレムニスケートの作図に帰着させることに，どのような数学的意味が認められるのであろうか．この問いに答えるには，無限解析もしくは無限小解析のはじまりのころにさかのぼらなければならないと思われるが，将来の歴史的考察の課題としてここに提起しておきたいと思う．

（平成20年1月31日）

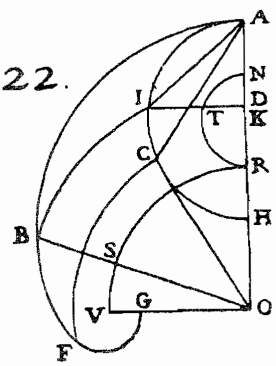
20


A
B
F
G
E
D
C
I
H

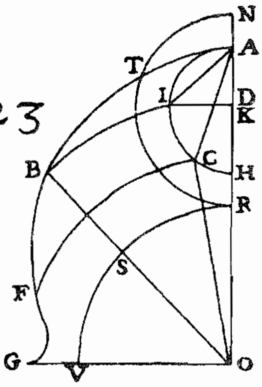
21

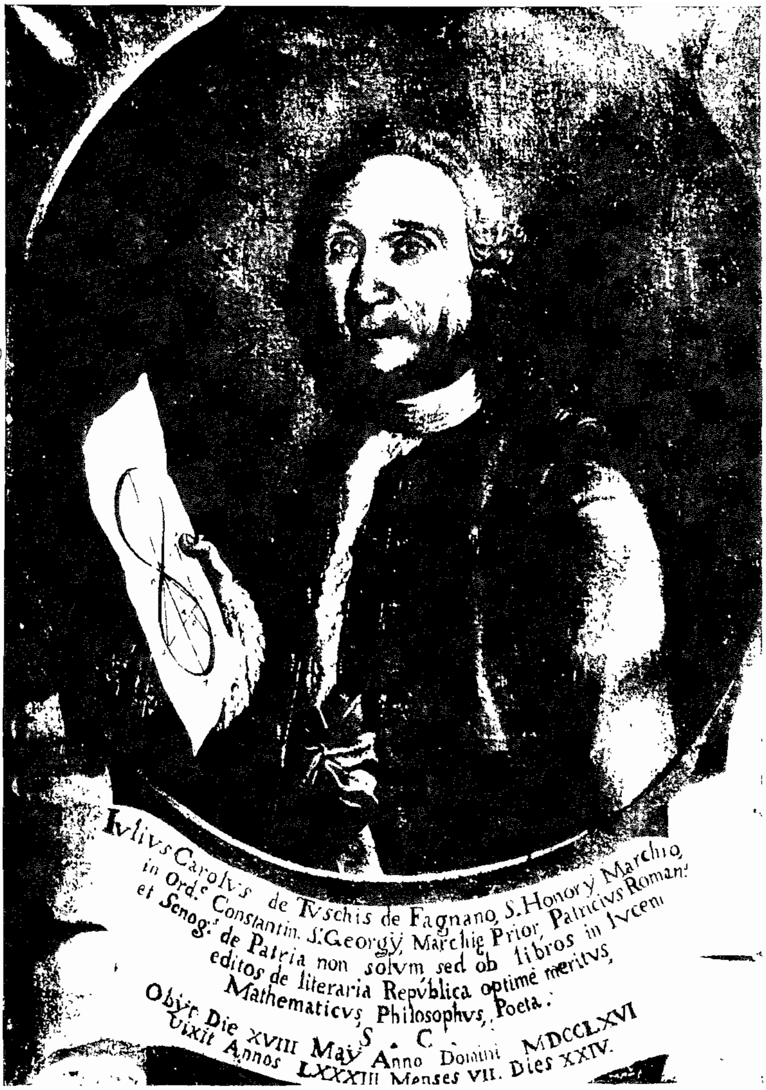

H
C
A
B
D
b
d
f
e
F
E

22.


A
N
I
D
T
K
C
R
H
B
S
G
V
O
F

23


N
A
T
I
D
K
C
B
H
R
S
F
G
V
O


Ivlivs Carolvs de Tvschis de Fagnano, S. Honorij Marchio,
in Ord.e Constantin. S. Georgij Marchiæ Prior, Patricivs Roman:
et Senog: de Patria non solvm sed ob libros in lvcem
editos de literaria Repvblica optime meritvs,
Mathematicvs Philosophvs, Poeta.
S. C.
Obijt Die XVIII Maij Anno Domini MDCCLXVI
Vixit Annos LXXXIII Menses VII. Dies XXIV.