ワイエルシュトラス以降のイプシロン・デルタ論法
多変数関数に対する連続性の定義の確立[1]

中根美知代[2]

1. はじめに

今日の微分積分学は連続関数を ε-δ 論法で定義することから始める．コーシー (Augustin Louis Cauchy, 1789 - 1857) の名前が ε-δ 論法と結びつけて語られることが多いためだろうか，無限小を払拭し，ε-δ 論法を一貫して用いた微積分学を提示したのはコーシーだと思わせるような記述を，微積分の教科書などに見かけることが多い．確かに彼は，1821 年に出版した『解析学教程』をはじめとする一連の著作で，ε-δ 論法を採用している．しかし，彼は無限小も併用しており，しかもこちらのほうをより多く使う傾向にあった．ε-δ 論法だけで微分学を構成する最初の試みが見られるのは，ワイエルシュトラス (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815 - 1897) による 1861 年の微分学の講義である．限りなく近づく，あるいは無限小という直観に訴える概念を一切捨てて，ε-δ 論法だけで議論するようになった契機は何か．実はこのことは明らかになっていない．今日の微積分学の組み立て方から察するに，一様収束，一様連続といった概念の導入が真っ先に疑われるところである．しかしこれまでの調査から，少なくともこれらは，ε-δ 論法で全面的に微積分を展開する契機にはなっていなかった．[3]

この転換の理由の可能性として，次に出てくるのは，多変数関数の連続性を記述するためではないかという推測である．多変数関数の連続性を定義するにあたっては，その点へのあらゆる方向からの近づき方を考えなくてはならない．コーシー流の，いわば矢印で表されるような極限の捉え方を採用すると，近づき方の問題を定義の中で補足して述べるのは煩雑である．しかし，極限概念を ε-δ 論法に翻訳して記述すれば，このことは自然に定義の中に含まれている．それゆえ，多変数関数へ拡張する場合まで考えると，最初から ε-δ 論法で連続性の定義を記述したほうが効率がよい．このことに気づいたのが，連続性の定義を書き換えた理由であろうとするのも一理ある．

このことを検証するために，二変数関数の連続性の定義を追っていくと，不思議なことに気づく．この推測が正しければ，限りなく近づくという概念を伴う二変数関数の連続性の定義がまず出てきて，あらゆる方向からの近づき方を考えることが問題になり，そこで初めて ε-δ 論法の有利性が指摘されて，一変数関数の連続性の定義が転換したという道筋がとられるはずである．では，誰が最初に二変数関数の連続性を目的な定義を与えたかというところで，すぐに障害にあたる．歴史研究のなかで，そのことが明確にされていないのである．このことを明らかにしたうえで，ε-δ 論法とのかかわりを考察するのが本報告の目的である．

この定義の成立過程は予想外に複雑である．そして，定義が確立した時期は，ワイエルシュトラスの 1861 年の講義より遅い．しかも，一様連続という概念の確立と重要なかかわりを持っている．以下この事情を見ていこう．

2. コーシーと多変数関数の連続性

一変数の連続性については，コーシー自身の定義，あるいはそれの意味するところを ε-δ 論法で書き換えたものが今日まで定義として採用されている．それは，

[1] この研究は立教大学学術推進特別重点資金の補助を受けたものである．

[2] 立教大学理学部，e-mail:michiyo.nakane@nifty.com

[3] Nakane, 2005 を参照のこと．なおこの論文では，ワイエルシュトラスが，1861 年にいたるところ微分不能な連続関数が存在するとのうわさを聞いたことが転換の要因と論じてある．

> α を無限小とする．ある区間内のそれぞれの x について，差 $f(x+\alpha)-f(x)$ が α の値とともに減少するとき，関数 $f(x)$ は，この区間で，この変量について連続といわれる．別の言葉で言えば関数 $f(x)$ がある区間で x について連続を保っているとは，変量の無限小の増加が関数それ自体の無限小の増加をつねに作り出すことである．(強調は原文のまま：『解析学教程』(1821 年) 第 2 章)

とするものである．ここで無限小というのは，与えられたどのような量よりも小さくなるような変量，とコーシーは定義している．

さて『解析学教程』では，一変数関数に続いて多変数関数の連続性が論じられる．コーシーは，まず，多変数関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が，各変数について，$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ の付近で連続であると仮定する．そして，そのとき，

「$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ が無限小であるとき，$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ の付近で $f(X_1+\alpha_1, X_2+\alpha_2, \ldots, X_n+\alpha_n) - f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 自体も無限小である」

ことをコーシーは証明する．二変数の場合を例にとり，その証明の概略を示しておこう．無限小量 α と β に対し，

$$f(X_1+\alpha, X_2+\beta)-f(X_1, X_2) = [f(X_1+\alpha, X_2)-f(X_1, X_2)]+[f(X_1+\alpha, X_2+\beta)-f(X_1+\alpha, X_2)]$$

が成り立ち，x にかんする連続性から y を止めたとき，左辺第 1 項は無限小になる．同じことが，左辺第 2 項についてもいえる．したがって $f(X_1 + \alpha, X_2 + \beta) - f(X_1, X_2)$ は 0 に収束するとコーシーは結論した．

コーシーは最終的に

(定理) 各変数 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ がそれぞれの極限として，固定された定まった値 $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ をとったとし，関数 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ が $(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n)$ の付近で連続関数とすると関数 $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ は $f(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n)$ を極限値として持つ．

という定理の形でまとめている．

コーシーはこれから合成関数へと話題を転じていくが，この過程で，多変数関数の連続性の明確な定義を与えていない．後に出版した『微分学講義』でも，多変数関数に対してこれ以上の説明はない．では，コーシーの多変数関数の連続性の定義とは何だろうか．

一変数関数の連続性の定義から自然に拡張して得られるのは，

(1) すべての変量のそれぞれに対して，それらの無限小の増加が関数の無限小の増加を作り出す．

という定義であろう．各変数が無限小だけ大きくなると，関数の値も無限小だけ大きくなるということである．このように理解しておけば，一応コーシーの議論には違和感なくついていくことができる．それは，この定義の意味するところが曖昧で，そのときの状況に応じて，適当に解釈できる余地があるからであろう．

一方，上で見た定理の言明がコーシーの定義だとする意見も出てこよう．コーシーは，まず α が限りなく減少し，極限に達した後で β が限りなく減少する，あるいはその逆の順序をとるという減少の仕方だけしか示していないことが読み取れる．それ以外の減少の仕方，すなわち $(X_1,\ X_2)$ への近づき方については，まったく言及していない．そこで，二変数に限定して述べると

(2) 二変数関数は，第一の変数のそれぞれの値に対して，第二の変数の関数としては連続であり，また第二の変数のそれぞれの値に対して，第一の変数の連続としては連続であるとき，その関数は二変数として連続である．

という連続の定義を採用していたともみなされる．同様にして多変数に拡張しても，本質

的な事情は変わらない．これらをそれぞれ,「コーシーの定義と思われるもの(1)」「コーシーの定義と思われるもの(2)」と呼ぶことにしよう．

ここで今日的な視点を導入しよう．1変数関数の場合は，$x=x_0$ への近づき方は右からと左からの2種類しかないので，特に気をとめる必要はないが，二変数関数の場合は，2次元平面上のあらゆる方向，たとえば直線 $x_2=x_1-X_1+X_2$ に沿って，あるいは渦巻きを描きながら (X_1,X_2) に接近することができる．そしてどのような近づき方をしても，$f(X_1,X_2)$ に限りなく近づくとき，二変数関数として連続であるとされている．1変数連続関数のグラフは，切れ目がなくつながっている．二変数関数については，3次元空間内で曲面をなすグラフが破けていない状態になっているような定義が望ましいはずで，そのためには，どのような方向から近づいてきても関数の極限値は同一でなくてはならない．今日ではそのことを保障するような定義が与えられている．しかし,「思われるもの(2)」では，(x_1,x_2) が特定の近づき方で (X_1,X_2) に近づくとき，$f(x_1,x_2)$ は $f(X_1,X_2)$ に近づくことが述べられているにとどまっている．いかえると，違う近づき方をするならば，$f(x_1,x_2)$ は $f(X_1,X_2)$ に近づかないこともありえる．

この状況の説明として，今日の教科書でよく取り上げられるのは，関数

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}\quad(x^2+y^2\neq 0),\quad f(0,0)=0 \tag{$*$}$$

の原点における状況である．x 軸方向から原点に近づけると

$$|f(0+\delta,0)-f(0,0)|=|\frac{0}{\delta}|$$

であるから，この関数は x については連続である．x 軸方向から原点に近づけたときも同様のことがいえる．ところが，x と y が $y=ax$ (a は定数) という関係を持ちながら，x が 0 に近づいたとすると

$$f(x,ax)-f(0,0)=\frac{a^2}{a^2+1}$$

となるから，a の値に応じて極限値が定まり，$a\neq 0$ であれば 0 には近づかない．そこで今日では,「思われるもの(2)」は二変数関数の連続性の定義とはしていない．

「思われるもの(1)」の表現からは，近づく方向に関する情報は何も得られない.「それぞれの変数がどのように無限小に近づいていっても」と読み取れなくもない．そうであるとすれば，これは今日的な定義を与えている．仮にコーシーがそう考えていて，しかし，上の定理のような証明をしているのであれば，彼は，上のような仕方でとった極限値は，あらゆる方向からとった極限値と等しくなると考えていたのではないかと判断するほうが自然であろう．コーシーについていえば,「思われるもの(1)」を定義としていたとしても，今日の定義に達しているとはいえない．

たとえ字句の上で今日的な二変数関数の連続性の定義が提示されていても，あらゆる方向からの連続性を考えていることが読み取れない限り，二変数関数の連続性の定義に到達したとは判断できない．この点を慎重に検討しなければならないところに，この課題の難しさがある．では，この「思われるもの(1)(2)」から，今日の二変数関数の連続性の定義に達するまで，どのような経緯があったのだろうか．

2. ディリクレとワイエルシュトラスの態度

筆者の知る限り，もっとも早い時期に二変数関数の連続性の定義が見られるのは，1854年，ディリクレ(Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805 - 1859年)の『定積分講義』(pp.94-95) においてである．彼は二変数関数の連続性を

$f(x,y)$ を互いに独立な 2 つの変数 x,y の関数とする．そこで私たちは講義のはじめに立てた一変数に依存する表現の一つである連続性について立てた概念を $f(x,y)$ に適合させることが必要である．すなわち，関数は任意の値の組 (x,y) に対し，一つそしてただ一つ定められた値をとり，変数の二つの増分 h と k が互いに独立に限りなく減少するとき，

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)$$

はそれ自体絶え間なく 0 に近づく．

と定義した．これは，無限小を「限りなく」と表現しなおして,「思われるもの (1)」を書き換えたものであろう．ただし「二つの増分 h と k が互いに独立に限りなく減少」という条件はやや気になる．コーシーとは異なり，ひとつの点に対していろいろな近づき方を想定していることを，h と k が互いに「独立」という表現でディリクレははっきり示しているように読み取れるからである．ディリクレ自身はこのことをどれのくらい意識していたのだろうか．

ディリクレが二変数関数の連続性を定義したのは，2 重積分を定義するにあたって関数 $f(x,y)$ の連続性を仮定する必要があったからである．ディリクレはまず,

$$\int_p^q dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_p^q f(x,y)dy$$

を証明する．第 1 項では y を一定にしておいて，第 2 項では x を一定にしておいて積分をとっている．彼は，$\int_a^b f(x,y)dx$，$\int_p^q f(x,y)dy$ の積分の存在を関数の連続性を使って保証している．そして，最終的には値が等しくなるということで二つの積分を区別せず $\int_p^q\int_a^b f(x,y)dydx$ とかくとする．それ以降，二変数関数の連続性が本質的にかかわるような記述はない．

重積分を定義する過程で，ディリクレは，x と y，dx と dy が独立であることを強調している．そうでなければ，どちらか一方をとめておいて他方で積分するということができないからである．おそらくこのことに対する気遣いから，彼は「変数の二つの増分 h と k が互いに独立に限りなく減少」と記したのであろう．コーシーの定理の反例を意識した上で,「独立」という一語を付け加えたと思わせる記述はない． 近づき方によって極限値が異なるような具体的な関数に出会った数学者であれば，ディリクレの記述の中にコーシーからの大きな飛躍や今日的な連続の定義を読み取ることが可能であろう．しかし，ディリクレ自身はそのことを意識していなかった可能性が高い．

ε-δ 論法で基礎付けた微分学を提示した，ワイエルシュトラスの 1861 年の講義でも，二変数関数の連続性は定義されていない．二変数関数の微分が丁寧に述べられているにもかかわらず，である．一変数の連続性から察せよということであろうか．そうだとすれば,「もし，h と k に対して，δ の絶対値より小さいすべての h と k について， 任意の ε がどんなに小さくても，$f(x+h,y+k)-f(x,y)$ がそれより小さくなるならば連続」ということになろう．ただし,「δ の絶対値より小さいすべての h と k」という言い方は,「δ_1，δ_2 より小さいすべての h，k 」あるいは絶対値という表現を距離と解釈して,「$\sqrt{h^2+k^2}$ が δ より小さいとき」ということもできよう．

「ワイエルシュトラスの定義と思われるもの」は「コーシーの定義と思われるもの (1)」を単純に ε-δ 論法で書き換えただけにすぎない．しかし，そのように書き換えると,「あらゆる方向から近づいても同じ極限値に近づく」という条件を明確に含ませようとしてそのようにしたと判断することもできる．とくに，絶対値を距離に書き換えれば，確実にそ

のことが定義の中に読み取れる．では，ワイエルシュトラスの意図がそうであったかというと，自身の言及がないのだからなんともいえない．むしろ，一変数関数と二変数関数の連続性の違いに無頓着だったからこそ，二変数関数の連続性の定義に特別言及しなかったと判断されてもやむをえないだろう．

1861 年の講義から確実にいえることは，二変数関数の連続性を表現するためには ε-δ 論法が有効だから，統一性をとるために一変数関数の連続性も ε-δ 論法で定義しようという意図は，まったく読み取れないことである．二変数関数の連続性の定義の導入と ε-δ 論法に基礎付けられた微分学の構築とは本質的には関係がないと考えるほうが自然であろう．

3. ハイネの「一様連続」: 今日の一様連続と二変数関数の連続性

二変数関数の連続性の定義への疑問

二変数関数では，あらゆる方向からの接近を考えなくてはならないことを最初に明確に論じたのは，ハイネ (Heinrich Eduard Heine, 1821 - 1881) の 1869 年論文であろう．ハイネは三角級数

$$\frac{1}{2}a_0 + r(a_1\cos x + b_1\sin x) + r^2(a_2\cos 2x + b_2\sin 2x)\cdots$$

を検討する際，これが θ と r の二変数関数であることを指摘している．[4] そしてこの関数が，r を固定すれば θ について，θ を固定すれば r について連続であることを述べた後，その２つの変数を同時に変化させたときの連続性を問題にしたのである．そして，個々の点において２つの方向からの連続性を考えるとき，１変数の連続関数を扱うときの同じような推論が前提できないことは認識されていないようだとした後，

> すべての点とあらゆる方向に一様に広がっているのなら，一様連続と名づけられよう．二変数関数 $f(x,y)$ は，任意に小さく与えられた ε に対して，0 でない h_1 と k_1 が存在し，h_1 と k_1 を超えない h と k に対して，差 $f(x+h,y+k)-f(x,y)$ が ε よりも小さくなる，さらに，境界で定められた領域内のすべての (x,y) と $(x+h,x+k)$ に対して，この ε と固定された h_1 と k_1 について，同じことがいえるとき，この二変数関数は，この領域で一様に連続であるという．

という定義を与えるのである．ハイネは「思われるもの (2)」の問題点を指摘しているのに他ならない．

極座標 (r,θ) の議論を $xy-$ 座標に変換して論じるとき，平面上の１点への近づき方にはいろいろな方向がある．実際，θ を固定して，r だけ 0 に近づけることによって，原点での連続性を考えるという操作を xy 平面で表現すると，$y = \sin\theta\cdot x$ という関係を保ちながら，原点に接近するということになる．このようなことを考察しながら，ハイネは，いろいろな方向から近づくことを考察するようになったのであろう．１変数にはない二変数の特性とはこのことを指していると思われる．

任意の ε が与えられたとき，h_1 と k_1 を超えない h と k に対して，$|f(x+h,y+k)-f(x,y)|<\varepsilon$ となるということは，２次元平面上に広がった (x,y) について考察していることだから，あらゆる方向から (x,y) に近づいてきても，ε-δ 不等式が成り立つことを意味している．そして，考えている領域内であれば，どこの点 (x,y) においても，与えられた ε に対して，同じ h_1 と k_1 が取れること，すなわち，別の点の付近を問題にしても，ε さえ定まれば，同じ h_1 と k_1 が取れることをハイネは主張している．ハイネは，前者

[4] 本書での θ は原文では x となっている．

はあらゆる方向に対して，後者はすべての点に対して，与えられた ε に対して，一様な δ がとれるという意味で,「一様連続」という述語を使ったのであろう．そしてこれは,「コーシーの定義と思われるもの (1)」であらゆる方向からの接近を認めたものとも「思われるもの (2)」とも違う概念である．今日からみれば，今日の二変数関数の連続性の定義の上に，二変数関数の一様連続性の定義があたえられたのではなく，後者が直接あたえられたのである．

ハイネからは，二変数関数の一様連続性と識別した上での，今日的な二変数関数の連続性の定義が読み取れない．このような状況の中で，いってみれば「コーシーの定義と思われるもの (2)」とハイネの「一様連続」の間に位置する，今日的な二変数関数の連続の定義はどのようにして認識されてきたのだろうか．

ディリクレは，1854 年の講義で「閉区間上の連続関数は一様連続」に相当する定理には達したが,「一様連続」という概念に達したとはいえず，そのような術語も用いていないことは，すでに見た．[5] したがって,「一様連続」という表現は，まず二変数関数に対して与えられたものである．ハイネの 1869 年の記述を解説するような具体例を挙げ，この概念をさらに深めたのは，カール・ヨハンネス・トマエ (Carl Johannes Thomae(1840-1921)) であった．彼は，ハレ大学でハイネの講義を受け，後にそこで私講師をしていたから，ハイネときわめて近い位置にいた人物である．文献的な証拠はなくても，ハイネが考えていたことや，それを押さえた上でのトマエ自身の考察も書かれている可能性がある．あるいは，ハイネがとくに指摘することなく，トマエの成果を使っているかもしれない．このことを念頭に置いた上で，トマエの記述を見ていこう．

1870 年に出版した著書『複素関数論と一変数テータ関数について』で，トマエは，ハイネが一様連続を定義した一方で非一様連続という概念を提唱したとしている．それは，ある関数において，ε に対して定められた δ が，その関数の変数とともに何回でも小さく取り替えられていくといった状況である，というのがトマエの言い方であった．

そこでトマエは，どのような状況になると関数が一様連続でなくなるかを把握しようとする．たとえば彼は $y = \frac{1}{x}$ という関数を取り上げた．そして，$x = \alpha$ （α は任意の正数）から $x = 1$ までの間で，この関数が連続関数であることを確認した上で，α があらかじめ固定されていないと面倒なことが起きることを指摘する．ε を定め，それに対して δ を与えたとしよう．$|\frac{1}{x+\delta} - \frac{1}{x}| < \varepsilon$ となるように δ を定めたつもりであっても，x の値を小さくしてしまえば，$|\frac{1}{x+\delta} - \frac{1}{x}|$ の値は，ε より大きくなってしまう．そうではあっても，$\alpha > 0$ が定まれば，任意の ε に対して十分小さな δ が取れることをトマエは指摘した．同じような状況が $x = 0$ 付近での関数 $y = \sin\frac{1}{x}$ でも起きる．このような状態を指してトマエは,「非一様連続」と称したのであった．そして,「非一様連続」という状況は，不連続点の付近で生じることを彼は指摘したのであった．

次にトマエが問題にしたのは，関数 $\sin\left(4\arctan\frac{x}{y}\right)$ の原点付近での状況である．[6] 点 $(0,0)$ を除けば x と y について連続とした後，彼は以下のことを指摘する．原点付近の任意の点 $x = a, y = b$ $(ab \neq 0)$ の周りに，その周辺での関数の値が $f(a,b)$ と ε しか異ならないように小さく円を描くとする．(a,b) が原点に近づくにつれて，このような円の半径はどんどん小さくならなくてはならない．トマエは，このことを指摘し，原点付近でこの関数は，一様ではない連続関数であるとした．そして，この関数もまた原点では -1 と

[5] Nakane, 2006 を参照のこと．

[6] トマエ自身は，この関数を $\sin\left(4\arctan\frac{y}{z}\right)$ と記しているが，ここでは (x,y) の関数と書き換えた．

1 の間のあらゆる値をとるから，連続でないとしている．さらにトマエは，この関数の不連続点の付近を問題にするのでなければ，任意の ε に対し，$|F(x,y)-F(a,b)|<\varepsilon$ となるような $|(x,y)-(a,b)|<\rho$ とするような ρ が存在するが，そのような ρ は (a,b) を動かしても，ある一定の値より小さくなることはないとした．

このような考察を通じて，トマエは，連続関数は不連続点の付近以外では非一様連続になりえないことを主張していった．ここでトマエは重要な指摘をしている．

> この機会に，ある誤りに注意しておこう．私たちは，ある領域での x と y の関数の連続性について，あらかじめ与えられた x に対して，その関数が y のあらゆる値に対して連続であり，あらかじめ与えられた y に対して，その関数が x のあらゆる値に対して連続であるとき，その関数は全体として連続であると捉えてきた．しかし，$x=0, y=0$ での関数値を 0 と定義したとすれば，関数 $\sin\left(4\arctan\dfrac{x}{y}\right)$ は，(x 軸と y 軸に沿って常に 0 であるような) 関数であるが，$x=0, y=0$ で不連続関数である．

トマエの表現は今ひとつはっきりしないが，おそらく次のような状況を指しているのであろう．$x=0, y=0$ での関数値を 0 と定義する．$y=0$ とおくと $z=\sin(4\cdot\frac{1}{2}\pi)=0$，$z=0$ とおくと $z=\sin(4\cdot 0)=0$ となるから，これらは定数関数となる．したがって，x 軸方向から，あるいは y 軸方向から (x,y) を原点に近づけると，そこで関数 z は連続である.「思われるもの (2)」によると，この関数は原点において，$x=0$ としたとき，y について連続，$y=0$ としたとき x について連続であるから，連続関数と定義することになる．しかし，たとえば，$\sqrt{3}y=x$ という条件をみたしながら原点に近づけていくと，この関数の極限値は $z=\sin(4\cdot\dfrac{1}{3}\pi)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，連続とはならない．トマエは最初に，$z=\sin\left(4\arctan\dfrac{x}{y}\right)$ は原点付近で不定形になるから，そこでは不連続であるとした．それに加えて，彼は，実際近づく方向によって極限値が変わってしまうことに気づいたのである．これまで，それぞれの変数について連続な関数は二変数についても連続だと考えていたので,「思われるもの (2)」を二変数関数の連続性の定義としてきた．しかし，そのことを見直さなければならない．おそらくトマエはこう考えたのであろう．数学史家エレナ・ジェスパールは，トマエのこの指摘を,「思われるもの (2)」を呼び起こしたコーシーの定理に対する最初の反例と評価している．

ただし，トマエの記述の中に，それにかわるべき二変数関数の連続性の定義は与えられていない．ハイネの「一様連続」の定義を踏まえ，トマエと類似の例を参照しつつ，二変数関数の連続性の定義を与えたのは，シュワルツであった．1872 年，クレレ誌に掲載された論文 “偏微分方程式 $\frac{\partial u^2}{\partial x^2}+\frac{\partial u^2}{\partial y^2}=0$ の積分について ” の注のなかで，シュワルツはハイネの 1869 年論文に言及し,「二変数関数は，考えている領域のなかで，第一の変数のそれぞれの値に対して，第二の変数について連続関数であり，同時に第二の変数のそれぞれの値に対して，第一の変数について連続関数であるとき，その関数は二変数として連続であるとする定義は多くの場合不十分なことが証明される」とする．シュワルツもまた,「思われるもの (2)」を連続性の定義ととらえていたが，それでは不十分であると考えていた．そしてトマエとは独立に気がついたと明記した上で，類似の関数

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

は原点付近で不連続といわれるものではないかとの疑問を示している．おそらく上述したものと同様の考察がなされたのであろう．

そこでシュワルツは，自分は数学を始めた頃から気がついていたとして，以下のような定義を与える．

> 0 ではない正の量 ε を 0 とは異なる大きさという仮定のもとでとり，それを際限なく小さくなるようにすることができるとする．関数 $f(x,y)$ が数値の組 (x_0,y_0) の周辺で２つの（連続的に変化する）実変数について連続とは，以下のことである．(x_0,y_0) の付近で２次元に広がる範囲においてある境界を定めることになるが，[領域内の] すべての点に対し，本来の領域を定め，その領域に対し関数が言明され，同時に x_0+h, y_0+k が属するその定められた境界のある領域で，差 $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$ の絶対値が ε より小さくなるように，ある境界を定められることである．そして，境界が定められた各領域の形状に対しては，一般に何ら制限はない．ある関数が，(x_0,y_0) を含む与えられた領域内部と境界のすべての点に対し，この条件をみたすならば，今考えている関数は，その領域において，それらの変数の連続関数である．

シュワルツは，どのような方向から近づいても極限値が等しくなることを，$|f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$ となるような２次元平面内の領域がとれると明確に表現したのであった．ハイネの「一様連続」と対比すると，どこの点 (x,y) においても，与えられた ε に対して，同じ h_1 と k_1 が取れることの明確な言及がない．しかしシュワルツは，この領域では，自分自身の定義がハイネの「一様連続」の定義と同等であるとしている．具体的な証明はないが，1854 年のディリクレの証明にならえば，「領域内部と境界のすべての点」に対して，すなわち閉領域で定義された連続関数はハイネの意味で「一様連続」であることを示すことは，そう難しくないはずである．

シュワルツ自身が，「数学を始めた頃から」といっていることから，彼は自分で二変数関数の連続性の定義に達したのは間違いなかろう．ハイネが考えていたのは，閉領域なのか，開領域なのかははっきりしない．いずれにせよ，閉領域において，ハイネの「さらに」以前の定義があれば，「さらに」以降は自動的に導かれることに，シュワルツは気づいたのであろう．ただし，シュワルツには，ハイネの「一様連続」ではないが連続であるような関数を定義するという発想は見られないし，両者を対比して理解するための例も挙げられていない．おそらくシュワルツは，開領域で関数の連続性を定義するといった，両者を区別しなければならない状況に出会わなかったのであろう．

一様連続性の概念の確立

そうであるとすれば，「一様連続」と区別したうえで単なる連続関数を定義していくには，まず，一様連続という用語とその概念が確立する必要があるのではないだろうか．そのように考えると，トマエが 1870 年に挙げた「非一様連続」の例が重要な意味を持ってくる．トマエの記述を再度取り上げよう．

1869 年のハイネの定義は二変数関数に対してなされていたから，「すべての点とあらゆる方向」が問題になっていた．しかし，トマエが最初の例で扱ったのは，一変数関数である．ハイネの「一様連続」を一変数関数に適用すると，「あらゆる方向」を考える必然性がなくなってしまうので，「すべての点」に対して統一的な不等式が成り立つこと，すなわち δ が ε のみに依存して定まる状況を一様連続，ε のみならず変数 x にも依存している状況を非一様連続とトマエが称していることが読み取れる．おそらくハイネはこのことに気づき，このふたつを識別し，前者は後者の特別な場合と位置づけて概念を整備したのであろう．そこで，今日いうところの一様連続性が浮かび上がってくるのである．そして，この性質は，各点であらゆる方向からとった極限値が等しいという概念とは切り離して定義できることに，おそらくハイネもトマエも気がついたことであろう．トマエの考察

によって，二変数という制約を離れた，今日の意味での一様連続性への定義がすすめられていき，最終的には，シュワルツの論文と同じ号のクレレ誌に掲載されたハイネの論文 “関数の理論の基礎” で今日的な一様連続の定義が与えられた．

それに先立ってハイネは，各点における連続を定義する．

> 関数 $f(x)$ が定められた個々の点 $x = X$ で連続であるとは，どんなに小さく与えられた ε それぞれに対して，正数 η_0 よりも小さい η に対し，差 $f(X \pm \eta) - f(X)$ が ε よりも大きくなることがないような η_0 が存在することである．

この定義を用いていくつかの考察をした後，彼は，単なる連続性と一様連続性を対比させ，次のような定義を与えた．

> 関数 $f(x)$ が $x = a$ から $x = b$ で連続とは，a と b を含めた $x = a$ から $x = b$ の各点で連続であることである．その関数が $x = a$ から $x = b$ で一様連続であるとは，どんなに小さく与えられた ε それぞれに対して，正数 η_0 よりも小さいすべての η に対して $f(x \pm \eta)$ が ε よりも小さくなるような η_0 が存在する．ただし x がどの値をとっても，x と $x + \eta$ が a から b の間にあるならば，同一の η_0 がその要請に応じなければならないことが必要とされる．

これが今日まで引き継がれている一様連続性の定義が初めて登場した場面である．この概念が確定して初めて，ディリクレは 1854 年講義で，連続関数と一様連続関数の関係を提示していたと表現することができるのである．また，コーシーやワイエルシュトラスと異なり，ハイネが点別連続と区間連続を明確に区別していることも注目に値する．シュワルツが二変数に対して「領域に対して連続」という表現を使っていたのは先にみたとおりである．各点での連続と区間での連続の違いを数学者たちは漠然と気づいていたであろう．しかし，一様連続性の定義を導入するにあたって，独立変数の変化する値の範囲を表立って扱わなければならなくなり，それに対比する形で各点での連続性を定義する必要性が認識されたためであろう．

ひとたび一様連続の概念が確立すると，逆に二変数の連続性が一様連続と切り離された形で認識されるようになる．「思われるもの (2)」の問題点を回避するような定義は，ハイネの 1869 年論文の定義の「さらに」以前の部分だけでよいという判断になろう．「さらに」以降でいわれている「境界で定められた領域内のすべての (x, y) と $(x + h, x + k)$ に対して」という状況は二変数連続関数の一様性にかかわることになるのが，この時点では明確になっている．また，一様連続の概念の確立をもって，ディリクレの言明は「閉区間上の連続関数は一様連続」と解読できるようになったのだから，シュワルツの定義から閉区間という制約をはずせば，一様連続ではない連続関数の定義が導かれることになろう．おそらくこのような理解が自然に広がっていったのではないか．

5. 二変数関数の定義の確立

誰が二変数関数の連続の定義を最初に明言したか，残念ながら特定することができない．19 世紀末から 20 世紀はじめにかけて出版された『数理科学百科事典』でも，たとえばシュワルツの 1872 年の論文の脚注にある，などと書いてあるので，当時でもきちんとした定義が載っている教科書を特定するのは難しかったのだろう．

しかし少なくとも 1886 年のワイエルシュトラスの関数論の講義では，多変数関数 $x = x(u_1, \ldots, u_n)$ の $(a_1, \ldots, a_n)$ での連続性が

任意に小さい正の ε に対し，$|u_\lambda - a_\lambda| < \delta(\lambda = 1, 2 \ldots, n)$ のとき，$|x - b| < \varepsilon$ となるように δ がとれるときである．

と定義している．ここで $b = x(a_1, \ldots, a_n)$ である．また，ワイエルシュトラスは，このことを次のようにも表現できるとしている．それは，

上のような ε に対し，a のまわりに半径 ρ を定め，$\sum_{\lambda=1}^{n}(u_\lambda - a_\lambda)^2 < \rho^2$ となるとき，$|x - b| < \varepsilon$ となるように ρ がとれる

とき連続とするものである．もちろんこの二つはまったく等価である，とワイエルシュトラスは述べている．

その上で定義される概念としての一様連続性が，次のように定義されている．

定められた区間 $(a,\ b)$ の積において，任意に小さな ε に対し，一つの δ を定め，$|u' - u| < \delta$ ならば，$|f(u') - f(u)| < \varepsilon$ という条件が区間 $(a,\ b)$ の積の中の任意の点に対してみたされることである．

ここで，$u = (u_1, \ldots, u_n)$，$u' = (u'_1, \ldots, u'_n)$ である．[7] これが 2 つの区間の積だった場合，彼がそれを領域と呼ぶかどうかははっきりしない．また，開区間・閉区間がどの程度意識されていたかも明確ではない．しかし，少なくともこの時点では，今日の二変数以上の関数の連続性が，一様連続性と区別される形で，明確に定義されているといっていいだろう．

6. おわりに

今日の微積分の講義では，二変数関数の連続性の定義に引き続いて「二変数関数がそれぞれの変数について連続であることと，二変数関数として連続であることはおなじではない」と教えられ，冒頭に述べた (*) 式のような反例が示される．そのため，このことは 19 世紀の数学者たちにとっても自明で，二変数関数の連続性を定義しようとすれば直ちに把握されるように思える．しかし，これまでの考察からわかったように，実際にこのような反例が挙がり，コーシーの議論の不備が明らかになるまでに 50 年近くの年月がかかっていた．

このことを十分に把握していなかったため，数学者・数学史家は，二変数関数の連続性の定義の形成にかかわる重要な事柄を見落としてしまったのであろう．二変数関数の連続性を記述するために ε-δ 論法が採用されたということはなかった．また，二変数関数の連続性は，二変数関数の一様連続性の定義が確立した後に定義されたものであった．

今日の微積分の教科書でも，ε-δ 論法で定義された一変数の連続性を自然に拡張せよという程度の記述にとどまっているものが多く，二変数関数の連続性について明確な説明のあるものは案外少ない．あるいは数学者は，二変数関数の連続性の把握が予想以上に煩雑であることを察知しているのかもしれない．

参考文献

Cauchy, A.-L., 1821/1990. *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique, I^{re}* partie : analyse algébrique, Paris. Later edition CLUEB, Bologna 1990 (Bottazzini ed.)

[7] ワイエルシュトラスの表現，eine bestimmten intervalls $(a,\ b)$ を定められた区間の積と訳出した．

Cauchy, A.-L., 1829. *Leçons sur le calcul différentiel*, Paris. Reproduced in *Oeuvres completes d'Augustin Cauchy*,(2), 4, 263-609.

Dirichlet, P.G.L., 1904. *Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen* (L. Arendt ed.). Braubschweig.(1854 年の講義)

Dugac, P., 1971. " Eléments d'analyse de Karl Weierstrass," *Archives for History of Exact Sciences* 10, 41-176.

Gispert-Chambaz, H.,*Camille Jordan et les fondements de l'analyse : comparison de la 1ere edition (1882-1887) et de la 2eme (1893) de son cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique*, Publications mathematiques d'Orsay, no 82-05, 1982.

Heine, E., 1869. "Über trigonometrische Reihen," *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 71, 353-365.

Heine, E., 1872. "Die Elemente der Funktionenlehre," *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 74, 172-188.

NAKANE, M., 2005, "Weierstrass's Foundational Shift in Analysis: His Introduction of the ε - δ Method of Defining Continuity and Differentiability", *Proceeding of the Canadian Society for History and Philosophy of Mathematics*, Vol.17, pp.171-177.

NAKANE, M., 2006, "Encounter with uniform continuity: Cauchy's algebraic approach vs. Dirichlet's geometriacal approach", 『津田塾大学数学計算機科学研究所報』, No.27, pp.86-94.

Pringsheim, A., 1899, "Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre", *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* [Art.II A1], Bd II, Teil I,1, pp.1-53.

Schwarz, H.A.,1872. "Zur Integration der partiallen Differentailgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$," *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 74, 218-233.

Thomae, J., 1870. *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Varänderlichen* , Halle.

Weierstrass, K.,1861,*Differential Rechnung*, Vorlesung an dem Königlich Gewerbeinstitute, manuscript 1861, typewritten by H.A. Schwarz, Math. Bibl. Humboldt Universität Berlin.

Weierstrass, K.,1988, *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen : Vorlesung Berlin 1878 / Karl Weierstrass* ; in einer Mitschrift von Adolf Hurwitz, ed. by Peter Ullrich.

Weierstrass, K. 1988, *Ausgewahlte Kapitel aus der Funktionenlehre : Vorlesung, gehalten in Berlin 1886, mit der akademischen Antrittsrede, Berlin 1857, und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weiestrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86*, ed. by R. Siegmund-Schultze.