「翦管術」の流れ

聖心女子学院 田辺 寿美枝 (Sumie Tanabe)
Sacred Heart Senior High School

1 翦管術

1.1 「翦管術」とは

「翦管術」とは連立1次合同式(以下,剰余方程式と呼ぶ)

「$x \equiv r_1 \pmod{m_1}, \cdots, x \equiv r_n \pmod{m_n}$」

の解法のことをいう．剰余方程式は中国の古算書『孫子算経』(400年頃,著者不詳)の中に「物不知其総数」としてある1題が嚆矢とみられ,暦学上の必要により中国では古くから剰余方程式の解法が確立し,伝承されていた.『孫子算経』の後,『数書九章』(1247年,秦九韶)では「大衍総数術」として9題,南宋の『楊輝算法』(1274〜1275年,楊輝)の「續古摘奇算法」(1275年)では「翦管術」,俗名「秦王暗點兵猶覆射之術」として5題,『算法統宗』(1592年,程大位)では「物不知其総数」,「韓信點兵」として3題など,様々な名称とともに剰余方程式が伝えられていた．現在「中国剰余定理」(Chinese Remainder Theorem)と称されることもあるが,中国では「孫子定理」と呼ばれ,高校教科書で単元としても取り上げられている．日本においては『孫子算経』の伝来とともに,古く奈良時代から「剰余方程式」は知られていた.しかし,時代を下り江戸時代になって『算法統宗』をもとにして書かれたとされる『塵劫記』(1627年,吉田光由)で,法が3,4,5の剰余方程式が「百五減算」として紹介され,広く一般庶民にまで親しまれるようになった.

1.2 『楊輝算法』から和算「翦管術」へ

関孝和(1642？〜1708)は,中国から伝来し,庶民の遊戯的問題としても親しまれていた剰余方程式を一般化し「翦管」と名付け,その解法を「翦管術」として,『括要算法』,『大成算経』に著した.

『括要算法』は1680年〜1683年に関が書いたものをもとに,関の没後,関

流の門弟,荒木村英,大高由昌によって編集され,1712年出された刊本である.『大成算経』(1683年〜1710年)以前に書かれたもので,誤植も見られるが,関流の伝本の中核となった書と見られている.

『大成算経』は建部賢明(かたあき),賢弘(かたひろ)兄弟との共著であり,1683年頃から始め,およそ28年の歳月をかけて編まれ,関の没後,『括要算法』の出版よりは2年ほど早い1710年頃に完成されたとみられる写本である.この『大成算経』第6巻の第6章「翦管」の冒頭の解説では,「翦管術」という名称ばかりでなく,「秦王暗點兵」という『楊輝算法』にある別称までもが紹介されている.関や建部兄弟が『楊輝算法』を読み,そこから「翦管術」,「秦王暗點兵」の名を引用したことは明らかといえよう.

1.3 関孝和と『楊輝算法』

関孝和は奈良の寺へ行き,寺にあった算書を写本し,江戸に持ち帰り3年の歳月をかけそれを読解し,会得したと斉東野人の『武林陰見録』(1738年)に記されている.『武林陰見録』は武士など当時の有名人の伝記集で,没後30年ほどになる関孝和の伝記も含まれており,今日語られている関に纏わる幾つかの逸話が載せられている.しかし,その真偽のほどは定かでなく,実際に奈良の寺へ行ったか否か,或いはその中国の算書が何であったかも確かな証は得られていない.しかし,この算書は『楊輝算法』であったと考えるのが通説となっている.その根拠の一つは,奥付に関孝和の署名がある『楊輝算法』の写本が現在に伝わっており,中国で編纂された『中国科学技術典籍通彙 數學卷 』(1993年,任継愈他)には,奥付に関孝和の署名がある『楊輝算法』写本が収められている.一方,その写本とは奥付の年紀が異なる別の写本も現存している.『中国科学技術典籍通彙 數學卷 』に収められているものには,「寛文辛丑仲夏下浣日訂写訖」とあり,また著者が目にする機会を得た故薮内清氏所蔵,現在川原秀樹氏(東大大学院人文社会系研究科)所蔵の写本には,「寛文癸丑仲夏下浣日訂写訖」とある.この奥付の中の1文字「癸」と「辛」の違いについては,寛文年間が寛文13年(癸丑,1673年)の9月21日に改元され延宝元年となったため,暦上は「寛文癸丑」はありえないものとの誤解から「寛文辛丑」(寛文元年,1661年)と書き換えられてしまったのではないかとの推察もあり(参考文献[A10] p 202),また「寛文辛丑」が正し

いとする説もある (参考文献 [B6]). 仮に, 関孝和の生年を 1640 年とすると, 「寛文癸丑」であれば, 関 33 才, 「寛文辛丑」であれば関 21 才のときに『楊輝算法』を写本したことになる.

1.4 中国伝来の剰余方程式の解法

剰余方程式

「$x \equiv r_i \pmod{m_i},\ i = 1, \cdots, n$ 但し $(m_i, m_j) = 1\ (i \neq j)$」$\cdots$(1)

についての中国の算書に伝わる解法を以下に述べる[1].

まず $i = 1, 2, \cdots, n$ それぞれについて, 不定方程式

「$\dfrac{M}{m_i}x - m_i y = 1$, 但し $M = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$」$\cdots$(2)

を解き, 解を「$\dfrac{M}{m_i}x = x_i$」とする.

この x_i は,

「$x_i \equiv 1 \pmod{m_i},\ x_i \equiv 0 \pmod{m_j} (i \neq j)$」$\cdots$(3)

を満たすので, 剰余類「$x \equiv \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \pmod{M}$」が剰余方程式 (1) の解であるが, これら条件を満たす x のうち正の最小数ひとつのみを答としている.

2 関孝和の「翦管術」

2.1 『括要算法』の「翦管術」

『括要算法』は, 元(げん), 亨(こう), 利(り), 貞(てい)の 4 巻からなっており, 4 巻それぞれは, 元巻 (第 1 巻) は累裁招差法, 垛(だ)積(せき)総術 (パスカルの三角形, ベルヌイ数) など, 亨巻 (第 2 巻) は 諸約術, 剰一術から翦管術に至る整数論, 利巻 (第 3 巻) は角術 (正多角形の辺の長さと内接円, 外接円の半径に関する考察), そして貞巻 (第 4 巻) は利巻の結果を利用して円周率を求めるなど, 所謂円理と称される内容となっている. 更にその亨巻 (第 2 巻) は, 前編, 後編の 2 編からなっている. 前編は「諸約の法」と名付けられ,「互約, 逐約, 斉約, 遍約, 増約, 損約,

[1] 整数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ の最大公約数を $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$, 最小公倍数を $\{m_1, m_2, \cdots, m_n\}$ と表す.

零約, 遍通, 剰一」の約法九項目 (公約数, 公倍数の求め方, 1次不定方程式の解法など) の解説からなっている[2]. 続く後編は「翦管術解」と題され, 以下に挙げる9題の剰余方程式とその解法を示している.

$\boxed{1}\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$ 答 $x = 16$

$\boxed{2}\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{36} \\ x \equiv 14 \pmod{48} \end{cases}$ 答 $x = 110$

$\boxed{3}\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 1 \pmod 5 \\ x \equiv 5 \pmod 7 \end{cases}$ 答 $x = 26$

$\boxed{4}\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 6 \\ x \equiv 3 \pmod 8 \\ x \equiv 5 \pmod{10} \end{cases}$ 答 $x = 75$

$\boxed{5}\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \\ x \equiv 2 \pmod 9 \\ x \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$ 答 $x = 128$

$\boxed{6}\begin{cases} 35x \equiv 35 \pmod{42} \\ 44x \equiv 28 \pmod{32} \\ 45x \equiv 35 \pmod{50} \end{cases}$ 答 $x = 13$

$\boxed{7}\begin{cases} 8x \equiv 2 \pmod 3 \\ 7x \equiv 3 \pmod 4 \\ 6x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$ 答 $x = 13$

$\boxed{8}\begin{cases} 34x \equiv 6 \pmod 8 \\ 34x \equiv 14 \pmod{20} \\ 34x \equiv 23 \pmod{27} \end{cases}$ 答 $x = 11$

$\boxed{9}\begin{cases} 13x \equiv 3 \pmod 7 \\ 13x \equiv 8 \pmod 9 \end{cases}$ 答 $x = 11$

平易な数値を用いながら, それぞれに特色のある9題が例示されている.

『孫子算経』(400年頃) にはじまる中国の算書に伝わる剰余方程式,

「$x \equiv r_i \pmod{m_i},\ i = 1, \cdots, n$ 但し $(m_i, m_j) = 1\ (i \neq j)$」…(1)を

「$a_i x \equiv r_i \pmod{m_i},\ i = 1, \cdots, n$」」…(1′)

と一般化し,$(m_i, m_j) \neq 1$, 即ち, 法 m_i, m_j が互いに素でない問題を取り入れている. 第1問から第5問は $a_i = 1$, 第6問から第9問は $a_i \neq 1$, そしてさらに, 奇数番の問題は法が互いに素,$(m_i, m_j) = 1$ であり, 偶数番の問題は $(m_i, m_j) \neq 1$, 法が互いに素でない問題となっている.

この『括要算法』の「翦管術解」9題の中から2題, 第3問と第6問を現代の数式記法を用いて紹介する[3].

---

[2]前編の諸約術, 剰一術に関しては参考文献 [A7][B5] 参照

[3]他の問題及び詳解は参考文献 [A7][B5][B7] 参照

2.2 『括要算法』の「翦管術解」第3問

第3問の原文は「今有物不知総数, 只云, 三除余二箇, 五除余一箇, 七除余五箇, 問総数幾何. 答曰, 総数二十六箇」とある. 合同式を用いて表せば

「$x \equiv 2 \pmod 3, x \equiv 1 \pmod 5, x \equiv 5 \pmod 7$, 答 $x = 26$」

となる. 続く「術文」では, この剰余方程式を

「$2 \times \underline{70} + 1 \times \underline{21} + 5 \times \underline{15} = 236, 236 - 105 - 105 = 26$…答」と解いている.

ここで, アンダーラインのキーナンバー $\underline{70}, \underline{21}, \underline{15}$ それぞれは,

「$x_1 \equiv 1 \pmod 3, x_1 \equiv 0 \pmod 5, x_1 \equiv 1 \pmod 7$」

を満たす最小の正の整数 $\underline{70}$,

「$x_2 \equiv 0 \pmod 3, x_2 \equiv 1 \pmod 5, x_2 \equiv 0 \pmod 7$」

を満たす最小の正の整数 $\underline{21}$,

「$x_3 \equiv 0 \pmod 3, x_3 \equiv 0 \pmod 5, x_3 \equiv 0 \pmod 7$」

を満たす最小の正の整数 $\underline{15}$ となっている.

従って, これらキーナンバーの性質から,

$$\begin{aligned} 236 = 2 \times \underline{70} + 1 \times \underline{21} + 5 \times \underline{15} &\equiv 2 \pmod 3 \\ &\equiv 1 \pmod 5 \\ &\equiv 5 \pmod 7 \end{aligned}$$

であり, 236 は問題の条件に合う数のひとつであり, 一般解は「$x \equiv 236 \pmod{105}$」と分かる. ここでの法 105 は [3,5,7] の最小公倍数である. 和算では条件に合う正の最小数だけを答えるのが常であったため, 236 から [3,5,7] の最小公倍数 105 を 2 回引いた「26」だけを答としている.

『塵劫記』で紹介された「百五減算」とは, この第3問と同様の問題, 即ち法が [3,5,7] である問題に限定して名付けられたもので, 最後に [3,5,7] の最小公倍数 105 を引くことに由来している.

この第3問の問題文の直前には,『算法統宗』の書名と共に「孫子歌曰」として七言絶句,

「三人同行七十稀　五樹梅花廿一枝
七子團圓正半月　除百令五便得知」

が紹介されている. 剰余方程式 (1) で「$n = 3, m_1 = 3, m_2 = 5, m_3 = 7$」の場合, (3) 式を満たすキーナンバー x_i $(i = 1, 2, 3)$ は「$x_1 = \underline{70}, x_2 = \underline{21}, x_3 = \underline{15}$(半月)」であること, さらに $\{m_1, m_2, m_3\} = 105$ となることを覚えやすく歌

に込めたものである.

また,「術文」の中ではこれらのキーナンバー, $x_1 = \underline{70}$ を「三除法」, $x_2 = \underline{21}$ を「五除法」, $x_3 = \underline{15}$ を「七除法」と呼び, さらに $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 35$ を「去法」と名付けている. 一般に和算では不定方程式 (3) を解いたキーナンバー x_i を「m_i 除法」, 法 $m_i (i = 1, \cdots, n)$ の最小公倍数 $\{m_1, m_2, \cdots, m_n\}$ を「去法」と呼んでいた.

「術文」に続く「解文」ではキーナンバー, 三除法 $x_1 = \underline{70}$, 五除法 $x_1 = \underline{21}$, 七除法 $x_2 = \underline{15}$ の求め方が述べられている.

三除法は, 不定方程式「$\overset{5\times 7}{35}x - 3y = 1$」を「剰一術」を用いて解き,
左段数 $x = 2$ から左総数 $35x = \underline{70}$(三除法) を得る.
五除法は, 不定方程式「$\overset{3\times 7}{21}x - 5y = 1$」を「剰一術」を用いて解き,
左段数 $x = 1$ から左総数 $21x = \underline{21}$(五除法) を得る.
七除法は, 不定方程式「$\overset{3\times 5}{15}x - 7y = 1$」を「剰一術」を用いて解き,
左段数 $x = 1$ から左総数 $15x = \underline{15}$(七除法) を得る.

「剰一術」とは, 2元1次不定方程式 (Diophantos 方程式)

「$Ax - By = 1$ 但し, A, B は自然数の定数, $(A, B) = 1$」$\cdots (*)$

の解法,「術」のことである. 関孝和は『括要算法』亨(こう)巻の前編「諸約の法」の中で, 不定方程式 $(*)$ およびその解法のことを「剰一」と名付け, 詳しく解説している.「剰一」とは「一を剰(あま)す」という意味で用いたものと思われる.「剰一術」は後編の「翦管術」のための重要な道具立てとして置かれている. 特に「翦管術」の解法の中での「剰一術」は「x の最小の正の整数解」から「Ax の値」(m_i 除法) を求めることを専らとして用いられていた.

2.3 『括要算法』の「翦管術解」第6問

第6問の原文は

「今有物不知総数, 只云, 三十五乗四十二除余三十五箇. 四十四乗三十二除余二十八箇. 四十五乗五十除余三十五箇. 問総数幾何. 答曰, 総数一十三箇.」

とある. 合同式を用いて表せば

「$35x \equiv 35 \pmod{42}, 44x \equiv 28 \pmod{32}, 45x \equiv 35 \pmod{50}$

答 $x = 13$」$\cdots$ ①

となる. この第6問では, 剰余方程式 (1′) に関して,

・$a_i \neq 1$ $(a_1 = 35,\ a_2 = 44,\ a_3 = 45)$

・$(m_i, m_j) \neq 1$ (法 $m_1 = 42, m_2 = 32, m_3 = 50$ が互いに素でない)

となっていることに注目したい.

問題文に続く「解文」では, 3本の合同式それぞれを約して,

「$5x \equiv 5 \pmod 6), 11x \equiv 7 \pmod 8), 9x \equiv 7 \pmod{10}$」$\cdots$ ①′

とし, さらに法 $[6, 8, 10]$ を $[3, 8, 5]$ と逐約(ちくやく)[4] し,

「$5x \equiv 5 \pmod 3, 11x \equiv 7 \pmod 8, 9x \equiv 7 \pmod 5$」$\cdots$ ①″

とした後, 以下第3問と同様の手続きで解いている. すなわち, 第6問の初めに与えられた剰余方程式 ①を①′ に, そして更に法を逐約し ①″ にと置き換えて解いている.

一般に, 不定方程式「$Ax - By = 1$」を解くためには, A, B(剰余方程式における各合同式の法) が互いに素でなければならない.「竊管術解」第6問の法は互いに素ではない. 従って逐約して得た互いに素である新しい法に置き換えて解いている.

しかし,法 $[m_1, m_2, m_3]$ が互に素でない剰余方程式 (b) とその法を逐約して得た新たな法 $[m_1', m_2', m_3']$ に置き換えた剰余方程式 (b′) は一般には同値とはいえない.

$$
(\mathrm{b}) \begin{cases} a_1 x \equiv r_1 \pmod{m_1} \\ a_2 x \equiv r_2 \pmod{m_2} \\ a_3 x \equiv r_3 \pmod{m_3} \end{cases}
\qquad
(\mathrm{b}') \begin{cases} a_1 x \equiv r_1 \pmod{m_1'} \\ a_2 x \equiv r_2 \pmod{m_2'} \\ a_3 x \equiv r_3 \pmod{m_3'} \end{cases}
$$

剰余方程式 (b) と (b′) が同値であるための条件は,

$$
(\#) \begin{cases} a_1 r_2 \equiv a_2 r_1 & \pmod{(m_1, m_2)} \\ a_2 r_3 \equiv a_3 r_2 & \pmod{(m_2, m_3)} \\ a_3 r_1 \equiv a_1 r_3 & \pmod{(m_3, m_1)} \end{cases}
$$

であり, 剰余方程式 (b) が解を持つための必要十分条件もまた (#) である. さ

[4]互いに素でない自然数の組について, その組の最小公倍数を変えずに, 各2数が互いに素となるように約すこと. [例](105,112,126) を逐約すると (5,16,63) となる. 逐約の結果は一意ではない.

らに，その時，解は法の最小公倍数 $\{m_1, m_2, m_3\}$ において一意である.『括要算法』に取り上げられている剰余方程式９題のうち，偶数番の４題は法が互いに素でない問題であるが，それら４題はみな悉く条件 (#) を満たしているものである. 多数の数値例を検証する中で，剰余方程式が解を持つための条件 (#) について，どの程度の認識を持ったうえで，条件 (#) に適ったものばかりを例示していたものであろうか. 条件 (#) に関する言及は見当たらない.

2.4 『大成算経』の「翦管術」

建部賢明，賢弘兄弟との共著とされている『大成算経』であるが，関はその完成を待たず 1708 年に没し，賢弘自身も公務多忙となり，編集の最終段階においては，建部賢明が単独で仕上げたものであると『六角佐々木山内流建部氏伝記』(1715 年，建部賢明) には記されている. 従って，関が関与したものである一方，関だけの考察によるものではないことも確実である. 刊本でないこともあり，関流直系の伝本とはならず，研究，利用された形跡の少ない算書であったとみられている. 従って，関以後の「翦管術」は主に『括要算法』をもとに伝えられていった. しかし『大成算経』には質量共に『括要算法』を上回る「翦管術」問題 17 題が収められている. その『大成算経』は前集 (第１巻～第３巻)，中集 (第４巻～第 15 巻)，後集 (第 16 巻～第 20 巻) の３部からなり，中集に含まれる第６巻の第６章が「翦管」と題されている. その直前の第５章は「諸約」と題され，「互約，逐約，斉約，遍約，累約，零約，重約，増約，損約，添約」の約術十項目が例題と共に解説されている. この第５章と第６章は，丁度『括要算法』亨(こう)巻の前編「諸約術」と後編「翦管術解」にまさに対応している. しかし，約術の項目立てには幾つかの相違がある. 例えば『括要算法』をはじめその後の関流を中心とした和算では「剰一術」と称されている一次不定方程式 (∗) の解法であるが，『大成算経』第５巻では右辺の値を１に限らないなど不定方程式 (∗) を変形した問題の解法を含め，「累約術」と称している. その『大成算経』第６巻「翦管」では，まず冒頭で「翦管術」の一般的な解説が述べられ，その後『括要算法』の「翦管」問題９題と同様の「総数を求める」，標準的な剰余方程式８題が例示，解説されている. その後，さらに手を加えた形の剰余方程式 (予め総数を与え，その総数に加減乗除を施した数に関する剰余方程式を与え，「加減乗除した数を求める」

問題など) 9題が紹介されている.『大成算経』の第6巻の第6章「翦管」の前半「求総数」と題された8題は以下のものである[5].

$\boxed{1}$ $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$

答　$x = 16$

$\boxed{2}$ $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 6 \\ x \equiv 3 \pmod 8 \\ x \equiv 5 \pmod{10} \end{cases}$

答　$x = 75$

$\boxed{3}$ $\begin{cases} x + 6 \equiv 3 \pmod 3 \\ x - 9 \equiv 6 \pmod 7 \end{cases}$

答　$x = 22$

$\boxed{4}$ $\begin{cases} x/2 \equiv 3 \pmod 5 \\ x/3 \equiv 4 \pmod 7 \\ x/4 \equiv 6 \pmod{19} \end{cases}$

答　$x = 96$

$\boxed{5}$ $\begin{cases} 35x \equiv 35 \pmod{42} \\ 44x \equiv 28 \pmod{32} \end{cases}$

答　$x = 13$

$\boxed{6}$ $\begin{cases} 24x \equiv 12 \pmod{30} \\ 35x \equiv 7 \pmod{42} \\ 44x \equiv 28 \pmod{32} \end{cases}$

答　$x = 53$

$\boxed{7}$ $\begin{cases} \frac{2}{3}x \equiv 4 \pmod 7 \\ \frac{3}{4}x \equiv 4 \pmod 8 \end{cases}$

答　$x = 48$

$\boxed{8}$ $\begin{cases} (x+5)/2 \equiv 3 \pmod 6 \\ 3(x-4) \equiv 4 \pmod 7 \\ \frac{3}{5}(x+2) \equiv 5 \pmod 8 \end{cases}$

答　$x = 73$

ここに挙げた8題はすべて『括要算法』の「翦管術解」と同じ「総数を求める」問題である. $\boxed{1}$ $\boxed{2}$は『括要算法』と全く同じ数値の問題, $\boxed{5}$ $\boxed{6}$は『括要算法』にある問題を少し変形したものである. しかし, その他の問題 $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$のように総数に加減或いは除法を施したものは『括要算法』にはない. また, 具体的な「翦管」問題の前に, 一般的な解法の解説を述べているところは, 中国の『数書九章』の「大衍類」(第1巻、第2巻) と同様の組み立てになっている.

[5]原文に「総数二約」とあるものは「$x/2$」, 「総数取三分之二」は「$\frac{2}{3}x$」と表した.

2.5 関孝和と『数書九章』

関孝和に始まる和算の「翦管術」の特筆すべき点は, 日本に伝来したと確認されている中国の算書では, 法 $m_i(i=1,\cdots,n)$ が互いに素である剰余方程式(1)に限っている中で, 剰余方程式(1)を一般化して剰余方程式(1′)としたうえ,「法 m_i, m_j が互いに素でない」問題をも扱い,「剰一術」を用いて解法を示していることである.『括要算法』以前の和算にあっては『股勾弦鈔(ここうげんしょう)』(1672年, 星野実宣(さねのぶ))に1題, 法が互いに素でない問題「$x \equiv 5 \pmod 6$,$x \equiv 7 \pmod 8$,$x \equiv 5 \pmod{10}$」が紹介されている. ただし,「答95」だけが書かれてあり, 解法は示されていない.

このような状況の中で関は『括要算法』で「翦管術解」として, それぞれに特徴のある9題を取り上げ, 法が互いに素でない問題を含めた剰余方程式の一般的な解法を明快に示した.「翦管術」という剰余方程式の名称は中国, 南宋の『楊輝算法』(1275年, 楊輝)にあるものを引用したと見られるが,「剰一術」という名称は中国の算書には見当たらない.『孫子算経』をはじめ『楊輝算法』,『算法統宗』など, 日本に伝わったと認められている中国の算書は, 剰余方程式を扱っているものの, 問題と解答そして簡略な解法が述べられているだけで, 剰余方程式解法の核心である不定方程式 (*) の解法,「剰一」にあたる術の解説はない.

不定方程式 (*) の解法を述べている中国の算書は南宋, 秦九韶の『数書九章』(1247年)である.『数書九章』では不定方程式 (*) の解法「剰一術」のことを「大衍求一術(だいえんきゅういちじゅつ)[6]」,「翦管術」のことは「大衍総数術」と呼んでいる. そして,「連環求等」→「大衍求一術」→「大衍総数術」という流れの中で系統立てて語られている剰余方程式解法は,「互約・逐約」→「剰一術」→「翦管術」という関が示した和算における剰余方程式の解法と吻合するものであり, 更に術の実質的組立てに於いても,『数書九章』と『括要算法』は同様の手続きで進められている (参考文献 [A8][B3][B5][B7]).

『数書九章』は日本に伝来した形跡が認められていない.「我国に入った形跡がない」ことから「実際に日本に伝来しなかった」と判断する説も多くある (参考文献 [A2][A3][A10]). しかし一方, 会田安明(あいだやすあき)(1747年〜1817年)はその著書『豊島算経評林』の中で,「関は中国より伝来の書物を見て,『括要

[6] 衍(余り)が一となる術, 衍(余り)から総数を求める術という意と考えられる.

算法』を書き，自らの功績とし，もとの書物を焼き捨てた」と語っている．果たして関孝和は『数書九章』ないしはその流れを汲む書物を手にし，感化を受けていたのであろうか．或いは，時空の隔たりを超越した，数学の普遍性ゆえの必然的帰結であったのであろうか．

3　関孝和以後の「翦管術」

関孝和の没後出版された『括要算法』は，「三部抄」「七部書」と称される算書と共に関流の中核的な伝書となり，その『括要算法』によって「剰一術」，「翦管術」はよく知られるようになった．特に法が互いに素である，平易な剰余方程式の問題とその簡略な解法は数多くの和算書で扱われた．例えば『勘者御伽雙紙』(1743年，中根彦循)では「百五減算」ばかりでなく，法が[5,7,9]である問題を「三百十五減」，法が[7,9]である問題を「六十三減」と名付け紹介している．ただし，和算で常用された「翦管術」は中国伝来の解法に倣い，「最小の正の整数解」を求めることを目的としていた．江戸初期の『塵劫記』に始まる「百五減算」或いは『勘者御伽雙紙』の「三百十五減」「六十三減」などという名称は，剰余類を視野に収めているものとも窺えるが，無限個ある解すべてを全体として答えてはいない．

中根彦循は『勘者御伽雙紙』の中で，連立不定方程式，

$$\begin{cases} x+y+z=t \\ ax+by+cz=u \end{cases} \quad (\text{但し } a,b,c,t,u \text{ は有理数の定数.})$$

の正の整数解x,y,zを求める問題に関して，『改算記』(1659年，山田正重)および『改算記綱目』(1687年，持永豊次，大橋宅清)が一組の解だけを答えていることを取り上げ，「一組だけではなく，当てはまる数の組すべてを答えるべきである」と指摘し，実際複数組の解すべてを求め，答えている．しかし，一方「百五減算」などの問題の答えはそれまでの算書同様「最小の正の整数解」のみを答としている．「負の数」の概念がなかったわけではないが，限定的な認識に留まり，答の対象として「負の数」を認識するには至っていなかった．また現在のような記号法を持たず，数についての集合論的な認識および無限の概念もない中での和算の営みの特徴，数の概念の有りようを語っているものといえよう．

4 結び

関孝和によって一般化された剰余方程式の解法「翦管術」は,その後和算家たちによって大いに活用されるようになった.「剰余方程式を一般的に解いたこと」を関孝和の功績としている著述も多く見られる(参考文献[A2][A3]).しかし,『括要算法』(1712年)に先んずること450年以上の南宋,隣国中国に於て秦九韶が,既に法が互いに素でない問題を含む剰余方程式9題を扱い,解法を著している. その解法の流れは名称こそ異なれ,関の解法の流れと同様の手順,手法であり,数値的には秦九韶の挙げた9題の方が遥かに複雑な,難易度の高いものであった.しかし,たとえ関孝和が『数書九章』或いはその流れを汲む中国数学の何かしらを知り得ていたとしても,『数書九章』の「大衍総数術」と『括要算法』の「翦管術」は,解法こそ類似しているが,それぞれの9題の問題の内容は実に趣きの異なるものとなっている.『数書九章』は易,暦をはじめ米の分量など具体的,実際的な問題を扱い,それぞれの問題の数値は極めて煩雑な,難易度の高いものばかりである(参考文献[A8][B3][B7]).一方『括要算法』の9題は,みな完全に抽象化された単純な問題で,その数値はすべて整数,それも平易な数ばかりのものであった[7].しかし,『括要算法』では問題が簡潔な形のもので,数値も単純,平易であるが故に,「剰一」や「翦管術」の本質が却って際立ち,明快に,鮮やかに説示されている.このことこそが関の数学的資質を物語っていると云えるのではないだろうか.「数学」の本質とも云える一般化する力,抽象化する感性を備えていた.これが関の神髄であり,この抽象性の純度の高さによって,『括要算法』は芸術的と評価できるものといえよう.『数書九章』を見知っていたか,否かという問題は残されているとしても,少なくとも中国の算書『孫子算経』,『楊輝算法』,『算法統宗』などに伝わる「中国剰余定理」をもとに,関孝和が抽象化して著した「翦管術」は純粋数学として,文化としての和算の確かな稔り,その華の薫りを伝えているものといえよう.

[7]『大成算経』の17題には『数書九章』に近い,やや煩雑な形の問題も含まれている.

・参考文献

A. 著作

[A1] 高木貞治『初等整数論講義』共立出版　1931年

[A2] 日本学士院編 『明治前日本数学史』第2巻 岩波書店　1956年

[A3] 平山諦『関孝和』恒星社厚生閣　1959年

[A4] I.M.Vinogradoff『整数論入門』共立出版　1959年

[A5] 平山諦『東西数学物語』恒星社厚生閣　1973年

[A6] 薮内清『中国の数学』岩波新書　1974年

[A7] 平山諦, 下平和夫, 広瀬秀雄編『関孝和全集』大阪教育図書 1974年

[A8] 伊東俊太郎編『数学の歴史II 中世の数学』 共立出版　1987年

[A9] 銭宝・(川原秀城訳)『中国数学史』みすず書房　1990年

[A10] 平山諦『和算の誕生』恒星社厚生閣　1993年

[A11] 佐藤賢一『近世日本数学史 関孝和の実像を求めて』
東京大学出版会 2005年

[A12] 下平和夫 (佐藤健一, 西田知己編集協力)『関孝和』研成社 2006年

[A13] 藤原松三郎 (土倉保, 鈴木武雄編纂)『東洋数学史への招待』
一藤原松三郎数学史論文集一東北大学出版会 2007年

[A14] 藤原松三郎 (川原秀城 解説)『日本数学史要』勉誠出版　2007年

B. 論文

[B1] 平山諦 「関孝和が楊輝算法を写した年」
日本数学史学会『数学史研究』68:1 − 2　1976年

[B2] 杉本敏夫 「孫子の算法」
明治学院大学論叢『総合科学研究』5:1 − 24　1980年

[B3] 沈康身 「秦九韶の大衍総数術と関孝和の諸約術」
日本数学史学会『数学史研究』109:1 − 23　1986年

[B4] 城地茂 「もうひとつの天元術・大衍求一術」
日本数学史学会『数学史研究』148:1 − 12　1996年

[B5] 田辺寿美枝 「関孝和の翦管術」
『京都大学数理解析研究所講究録』1257:114 − 124　2003年

[B6] 城地茂 「中田高寛写・石黒信由蔵『楊輝算法』について」
『京都大学数理解析研究所講究録』1392:46 − 59　2004年

[B7] 田辺寿美枝 「関孝和の翦管術 其の二」
『京都大学数理解析研究所講究録』1513:91 − 103　2006年

算法統宗物不知總數　孫子歌曰
三人同行七十稀　五樹梅花廿一枝
七子團圓正半月　除百令五便得知
今有物不知總數只云三除餘二箇五除餘一箇七除
餘五箇問總數幾何
答曰總數二十六箇
術曰三除餘以七十乘之得一百四十箇　五除餘以二十

『括要算法』（1712年　関孝和）

算法統宗　卷五
○物不知總　孫子歌曰　又云韓信點兵也
三人同行七十稀　五樹梅花廿一枝
七子團圓正半月　除百令五便得知
今有物不知數只云三數剩二箇五數剩三箇七數剩二
箇問共若干
答曰　共二十三箇

『算法統宗』
（1592年　程大位）

物不知總數只云三三數之剩二五五數之剩三七
七數之剩二問本總數幾何　孫子
答曰二十三
解題　依名秦王暗點兵猶覆射之術　或曰一百五數但於數內去之知
術曰三數剩一下七十題內剩二下百四十
五數剩一下二十一題內剩三下六十三七數剩
一下十五題內剩二下三十三位併之得二百三十三
滿一百五數去之減兩箇一百五餘二十三
為答數

『楊輝算法―續古摘奇算法』（1275年　楊輝）

今有物不知其數三三數之賸二五五數之賸三七七
數之賸二問物幾何答曰二十三
孫子算經　卷下　七
術曰三三數之賸二置一百四十五五數之賸三置六
十三七七數之賸二置三十并之得二百三十三以二
百一十減之即得凡三三數之賸一則置七十五五數
之賸一則置二十一七七數之賸一則置十五一百六
以上以一百五減之即得

『孫子算經』
（400年頃、著者不詳）