算術幾何平均の周辺：
Borchardt による 4 項算術幾何平均と Thomae の公式

志賀弘典（千葉大学理学研究科）

Oct. 28, 2007

1 Gauss の算術幾何平均函数の理論

Gauss は 1796 年から 1814 年に渉って自分の数学的発見を，そのときどきに一冊の日記帳 (Mathematische Tagebuch) に手短に列挙している.1799 年 に楕円積分を算術幾何平均で表す等式を発見し，それが新しい解析学をもたらすものだとその日記に書いている．

Gauss の発見をその後の Jacobi の仕事と組み合わせて眺めると容易ならない事実が浮かび上がる．

Theorem 1.1 (Trinity Theorem, Gauss 1799) $x \in (0,1)$ に対して

$$\frac{1}{M(1,x)} = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}} = F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\lambda),\ (\lambda = 1-x^2),$$

ここで，左辺の $M(1,x)$ は *Gauss* の算術幾何平均で，一般に $M(a,b)$ は AGM 操作 $(a,b) \mapsto (\frac{a+b}{2},\sqrt{ab})$ の繰り返しの極限を表す．また右辺は ,*Gauss* 超幾何函数

$$F(a,b,c;\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)n!}\lambda^n \quad ((a,n) = a(a+1)\cdots(a+n-1))$$

の $(a,b,c) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$ としたものである．

$\tau \in \boldsymbol{H} = \{\tau \in \boldsymbol{C} : \mathrm{Im}\ (\tau) > 0\}$ に対し $q = \exp[\pi i \tau]$ として Jacobi theta constants の Fourier 展開表示は以下の通り：

$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\tau) = \sum_{n\in\boldsymbol{Z}} q^{n^2}, \vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\tau) = \sum_{n\in\boldsymbol{Z}}(-1)^n q^{n^2}, \quad \tau \in \boldsymbol{H}.$$

Theorem 1.2 (Isogeny Formula, Gauss が 1818 に発見.Posthumous article として全集に所載)

$$\begin{cases}\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}^2(2\tau) = \frac{1}{2}\left(\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}^2(\tau) + \vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2(\tau)\right), \\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^2(2\tau) = \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\tau)\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\tau).\end{cases}$$

$0<\lambda<1$ に対して, 楕円積分

$$\begin{cases} \eta_1(\lambda)=\int_1^\infty \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}} \in \boldsymbol{R}_{\geq 0} \\ \eta_2(\lambda)=\int_{-\infty}^0 \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}} \in i\boldsymbol{R}_{\geq 0}, \end{cases}$$

をとり,

$$\tau=\frac{\eta_2(\lambda)}{\eta_1(\lambda)}, \quad \lambda\in\boldsymbol{H}$$

と定める.τ は純虚数である. このとき λ は τ の関数として以下の表示が得られる.

Theorem 1.3 (Jacobi の第一公式, λ 函数の theta 表示) $\lambda(\tau)=1-\dfrac{\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^4(\tau)}{\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}^4(\tau)}=\dfrac{\vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^4(\tau)}{\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}^4(\tau)}$.

Theorem 1.4 (Jacobi の第二公式)

$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}^2(\tau)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda x^2)}} \ (=\frac{2}{\pi}\int_1^\infty\frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\lambda)}}).$$

以上の 4 つの定理から次のような不思議な物語が紡ぎ出される.

(あ) 楕円曲線 $y^2=z(z-1)(z-\lambda)$ から出発する. このときパラメータ λ は,一般には 0,1 と異なる複素数であれば良いが, ここでは $0<\lambda<1$ を満たす実数とする.

(い) 次に, 周期積分の比 $\tau=\int_{-\infty}^0\frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}}:\int_1^\infty\frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}}$ をつくり,theta 零値 $\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\tau), \vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\tau)$ を定める.

(う) ここで $x=\vartheta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\tau):\vartheta^2\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\tau)$ とおくと $\lambda=1-x^2$ である.

(え) さらに $1,x$ を用いてミンチパイのような無限操作 $M(1,x)$ をする.

(お) 結果として $\frac{1}{M(1,x)}$ が再び楕円積分 $\int_1^\infty\frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}}$ になっている!

2 Borchardt の 4 項算術幾何平均と Thomae の公式

この Gauss - Jacobi の物語は Gauss 以後すぐ忘れられていたが Borchardt が 19 世紀後半に Crelle Journal で紹介し, また自身でその拡張を試みた. 結果的に完全な拡張版と言えるものではなかったが, このような視点を提供したという意味は小さくない. しかし, Borchardt の仕事もまたその後忘れられていた.

ここでは, Borchardt の拡張版算術幾何平均の試みの概要を紹介する.

$a,b,c,d>0$ とする.Borchardt は次の AGM 操作を考えた:

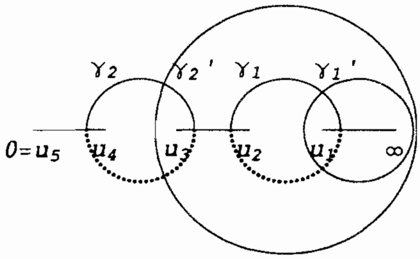
$$\psi:\begin{cases} a'=\frac{1}{4}(a+b+c+d) \\ b'=\frac{1}{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}) \\ c'=\frac{1}{2}(\sqrt{ac}+\sqrt{bd}) \\ d'=\frac{1}{2}(\sqrt{ad}+\sqrt{bc}). \end{cases}$$

この操作の繰り返しで得られる共通極限を $B(a,b,c,d)$ で表す.

種数 2 の代数曲線

$$C: y^2 = -(x-u_1)(x-u_2)(x-u_3)(x-u_4)(x-u_5),\ u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > u_5$$

をとる. C の symplectic homology basis $\{\gamma_1, \gamma_1', \gamma_2, \gamma_2'\}$ を図のようにとる（つねに $u_5 = 0$ とおいて考える）.



正則微分の基底 $\omega_1 = \frac{dx}{y}, \omega_2 = \frac{xdx}{y}$ を用意し, $\{\gamma_1, \gamma_2\}(\{\gamma_1', \gamma_2'\})$ に対する周期行列 $\Omega(\Omega')$ をつくる:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \int_{\gamma_1} \frac{dx}{y} & \int_{\gamma_2} \frac{dx}{y} \\ \int_{\gamma_1} \frac{xdx}{y} & \int_{\gamma_2} \frac{xdx}{y} \end{pmatrix}, \Omega' = \begin{pmatrix} \int_{\gamma_1'} \frac{dx}{y} & \int_{\gamma_2'} \frac{dx}{y} \\ \int_{\gamma_1'} \frac{xdx}{y} & \int_{\gamma_2'} \frac{xdx}{y} \end{pmatrix}.$$

$\tau = \Omega'\Omega^{-1}$ によって正規化された周期行列が得られ $\tau \in \mathfrak{S}_2$ となる.

行ベクトル $p, q \in \{0,1\}^2$ に対して Riemann theta Nullwerte を

$$\vartheta \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} (\tau) = \sum_{n \in \boldsymbol{Z}^2} \exp[\pi i (n + \frac{p}{2}) \tau\, {}^t(n + \frac{p}{2}) + 2\pi i (n + \frac{p}{2}) \frac{{}^tq}{2}] \quad (\tau \in \mathfrak{S}_2)$$

で定義し,

$$\beta_0(\tau) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\tau), \beta_1(\tau) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\tau), \beta_2(\tau) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (\tau), \beta_3(\tau) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (\tau)$$

と定める.

Theorem 2.1 (Formula of Thomae = Jacobi の第二公式の拡張, 1870)

$$\begin{cases} \beta_0^2(\tau) = \frac{\det \Omega}{4\pi^2} \sqrt{(u_1-u_3)(u_1-u_5)(u_3-u_5)(u_2-u_4)}, \\ \beta_1^2(\tau) = \frac{\det \Omega}{4\pi^2} \sqrt{(u_2-u_3)(u_2-u_5)(u_3-u_5)(u_1-u_4)}, \\ \beta_2^2(\tau) = \frac{\det \Omega}{4\pi^2} \sqrt{(u_1-u_4)(u_1-u_5)(u_4-u_5)(u_2-u_3)}, \\ \beta_3^2(\tau) = \frac{\det \Omega}{4\pi^2} \sqrt{(u_2-u_4)(u_2-u_5)(u_4-u_5)(u_1-u_3)}, \end{cases} \tag{2.1}$$

Theorem 2.2 (genus 2 版倍角公式 (from the Riemann theta relations) = Borchardt AGM process)

$$\begin{cases} \beta_0^2(2\tau) = \frac{1}{4}(\beta_0^2(\tau) + \beta_1^2(\tau) + \beta_2^2(\tau) + \beta_3^2(\tau)), \\ \beta_1^2(2\tau) = \frac{1}{2}(\beta_0(\tau)\beta_1(\tau) + \beta_2(\tau)\beta_3(\tau)), \\ \beta_2^2(2\tau) = \frac{1}{2}(\beta_0(\tau)\beta_2(\tau) + \beta_1(\tau)\beta_3(\tau)), \\ \beta_3^2(2\tau) = \frac{1}{2}(\beta_0(\tau)\beta_3(\tau) + \beta_1(\tau)\beta_2(\tau)). \end{cases} \tag{2.2}$$

3 Theorem of Borchardt

$u_5 = 0 < u_4 < u_3 < u_2 < u_1$ とする.

$$\begin{cases} a^2 = \beta_0^2(\tau),\ b^2 = \beta_1^2(\tau), \\ c^2 = \beta_2^2(\tau),\ d^2 = \beta_3^2(\tau) \end{cases} \tag{3.1}$$

とおく.

Proposition 3.1

$$\frac{1}{4}\det\Omega = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \int_{\gamma_1}\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} & \int_{\gamma_2}\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \\ \int_{\gamma_1}\frac{xdx}{\sqrt{f(x)}} & \int_{\gamma_2}\frac{xdx}{\sqrt{f(x)}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int_{u_2}^{u_1}\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} & \int_{u_4}^{u_3}\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \\ \int_{u_2}^{u_1}\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} & \int_{u_4}^{u_3}\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \end{vmatrix}, \tag{3.2}$$

with $f(x) = -x(x-u_1)(x-u_2)(x-u_3)(x-u_4)$ *and* $C : y^2 = f(x)$.

ここで, Ω' は純虚数行列, Ω は実行列, したがって $\tau = \Omega'\Omega^{-1} \in \mathfrak{S}_2$ も純虚数行列になっていることに注意する.
Thomae の公式によって

$$B(a,b,c,d) = B(\beta_0^2(\tau), \beta_1^2(\tau), \beta_2^2(\tau), \beta_3^2(\tau)),$$

倍角公式を何度も繰り返すと

$$= \cdots = B(\beta_0^2(2^n\tau), \beta_1^2(2^n\tau), \beta_2^2(2^n\tau), \beta_3^2(2^n\tau)).$$

Im τ は正定値であるから $\lim_{\tau\to i\infty}\theta\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{bmatrix}(\tau) = 1$ となる. したがって $n \to \infty$ とした極限をとると

Theorem 3.1 (Theorem of Borchartdt 1876)

$$\frac{1}{B(1, \frac{\beta_1^2(\tau)}{\beta_0^2(\tau)}, \frac{\beta_1^2(\tau)}{\beta_0^2(\tau)}, \frac{\beta_1^2(\tau)}{\beta_0^2(\tau)})} = \frac{1}{4\pi^2}\det\Omega\sqrt{u_1u_3(u_1-u_3)(u_2-u_4)}.$$

ここで $u_1 = 1$ とおいて C の表示を標準化すると,右辺に残った u_2, u_3, u_4 は $\kappa_1 = \frac{\beta_1^2(\tau)}{\beta_0^2(\tau)}, \kappa_2 = \frac{\beta_2^2(\tau)}{\beta_0^2(\tau)}, \kappa_3 = \frac{\beta_3^2(\tau)}{\beta_0^2(\tau)}$ の何らかの代数関数である. このようなゴミは楕円曲線バージョンでは現れなかったものである.
公式そのものは,Gauss' AGM の種数 2 版としてなかなかよくできているが, ここで生じている現象はもう少し注意深く観察する必要があると思われる.

[追記]

Carl Wilhelm Borchardt は Berlin で活躍した数学者であるが,同時に , 1856 年から歿年の 1880 年まで Crelle Journal の編集長を勤め, その間, 同誌は Borchardt Journal の名で呼ばれていた. また Jacobi 全集の編集者でもあった. 自身の全集 1 巻が出版されている.

Borchardt は Berlin 大学で Dirichlet の指導のもとで学生時代を過ごし, 後, Königsberg で Bessell, Jacobi に学んでいる.Weierstrass とは二人称で呼び合う親しい友人であり,Jacobi の晩年, イタリアでの 1 年間の療養に同行してローマ, ナポリに滞在している (1843 年？) .Berlin の数学の最盛期にその中心にあって, 当時の Berlin 界隈の数学の動向も知悉していたと推察される.

忘れられていた Gauss の算術幾何平均の仕事を Crelle 誌で紹介し, 自らも拡張を試みたのである (1876) が, また, Riemann のテータ函数の論文 (1865),Thomae の公式の論文 (1870) は, 直接編集者であった彼のもとから Crelle 誌 (= Borchardt Journal) に出ているのであるから, 必要な材料は彼の手中にあった訳である.

References

1. C.W. Borchardt's Gesammelte Werke, Berlin Druck und Verlag von Georg Reimer, 1888.
2. C.W. Borchardt, Ueber das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen, Berlin Monatsher, 53(1876), 611-621.
3. Richlot, Essai sur une m'ethode générale pour déterminer la valeur des intégrales ultra-elliptiques, fondée sur des transformations remarquables de ces transcendentes, C. R. Acad. Sc. Paris, 2 (1836), 622-627.
4. J.F. Mestre, Moyenne de Borchardt et intégrales elliptiques,C.R. Paris t.313(1991) p.272-276.
5. J. Thomae, Beitrag zur Bstimmung von $\theta(0)$ durch die Klassenmoduln algebraischer Functionen, Crelle's Jour., Vol. 71(1870).
6. Riemann, Ueber das Verschwinden der Theta-Functionen, Borchardt's Journal = Crelle jour. , Bd. 65(1865),
7. C,F, Gauss, Mathematisches Tagebuch 1796-1814, Ostwalds Kalassiker der exakte Wissenschaften 256,*Geest und Portig*, Leibzig,1976.
8. C,F, Gauss, Hundert Theoreme über die neuen Transzendenten, 1818
9. J.M. Borwein and P.B.Borwein, On the mean iteration $(a, b) \to ((a + 3b)/4, (\sqrt{ab} + b)/2)$, Math. of Comp., 53(1989), 311-326.

10. J.M. Borwein and P.B.Borwein, A cubic counterpart of Jacobi's identity and the AGM, Trans. Amer. Math. Soc., 323 (1991), no. 2, 691–701.

11. Bost, Jean-Benoît; Mestre, Jean-François, Moyenne arithmético-géométrique et périodes des courbes de genre 1 et 2. (French) [Arithmetic-geometric mean and periods of curves of genus 1 and 2] Gaz. Math. No. 38 (1988), 36–64.

12. K. Koike and H. Shiga, Isogeny formulas for the Picard modular form and a three terms arithmetic geometric mean, J. Number Theory, 124(2007), 123-141.

13. K. Koike and H. Shiga, An extended Gauss AGM and corresponding Picard modular forms, to appear on J. Number Theory 2008.

Mathematicians concerned with Berlin

C.W. Borchardt 1817-1880
Gauss 1777-1855
Riemann 1826- 1866
Jacobi 1804-1851
Dirichlet 1805 - 1859
Kummer 1810-1893
Eisenstein 1823- 1852
Kronecker 1823-1891
Weierstrass 1815-1897
Karl Johannes Thomae 1840- 1921

補遺

Borwein 兄弟が以下のように, 強引に Borchardt AGM を Gauss AGM と関連付けているが, Borchardt AGM が Gauss AGM の拡張であるとは言いがたい.

Theorem 3.2 (Borwein 1989) *Set* $0 < h < 1$.

$$B(1,h,h,h) = \left(\frac{1+\sqrt{h}}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{4K(k)K(\ell)} = \frac{M(1,k')M(1,\ell')}{(1+\sqrt{k\ell})^2},$$

where

$$\begin{cases} k = \frac{\sqrt{1-h}}{(1+\sqrt{h})^2}(\sqrt{1+3h}+2\sqrt{h}) \\ \ell = \frac{\sqrt{1-h}}{(1+\sqrt{h})^2}(\sqrt{1+3h}-2\sqrt{h}), \end{cases}$$

and

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\ k^2+k'^2=1, \ell^2+\ell'^2=1.$$