素数定理前史から

杉浦 光夫

良く知られているように素数定理は 1896 年に Hadamard [1] と de la Vallée Poussin [2] によって証明された．この二人の結果は，Riemann の論文 [3] を前提にしている．素数の分布状況は古くから数学者の興味と関心を呼んだ問題であった．既に古代ギリシアにおいて，素数は無限に存在することが証明されていた．(ユークリッド『原論』第 9 巻命題 20)．しかし一方で非常に大きな双子素数があるのに対して，一方では素数をひとつも含まぬいくらでも長い整数の区間が存在することが示すような素数分布の不規則性がある．これに対し 整数 $x>0$ 以下の素数の個数 $\pi(x)$ は，一種の平均であるためこのような不規則性を吸収してある種の規則性を示すのではないかと期待され，$x \to +\infty$ に対する漸近挙動が注目されていたのである．Gauss は若い時からこの問題に興味を持って居り，新しい素数表が出版される度に，それを調べていた．Gauss 全集第 2 巻 [4] には，300 万以下の整数の中で素数がどのように分布しているかを示す表が含まれている．その 1 ページのコピーは，この予稿の最後につけてある．これによると例えば 100 万$<n$ $\leqq$110 万となる 10 万個の整数 n の中に含まれる素数の数は 7210 個である．これに対し $\int_{100万}^{110万} \frac{dx}{\log x}=7212.99$ であり，素数の個数が積分対数でよく近似されることがわかる．また x の付近での素数の密度はほぼ $\frac{1}{\log x}$ であるとしてよいこともわかる．

また 1852 年にフランス語で発表された Chebyshev の論文 [5][6] では，極限

$$\lim_{x \to \infty} \pi(x) \Big/ \int_2^x \left(dt \big/ \log t \right)$$

が存在すれば，極限値は 1 でなければならぬことを証明している．そ

の存在を彼は証明できなかったが，十分大きなすべての x に対し，この比の値は 0.89 と 1.11 の間にあることを示した．ここではこれらの研究により 100 年以上前に Euler [7] が 1737 年に得た結果が素数定理に関連することを注意しておきたい．ここで Euler は素数の逆数の和の級数 $\sum_{p}\frac{1}{p}$ は発散することを示し，さらにその発散の位数についても述べている．このことは素数が無限に存在するだけでなく，それについての定量的な情報を始めて与えた点においても数学史上注目すべき結果である．この級数を Euler は，次の(1)のように書いている．

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots=log(log\,\infty) \tag{1}$$

Euler がどのような意味でこの等式を用いたのかは，説明がないので明らかでない．1874 年になって Mertens [8] は，(1) は次の (2) の意味だとして，これを証明した．

$$\sum_{p\leqq x}\frac{1}{p}\sim log(log\,x),\quad (x\to+\infty) \tag{2}$$

さらに詳しく言えば，次の(3)が成立つ．

$$\sum_{p\leqq x}\frac{1}{p}=log(log\,x)+\mathrm{B}+o(1)=\int_{1}^{log\,x}\frac{du}{u}+\mathrm{B}+o(1)\ (x\to+\infty) \tag{3}$$

ただし B は定数である．

いま $\mathbf{R}$ 上の離散測度 μ を素数 p では $\mu(p)=1$ で，他のすべての実数 v に対しては $\mu(v)=0$ となるものとすれば，(3) 左辺は $\int_{1}^{x}(1/v)d\mu(v)$ であるから，$u=log\,v$ とすると、(3) は次の (4) と書くことができる．

$$(4) \qquad \sum_{2\leqq p\leqq x}\left(\frac{1}{p}\right)=\int_1^x\left(\frac{1}{v}\right)d\mu(v)=\int_1^x\left(\frac{1}{v}\right)\left(\frac{dv}{\log v}\right)+B+o(1)$$

(4)により，v 付近の素数 p の密度は $1/\log v$ であると解釈される．そこで

$$(5) \qquad \pi(x)=\sum_{2\leqq p\leqq x}1 \sim \int_2^x\left(\frac{dv}{\log v}\right)=Li(x)-Li(2) \quad (x\to+\infty)$$

となる．ここで

$$Li(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_0^{1-\varepsilon}\left(\frac{dv}{\log v}\right)+\int_{1+\varepsilon}^x\left(\frac{dv}{\log v}\right)\right\} \quad ,x>1$$

は積分対数である．そして (5) から

$$(6) \qquad \pi(x)\sim Li(x) \quad (x\to+\infty)$$

となる．(6) は素数定理そのものである．従って 1737 年の Euler の結果 (1) は，Mertens の解釈 (2) によれば，内容的に素数定理を含むのである．

文　献

[1]Hadamard,J; Sur la distribution des zeros de la function ζ(s) et ses consequences arthmetiques, Bull. Soc. Math. France 24(1896),199-220.

[2]de la Vallée Poussìn,C.J; Recherches analytiques sur la théorie des nombres, Ann. Soc. Sci. Bruxelles [1] 20 (1896),183-256.

[3] Riemann,B; Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebene

Grösse, Monatshefte Preussische Akad. 1859,November.

[4] Gauss,C.F.; Tafel der Frequenz der Primzahlen, Werke Bd II, 436-443

[5] Legendre,A.M.; "Théorie des Nombres",4th.ed.1830.

[6] Chebyshev,P.L.;Sur la fonction détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. J. Math. Pures. Appl.17 (1852)

[7] Euler,L; Variae observationes circa series infinitas, Comm. Acad. Sci. Petorspolitanae 9 (1737), 222-236 (Opera(1)Vol.14,pp.216-244)

[8] Euler,L; Introductio in Analysin Infinitorum, Bousquet and Socios. Lausanne 1748(Opera(1)Vol.8),(『オイラーの無限解析』,高瀬正仁訳, 海鳴社,2001)

[9] Mertens,F.; Eine Beitrag zur Analytsischen Zahlentheorie, J. Reine Angew. Math.78(1874) ,46-62

1000000 . . . 1100000

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1										1
2		1				1		1	1		4
3		4	2	2	3	1	2	3	3	1	21
4	2	8	5	4	3	6	9	4	5	8	54
5	11	10	8	18	12	10	10	12	15	8	114
6	14	14	18	21	16	22	19	15	17	15	171
7	26	17	23	23	24	24	17	22	20	21	217
8	19	19	21	7	14	15	20	17	15	17	164
9	11	13	9	13	14	14	12	13	11	16	126
10	8	6	8	5	9	5	5	9	7	9	71
11	6	6	4	6	3	1	3	1	4	5	39
12	1	1	2	1	1	1	2	2	1		12
13	1	1			1		1	1	1		6
14											
15											
16											
	752	719	732	700	731	698	713	722	706	737	7210

$$\int \frac{dx}{\log x} = 7212{,}99$$

1100000 . . . 1200000

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0											0
1					1						1
2			1				1	1		2	5
3	4	3	3	3	3	3	3	2		1	25
4	5	6	7	5	9	4	4	5	6	6	57
5	8	13	10	12	11	11	9	12	12	9	107
6	14	20	17	20	17	17	18	16	17	14	170
7	21	19	22	19	21	21	20	18	29	27	217
8	22	13	10	12	18	20	17	19	9	20	160
9	13	14	16	17	7	11	16	14	12	11	131
10	9	6	10	10	8	9	6	8	3	8	77
11	1	4	2	2	2	1	4	5	9	2	32
12	1	1	1		2	3	1		2		11
13	1	1	1				1		1		5
14	1				1						2
	736	710	716	713	697	725	729	723	735	710	7194

$$\int \frac{dx}{\log x} = 7165{,}911$$

1200000 . . . 1300000

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0											
1								1	1		2
2	2		2	1						1	6
3	3	2	4	5	4	3	1	4	3	3	32
4	7	7	7	3	5	7	12	2	3	10	63
5	15	12	12	15	10	14	9	15	6	12	120
6	16	14	13	19	17	16	16	15	20	14	160
7	24	15	25	24	21	20	15	22	24	24	214
8	17	19	16	11	17	15	22	18	19	14	168
9	8	12	7	10	12	13	14	13	13	9	111
10	3	11	10	8	10	4	5	3	9	10	73
11	3	6	3	2	3	5	3	6	1	3	35
12	1	1	1			1	3	1	1		9
13	1	1		1		2					5
14				1							1
16					1						1
	676	744	693	693	724	713	718	709	722	689	7081

$$\int \frac{dx}{\log x} = 7123{,}35$$

1300000 . . . 1400000

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1						1					1
2		1	1		1	1	1	2	1	1	9
3	3	1	1	3	2	2	2		5		19
4	3	10	7	11	6	8	7	6	6	5	69
5	17	13	11	11	15	12	8	8	14	10	119
6	15	14	17	14	20	18	23	17	16	19	173
7	22	18	26	18	21	16	16	28	19	23	207
8	14	22	14	16	14	13	21	17	15	15	161
9	17	11	12	14	12	9	12	7	13	13	120
10	5	6	2	11	5	15	5	8	6	7	70
11	4	2	7	1	1	3	3	6	3	3	33
12		1	2	1	2	2	2	1	1	3	15
13		1			1				1		3
14										1	1
	709	702	713	705	692	713	709	723	695	737	7098

$$\int \frac{dx}{\log x} = 7084{,}48$$