Frobenius による「群の指標と表現」の研究（その4）

平井　武 (Kyoto)
hirai.takeshi@math.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

2004 年の数学史シンポジュウムのときから，Frobenius の「群の指標および表現」に関する論文をすべてリストアップし，順を追って読んでみてどこまで読み込めるかを調べ，その数学的内容等との関連において感想等を報告する，という作業を始めた．１つ１つの論文はいずれも内容が重く，軽くまとめることは不可能で，どうしても詳しく内容に踏み入らざるを得ない．2004 年には，群の線形表現導入以前の指標の理論 **53**(1896), **54**(1896) および最初に線形表現を導入した論文 **56**(1897) を報文[平井 4] にまとめた（太文字の論文番号は全集に従う）．2005 年はその続きとして，**57**(1898), **58**(1899), **60**(1900) の報告を [平井 5] に載せた．2006 年には，**61**(1901), **68**(1903) の報告を [平井 6] にまとめた．

今回は，**69**(1903), **72**(1903), **74**(1904), **78**(1907) の報告をする．残すところは，Schur との共著 **75**(1906), **73**(1907) である．なお，Frobenius の有限群の指標および線形表現に関する論文全てと，今回の報告に関連する Burnside の論文は，報文末尾にリストアップしてある．

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

69. *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante, II*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 401–409(1903).

この論文 69 を見るためにはその前編である 54，および それに先立つ指標理論の淵源 53，を復習するのが望ましくまた必要でもある．

復習： 53. *Über Gruppencharaktere*, **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 985–1021(1896).**

§1 (pp.2-5)[全集ページ数]：群 $\mathfrak{H}$ の共役類の位数等に関する等式の導出．
$h=|\mathfrak{H}|$, $h_\alpha := |\alpha|$ (共役類 α の位数), $h_{\alpha\beta\gamma} := |\{(A,B,C); ABC=E, A\in\alpha, B\in\beta, C\in\gamma\}|$, $h_{\alpha\beta\gamma\delta}$ についての関係式など.

§2 (pp.5-9): 指標の定義と存在証明． 共役類 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ に対して，
$h_{\alpha\beta\gamma\delta} := |\{(A,B,C,D); ABCD=E, A\in\alpha, B\in\beta, C\in\gamma, D\in\delta\}|$ とおくと，

$$(1)\qquad h_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum\nolimits_\lambda \frac{1}{h_\lambda} h_{\alpha\beta\lambda}\, h_{\lambda^{-1}\gamma\delta}.$$

群 $\mathfrak{H}$ の共役類の個数を k とする． $\mathfrak{H}$ の指標は次の方程式によって定義される：

$$(6)\qquad h_\beta h_\gamma \chi_\beta \chi_\gamma = f \sum\nolimits_\alpha h_{\alpha^{-1}\beta\gamma}\,\chi_\alpha \quad (\alpha,\beta,\gamma \text{ は共役類}) \quad [\textbf{指標の定義方程式}]$$

ここに，k 個の χ_α たちが未知数，f も未知の比例因数（Proportionalitätsfactor）．

命題 53.2.1（当方が勝手に命題にまとめて命名, 53=論文番号, 2=節番号）:
方程式系 (6) には丁度 k 組の相異なる解

$$(7) \qquad \chi_\alpha = \chi_\alpha^{(\kappa)},\ \ f = f^{(\kappa)} \qquad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

が存在する．そして，$k \times k$ 型の行列式 $|\chi_\alpha^{(\kappa)}| \neq 0$.
（すこし後に $f^{(\kappa)} = \chi_0^{(\kappa)}$, ただし 0 は単位元 E の共役類，が分かる.）

指標の定義：群 $\mathfrak{H}$ の**指標**とは，次で与えられる，群の共役類上の特別の関数である（k 個の指標 $\chi^{(\kappa)}$）:

$$\alpha \to \chi_\alpha^{(\kappa)} \quad (\alpha \text{ は共役類を動く}) \qquad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots, k-1),$$

注 53.1： 群の線形表現の理論から来た知識を使わないで，指標を直接的に定義するのは結構難しい（§5 および論文 **56** の §1 参照）．また，Frobenius のいう指標は，現代の用語では**既約指標**である．

◆ 群環 $\boldsymbol{C}[\mathfrak{H}]$ の中で,（内部自己同型で）不変なもの全体からなる部分環 $\mathfrak{A}$ をとる．すると，次の命題を得る．Frobenius はある段階ではこのように理解していたのだろうか？

命題 53.*1. （多元）環 $\mathfrak{A} \subset \boldsymbol{C}[\mathfrak{H}]$ は，可換で，生成元系として $X_\alpha := \sum_{P\in\alpha} \delta_P$ がとれる．その積は（関数の convolution と同じだが），

$$X_\beta X_\gamma = \sum\nolimits_\alpha \frac{h_{\alpha^{-1}\beta\gamma}}{h_\alpha} X_\alpha = \sum\nolimits_\alpha a_{\alpha\beta\gamma} X_\alpha,$$

である．従って，$(a_{\alpha\beta\gamma})$ は環 $\mathfrak{A}$ の構造定数である．そして，指標の定義方程式 (6) は，可換環 $\mathfrak{A}$ の 1 **次元表現**を与える．

しかし Frobenius はどうして，これが本質的だ，と見通すことが出来たのだろうか（§5 および論文 **56** の §1 参照）．

§3 (pp.9-12): 方程式系 (6) を書き換えた別の方程式系の κ 個の解の系の正則性を論じることにより，次の等式を得る．

$$\sum_\alpha h_\alpha \chi_\alpha^{(\kappa)} \chi_{\alpha^{-1}}^{(\lambda)} = 0 \ \ (\kappa \neq \lambda) \quad (\ell^2(\mathfrak{H}) \text{ 上での直交関係に対応}),$$

$$\sum_\alpha h_\alpha \chi_\alpha^{(\kappa)} \chi_{\alpha^{-1}}^{(\kappa)} = \frac{h f^{(\kappa)}}{e^{(\kappa)}} \qquad (e^{(\kappa)} \text{ は定数}),$$

$$\sum_\kappa \frac{e^{(\kappa)}}{f^{(\kappa)}} \chi_\alpha^{(\kappa)} \chi_\beta^{(\kappa)} = \frac{h h_{\alpha\beta}}{h_\alpha h_\beta} \quad (\text{別の直交関係に対応}),$$

ただし，
$$h_{\alpha\beta} := |\{(A, B); AB = E\}|$$
$$\therefore \quad h_{\alpha\beta} = 0 \ \ (\beta \neq \alpha^{-1}), \qquad h_{\alpha\beta} = h_\alpha \ \ (\beta = \alpha^{-1}).$$

§4 (pp.12-14): 方程式系 (6) についての研究（続き）．

§5 (pp.14-19): 群行列，群行列式の導入． 群の共役類上の関数と思っていた指標を，群上の関数と捉え直すと，$\chi(B^{-1}AB) = \chi(A)$ $(A, B \in \mathfrak{H})$ を満たす関数である．この二

様の考え方を微妙に使い分ける．まず，h 個の変数 $x_R, R \in \mathfrak{H}$, を考えて，$h \times h$ 型の行列 $(x_{PQ^{-1}})_{P,Q\in\mathfrak{H}}$ をとる．別の h 個の変数 $y_R, R \in \mathfrak{H}$, との間に次の演算を与えて，第3組の変数 $z_R, R \in \mathfrak{H}$, を作る：

$$z_{PQ^{-1}} = \textstyle\sum_{R\in\mathfrak{H}} x_{PR^{-1}} y_{RQ^{-1}} \quad \big(\text{または},\ z_P = \sum_{QR=P} x_Q y_R\big)$$

すると，行列の積で $(z_{PQ^{-1}}) = (x_{PQ^{-1}})(y_{PQ^{-1}})$ となる．いま，変数 x_R の間に，関係 $x_R = x_P$ ($R \sim P$ (共役) のとき) を入れて，各共役類 α に対して $x_\alpha = x_R$ ($R \in \alpha$) とおけば，変数の個数は k 個に減少する．このとき積は,

$$(x_{PQ^{-1}})(y_{PQ^{-1}}) = (y_{PQ^{-1}})(x_{PQ^{-1}}) \qquad (\text{可換})$$

となり，また，z_γ を x_α, y_β で表すと,

$$h_\gamma z_\gamma = \textstyle\sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta\gamma^{-1}} x_\alpha y_\beta \tag{53.1}$$

共役類を番号 $0, 1, 2, \ldots, k-1$ で表して，行列 $(x_{PQ^{-1}})$ の行列式を

$$\Theta(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) := |x_{PQ^{-1}}| \qquad (0 \text{ は } E \text{ の共役類})$$

とおく．上の可換性から Θ が 1 **次式の積**に分解されることが分かる．その 1 次因数の一つを

$$\xi = \frac{1}{f} \textstyle\sum_\alpha h_\alpha \chi_\alpha x_\alpha \ \Big(= \frac{1}{f} \sum_{R\in\mathfrak{H}} \chi(R) x_R\Big)$$

とおく．ここに，$h_\alpha = |\alpha|$, $\chi_0 = f$ で，χ_α は未知である．そして $\chi(R) := \chi_\alpha$ ($R \in \alpha$) とおいている．

行列式の $|z_{PQ^{-1}}| = |x_{PQ^{-1}}|\,|y_{PQ^{-1}}|$ なる性質を使うと，次を得る：

$$f \cdot \big(\textstyle\sum_\gamma h_\gamma \chi_\gamma z_\gamma\big) = \big(\sum_\alpha h_\alpha \chi_\alpha x_\alpha\big)\big(\sum_\beta h_\beta \chi_\beta y_\beta\big).$$

ここに上の等式 (53.1) を代入して，§2 の指標の方程式 (6) と同値な，次式を得る：

$$h_\alpha h_\beta \chi_\alpha \chi_\beta = f \cdot \textstyle\sum_\gamma h_{\alpha\beta\gamma^{-1}} \chi_\gamma \qquad (\text{注}：h_{\alpha\beta\gamma^{-1}} = h_{\gamma^{-1}\alpha\beta}).$$

もとの $\Theta(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ は次のように 1 **次式の積**に分解される：

$$\Theta = |x_{PQ^{-1}}| = \textstyle\prod_\kappa \big(\xi^{(\kappa)}\big)^{g^{(\kappa)}}, \quad \xi^{(\kappa)} = \frac{1}{f^{(\kappa)}} \sum_\alpha h_\alpha \chi_\alpha^{(\kappa)} x_\alpha. \tag{22}$$

これには 2 つの証明が与えてある．

§6 (pp.19-22): 群行列式と指標．$h := |\mathfrak{H}|$ として，h^2 個の独立変数 $x_{P,Q}$ ($P, Q \in \mathfrak{H}$) の $h \times h$ 型行列式 $\Theta = |x_{P,Q}|$ の $x_{A,B}$ に対する余因子を $\Theta_{A,B}$ とおく．あらためて h 個の変数 x_P ($P \in \mathfrak{H}$) をとり，$x_{P,Q} = x_{PQ^{-1}}$ とおく．このとき,

$$\Theta_{A,B} = \frac{1}{h} \frac{\partial\Theta}{\partial x_{AB^{-1}}}. \tag{3}$$

この場合には，行列 $(x_{PQ^{-1}}), (y_{PQ^{-1}})$ は非可換である．

このあと，さらに関係 $x_R = x_S$ ($R \sim S$) を入れて，k 個の変数 $x_\alpha = x_R$ ($R \in \alpha$) の関数と捉えて議論している．この場合には上の行列は可換である．

次の論文 54 では，Θ を h 個の変数 x_R の関数と捉え，**群行列式** Gruppendeterminante と呼び，その素因数分解との関係を深く論じている．

§7 (pp.22-27): $\mathfrak{H}$ が群 $\mathfrak{H}'$ の正規部分群であるとき，$\mathfrak{H}$ の指標と $\mathfrak{H}'$ の指標との相互関係が調べられる．

§§8–10 (pp.27-37): 具体的な群の指標表（詳細略）

復習: 54. *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante,* **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1343–1382(1896).**

序文 (pp.38-40): 有限群 $\mathfrak{H}$, 位数 $h = |\mathfrak{H}|$, に対して，h 個の独立変数 $x_P, P \in \mathfrak{H}$ を並べた $h \times h$ 型行列式 $\Theta := |x_{PQ^{-1}}|$, ただし $P, Q \in \mathfrak{H}$, を $\mathfrak{H}$ の**群行列式**（*Gruppendeterminante*）という．これは 1 次同次式 $\xi = \sum_{R\in\mathfrak{H}} x_R$ で割り切れる．

① Θ の既約因子（Primfactor）の個数は $\mathfrak{H}$ の共役類の個数 k に等しい．

② $\Theta = \prod_{1\le\lambda\le k} {\Phi^{(\lambda)}}^{e^{(\lambda)}}$ と既約因子に分解すると，$e^{(\lambda)} = f^{(\lambda)} := \deg \Phi^{(\lambda)}$.

③ $f^{(\lambda)} = \deg \Phi^{(\lambda)}$ は群の位数 h を割る．

④ ある線形変換によって，$\Phi^{(\lambda)}$ は丁度 ${f^{(\lambda)}}^2$ 個の独立変数の関数になる．

⑤ それらの変数を合わせると丁度 $\sum_\lambda {f^{(\lambda)}}^2 = h$ 個の独立変数になる．

⑥ 同じ共役類 α の中で $x_A = x_B =: x_\alpha$ $(A, B \in \alpha)$ とおくと，丁度 k 個の独立変数が出来るが，それらの 1 次式 $\xi^{(\lambda)}$ が存在して，$\Phi^{(\lambda)} = {\xi^{(\lambda)}}^{f^{(\lambda)}}$ となる．

⑦ $\xi^{(\lambda)}, 1 \le \lambda \le k$, は互いに 1 次独立である．

⑧ $\xi^{(\lambda)} = \sum_{R\in\mathfrak{H}} \chi^{(\lambda)}(R) x_R$, ただし $A \sim B$ $(A, B \in \alpha)$ ならば $x_A = x_B$, $\chi^{(\lambda)}(A) = \chi^{(\lambda)}(B)$, とおくと，$\chi^{(\lambda)}$ は指標（Charakter）を与える．

⑨ k 個の値 $\chi^{(\lambda)}(R)$ $(R \in \alpha$, α が動く$)$ により，$\Phi^{(\lambda)}$ は完全に決まる．

⑩ h 個の変数 x_A の入った群行列 Θ の理論は，制限条件 $x_{AB} = x_{BA}, A, B \in \mathfrak{H}$, を入れて k 個の変数に減らしたときの話に帰着される．この制限の下では，$\Theta = \prod_\lambda {\xi^{(\lambda)}}^{{f^{(\lambda)}}^2}$.

⑪ h 次の多項式 $\Theta = \prod_\lambda {\xi^{(\lambda)}}^{{f^{(\lambda)}}^2}$ の計算は，k 次の多項式

$$\left|\sum\nolimits_\gamma \frac{1}{h_\alpha} h_{\alpha\beta^{-1}\gamma} x_\gamma\right| = \prod\nolimits_\lambda \xi^{(\lambda)} \qquad \text{(行列式の一次式への分解)}$$

の計算に帰着される（$h_{\alpha\beta\gamma}$ の定義と計算に付いては，**53** 参照）．

§1 (pp.41-43): $h = |\mathfrak{H}|$ 次の群行列 $(x_{PQ^{-1}})$ の行列式 $|x_{PQ^{-1}}|$ をとる：

$$(1) \qquad (x_{P,Q}) = (x_{PQ^{-1}}) = (x) \quad (P, Q \in \mathfrak{H}),$$

$$(2) \qquad |x_{P,Q}| = |x_{PQ^{-1}}| = \Theta(x_E, x_A, x_B, x_C, \ldots) = \Theta(x_R) = \Theta(x) = \Theta.$$

ε を $\varepsilon_E = 1, \varepsilon_R = 0$ $(R \ne E)$, とおくと，(ε) は単位行列（Einheitsmatrix, Hauptmatrix）である．さてそこで，$(z) = (x)(y)$ とすると，

$$z_{PQ^{-1}} = \sum\nolimits_R x_{PR^{-1}} y_{RQ^{-1}} \qquad \Big(z_A = \sum\nolimits_{RS=A} x_R y_S\Big).$$

$(x_{P,Q})^n = (x^{(n)})$ とおくと，$x_R^{(n)} = \sum x_{R_1} x_{R_2} \cdots x_{R_n}$ $(R_1 R_2 \cdots R_n = R)$.

$$(8) \qquad (z) = (x)(y) \implies \Theta(z) = \Theta(x)\Theta(y)$$

Θ の展開は x_E^h から始まる．Θ の既約因子（Primfactor）Φ の次元を $f = \deg \Phi$ とすると，Φ は必ず x_E^f を含んでいるので，その係数を 1 とする．

命題 54.1.1. 各既約因子 Φ について

$$(9) \qquad (z) = (x)(y) \text{ のとき，} \quad \Phi(z) = \Phi(x)\Phi(y) \qquad [\Phi \text{ の方程式}]$$

逆に，分解不能な ganze homogene Function Φ が (9) を満たせば，それは Θ の因子である．

注 54.1. 上の命題は，証明も込めて実に興味深い．これを表現論から見ると，「全ての既約表現は群の正則表現の成分として現れる」ことを意味し，非常に重要である．この事実がかくも簡単に証明できることに衝撃を受ける．

§2 (pp.43-44): Θ の線形項.

命題 54.2.1. Φ が Θ の線形項であるときは，$\Phi(x) = \sum_A \chi(A) x_A$ とすると，χ は，可換群 $\mathfrak{H}/[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$ の 1 次元表現である．また逆も成り立つ．

§3 (pp.44-50): Θ の非線形項. Θ の既約因子 Φ に対し，$f = \deg \Phi > 1$ とする．$\varepsilon_R = \delta_{R,E}$ とおくと $(\varepsilon) = (\varepsilon_{PQ^{-1}}) = E_h$ (h 次単位行列)．$\Phi(x) = \Phi(\varepsilon)\Phi(x), \Phi(\varepsilon) = 1$, より，

$$\Phi(x) = x_E^f + \left(\textstyle\sum_{R \neq E} \chi(R) x_R\right) x_E^{f-1} + \cdots$$

の形である．$\chi(E) := f$ とおいて**指標**（*Charakter* f^{ten} *Grades*）χ を得る．

$$\chi(R) = \text{“}\frac{\partial \Phi}{\partial x_R} \text{ の } x_E^{f-1} \text{ の係数”} \quad (R = E \text{ の場合も込めて});$$

すなわち，

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_R} = \chi(R)\, x_E^{f-1} + \cdots \quad (R \in \mathfrak{H}). \tag{54.1}$$

§4 (pp.50-52): Primfactor Φ の微分方程式. （省略）

§5 (pp.52-54): 指標の直交関係. ここでは指標の**直交関係**を出している．線形表現を全く使っていない代数的な証明である点で興味深い．

命題 54.5.1. $\chi, \psi \neq \chi$ を $\mathfrak{H}$ の指標とする．Φ を χ に対応する群行列式 Θ の既約因子（(III) 式参照）とし，$f = \deg \Phi$, e を Φ が Θ に含まれる重複度とすると，

$$(6) \qquad \sum \chi(R)\,\chi(S) = \frac{h}{e}\chi(A), \qquad \sum \chi(R)\,\psi(S) = 0 \qquad (RS = A),$$

$$(7) \qquad \textstyle\sum_R \chi(PR^{-1})\,\chi(RQ^{-1}) = \dfrac{h}{e}\chi(PQ^{-1}), \qquad \sum_R \chi(PR^{-1})\,\psi(RQ^{-1}) = 0,$$

$$(8) \qquad \textstyle\sum_R \chi(R)\,\chi(R^{-1}) = \dfrac{hf}{e}, \qquad \sum_R \chi(R)\,\psi(R^{-1}) = 0.$$

§6 (pp.54-56): 主張 ⑥ の証明および線形項 $\xi^{(\lambda)}$ の具体形.

行列 $(x_{PQ^{-1}})$ と $(y_{Q^{-1}P})$ とは可換である．これをネタにかなり長い議論により次を得る：x_R を上の通り h 個の独立変数とし，y_R を $y_{AB} = y_{BA}$ を満たす（k 個が独立）

とすると $(x_{PQ^{-1}})$ と $(y_{PQ^{-1}})$ とは可換で，(y_R) にしか依らない量 η があって，

$$(6) \qquad \Phi(x_E+y_E, x_A+y_A, x_B+y_B, \ldots) = \Phi(x_E+\eta, x_A, x_B, \ldots).$$

これから次が分かる．$\Phi^{(\lambda)}$ が指標 $\chi^{(\lambda)}$ に対応するとすると，$x_{AB}=x_{BA}$ を満たす x_R について，$\Phi^{(\lambda)}=(\xi^{(\lambda)})^{f^{(\lambda)}}$，ここに，$\xi^{(\lambda)}=\dfrac{1}{f}\sum\chi^{(\lambda)}(R)x_R=\dfrac{1}{f}\sum_\rho h_\rho\chi_\rho^{(\lambda)}x_\rho$ ($x_\rho=x_R$ for $R\in\rho$ 共役類). これは，**53**, §5, (22) 式の全く違う証明を与える．そして，そこでの $\xi^{(\lambda)}$ に対する冪 $g^{(\lambda)}$ には，ここでは，$g^{(\lambda)}=e^{(\lambda)}f^{(\lambda)}$ として別の意味が付与された．

§7 (pp.57-60): 主張 '① Primfaktor の個数 $=k$' の証明.

上の (6) 式を y_ρ で微分し，y_κ を全て 0 とおけば，$\sum_{R\in\rho}\dfrac{\partial\Phi(x)}{\partial x_R}=\dfrac{h_\rho\chi_\rho}{f}\dfrac{\partial\Phi(x)}{\partial x_E}$. ここで，$x_R$ を x_{AR} で置き換えれば，

$$(1) \qquad \sum_{R\in\rho}\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_{AR}}=\frac{h_\rho\chi_\rho}{f}\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_A}.$$

両辺の x_E^f の係数を比較する．B の共役類を $[B]$ と書けば，

$$(2) \qquad \sum_{S\in[B]}\chi(AS)=\frac{h_{[B]}}{f}\chi(A)\chi(B),$$

$$(3) \qquad \therefore \quad h\,\chi(A)\chi(B)=\sum_R f\,\chi(AR^{-1}BR).$$

さらに議論を続けて，主張①が示される．

§8 (pp.60-63): 群行列式 Θ の 1 つの Primfaktor を Φ $(\leftrightarrow\chi)$ とし，その重複度を e, $\deg\Phi=f$ とする．h 個の変数 x_R に代えて新しい変数 $\xi_S:=\dfrac{e}{h}\sum_R\chi(RS^{-1})x_R$ を導入する．Φ は対応する χ，従って ξ_S $(S\in\mathfrak{H})$ で決まっている．新変数のうち丁度 ef 個が一次独立であり，行列 $(\xi):=(\xi_{PQ^{-1}})$ の階数は ef である．ここでの代数的議論は結構込み入っていて難しい．

§9 (pp.63-67): 主張② 'Primfaktor Φ に対し $e=f$' の証明.

その計算は見通しが悪くて難しい．

§10 (pp.67-71): $e|f$ の証明も込めて.

行列 $(x_{PQ^{-1}})$ と $(y_{Q^{-1}P})$ とは可換であるから，行列式

$$(1) \qquad |u\,x_{PQ^{-1}}+v\,y_{Q^{-1}P}+w\,\varepsilon_{PQ^{-1}}| \qquad (u,v,w \text{ はスカラー})$$

は，1 次項 $ua_\alpha+vb_\alpha+w$ の積に分解する．ここに，a_α, b_α はそれぞれ $(x_{PQ^{-1}}), (y_{Q^{-1}P})$ の固有値である．ここでは，どのように 2 つの行列の固有値を順序付ければいいかを，2 つの新しい変数の組 ξ_S と $\eta_S:=\dfrac{e}{h}\sum_R y_R\chi(RS^{-1})$ とを道具に使って議論している．

可換な 2 つの行列の差 $(x_{PQ^{-1}}-x_{Q^{-1}P})$ の Rang$=r$ につき，

$$r=h-s, \quad s=\sum f.$$

ここで，$h-r\geq s$ を示すために，(y_R) に対する一次方程式

$$\sum_{R\in\mathfrak{H}}(x_{AR^{-1}}-x_{R^{-1}A})y_R=0 \quad (A\in\mathfrak{H}),$$

の一次独立な解として，$y_R = x_R^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, s-1)$ が取れることが示される．

§11 (pp.71-74): Φ を対応する指標 χ から具体的に作る．

この節では Θ の成分 Φ^e が変数 ξ_S を使って，それらの，ある小行列式の和として表示できることを示している．

§12 (pp.74-77): 指標値 $\chi(A)$ の決定する体，主張③ $f|h$.

群行列式 Θ の Primfaktoren Φ を調べることは，指標の値 $\chi(A)$ の決定に帰着される．後者のためには指標決定方程式を解くことになる．ここでは，定数 $\chi_\alpha^{(\kappa)}$ $(\kappa = 0, 1, \ldots, k-1; \alpha =$ 共役類) の代数的・算術的性質を調べる．これらの数が属する代数体を決定している．

%%% %%%%%% %%%%%% %%%%%% %%%%%% %%%

69. *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante, II*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 401–409(1903).

§1 (pp.275-276)(全集ページ数): $\mathfrak{H}$ を群，$h = |\mathfrak{H}|$ その位数とする．$h \times h$ の群行列 Θ の k 個（$k =$ 共役類の個数）の Primfaktoren への分解を

$$\Theta = |x_{PQ^{-1}}| = \prod \Phi^e, \tag{69.1}$$

とし，$\deg \Phi = f$ とおく．

論文 [54] *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1343–1382(1896).

の主定理の 1 つとして，$e = f$ を示した（§9）．

注意 69.1. $\mathfrak{H} \ni g \to L(g)$ (resp. $R(g)$) を左正則表現（右正則表現）とすると，

$$(x_{PQ^{-1}}) = \Big(\sum\nolimits_{g\in\mathfrak{H}} L(g)x_g\Big), \quad (x_{P^{-1}Q}) = \Big(\sum\nolimits_{g\in\mathfrak{H}} R(g)x_g\Big),$$
$$(y_{Q^{-1}P}) = \Big(\sum\nolimits_{g\in\mathfrak{H}} R(g^{-1})y_g\Big).$$

[**54**] §9 での証明は，可成りの計算と，仰々しい観察を要したので，[**54**] §10 において，より簡単な方法で，$f|e$ を示した．この論文では，次の命題の別証明を与える．そのためには，$r := \sum e \leq s := \sum f$ を示せばよい．

命題 69.0. つねに $e = f$.

[**54**] §10 では次の h 次の行列を用いた：

$$|x_{PQ^{-1}} + y_{Q^{-1}P}| = \prod \Psi^{\frac{e}{f}}. \tag{69.2}$$

ここで，$\Psi(x, y)$ は $\Phi(x)$ に対応する Primfaktor であり，次数が f^2 で

$$\Psi(x, y) := \prod\nolimits_{\alpha,\beta}(u_\alpha + v_\beta), \tag{69.3}$$

$u_1, u_2, \ldots u_f$ は $\Psi(x)$ の特性根，すなわち，$\Phi(u\varepsilon - x) = 0$ の根，$v_1, v_2, \ldots, v_f$ は $\Phi(y)$ の特性根.

[B2] W. Burnside, Proc. of London Math. Soc., **29**, p.553
では，$e \geq f$ だけが示されている.

● In [B1](1898), **1.** p.208, Burnside defines as follows.

[Let $S_1, S_2, \ldots, S_n$ denote the operations of a group of finite order n, S_1 being the identical operation. The multiplication table of the group may be written in the form

$$\left.\begin{array}{ccccccc} S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_k & \cdots & S_n \\ S_2^{-1}S_1 & S_1 & S_2^{-1}S_3 & \cdots & S_2^{-1}S_k & \cdots & S_2^{-1}S_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_\ell^{-1}S_1 & S_\ell^{-1}S_2 & S_\ell^{-1}S_3 & \cdots & S_\ell^{-1}S_k & \cdots & S_\ell^{-1}S_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_n^{-1}S_1 & S_n^{-1}S_2 & S_n^{-1}S_3 & \cdots & S_n^{-1}S_k & \cdots & S_1 \end{array}\right\}$$

• So, he studied the matrix $(x_{Q^{-1}P})$, the antistrophen Matrix der Gruppen Matrix $(x_{PQ^{-1}})$, which corresponds to the right regular representation $\mathcal{R}$ of $\mathfrak{H}$ as

$$(x_{Q^{-1}P}) = \sum_{g\in\mathfrak{H}} \mathcal{R}(g^{-1})x_g.$$ ◆

● In [B2](1898), p.547, Burnside made a reference for Frobenius' work **54**(1896) as follows:

[Incidentally it is also shown that

the determinant formed from the multiplication table of g *(a finite group)*, when in it the symbols of the operations are regarded as independent variables, has r *(= the number of conjugate sets of operations in g)* distinct irreducible factors; and that

the power to which any one of these factors enters into the determinant is equal to the degree of the factor *(i.e., e = f)*.

These are two main results proved by Herr Frobenius in his memoir "Über die Primfactoren der Gruppendeterminante"([**54**]).] ◆

● In [**69**](1903), p.275, Frobenius commented Burnside's work as follows:

[Mit Hülfe der antistrophen Gruppe zeigt auch Herr Burnside, [B2], p.553, das $e \geq f$ ist (aber nichit, das $e = f$ ist, wie dort angegeben ist).]
(Burnside は $e = f$ を主張しているが，実際に示されているのは，$e \geq f$ である．) ◆

(69.2) 式で，$x_R \to x_R + w\varepsilon_R, y_R \to -x_R$, とすると，

$$|x_{PQ^{-1}} - x_{Q^{-1}P} + w\varepsilon_{PQ^{-1}}| = w^r\, \widetilde{\Psi}^{\frac{e}{f}}, \tag{69.4}$$

$$\widetilde{\Psi} = \prod\nolimits_{\alpha<\beta}(w^2 - (u_\beta - u_\alpha)^2), \quad r := \sum e. \tag{69.5}$$

連立線形方程式 $$\sum\nolimits_R (x_{AR^{-1}} - x_{R^{-1}A})y_R = 0 \quad (A \in \mathfrak{H}) \tag{69.6}$$

は，解として，次を持つ：

$$y_R := x_R^{(n)}\ (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad x_R^{(n)} = \sum_{R_1R_2\cdots R_n = R} x_{R_1}x_{R_2}\cdots x_{R_n}. \tag{69.7}$$

また，　　$g(u) := \prod_{k\ \text{different}} \Phi(u\varepsilon - x)$　　(69.8)

で，$g(X) = 0$ は，$X = (x_{PQ^{-1}})$ の reduzirte Gleichung である．その次数は，

$$s := \sum f\,. \tag{69.9}$$

主張. 命題 69.0 $\Longleftrightarrow$ 命題 69.1 + 命題 69.2 .

命題 69.1. $\mathrm{Rang}\,(x_{RQ^{-1}} - x_{Q^{-1}P}) = h - r\,.$

命題 69.2. 方程式 (69.6) に対して，$y_R = x_R^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, s-1)$ が線形独立な解の完全系.

§2 (pp.276-277): 命題 69.1 の証明.

§3 (pp.277-278): 命題 69.2 の証明のための補助定理.

補助定理 69.I. A, B を可換な n 次行列，それぞれの特性根を $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n$ とする．任意の整関数（ganze Funktion）$f(u, v)$ に対して，行列 $f(A, B)$ の特性根が $f(a_i, b_i), 1 \le i \le n$, となるように a_i, b_i を対応付けることが出来る.

補助定理 69.II. A, B は可換な n 次行列で，いずれの単因子も 1 次であるとする．このとき，$f(A, B)$ も同じ性質を持つ.

補助定理 69.III. さらに，$a_\kappa = a_\lambda \Rightarrow b_\kappa = b_\lambda$, ならば，$B$ は A の ganze Funktion である.

69.III の証明には，具体的に ganze Funktion φ を作って，$\varphi(A) = B$ とする.

§4 (pp.279-280): 補助定理 69.I, 69.II, 69.III の別証明.

§5 (pp.280-281): 補助定理 69.I, 69.II, 69.III を用いて命題 69.2 の証明.

§6 (pp.281-283): $e = f$ **は Molien の結果（線形代数）からも従う.**

%%%　%%%%%%　%%%%%%　%%%%%%　%%%%%%　%%%

72. *Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 987–991(1903).

§1 pp.330-331.
群 $\mathfrak{H}$ の位数を h とする．群の元 $X \in \mathfrak{H}$ の位数を n とすると，$n|h$. その逆として，
論文 *Verallgemeinerung des Sylowschen Satzes*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1895
に次の定理を与えた：

Satz 72.I. $n|h$ とする．$|\{X \in \mathfrak{H}; X^n = E\}| = kn,\ k \ge 1.$
（$n = p$ 素数，のときが Sylow の定理に関連する）

その証明は見通しが良くないものであったが，その自然な拡張として次を得た：

Satz 72.II. $A \in \mathfrak{H}$ の中心化群 $\mathfrak{G} := Z_{\mathfrak{H}}(A)$ の位数を g とする．

$$|\{X \in \mathfrak{H}; X^n = A\}| = k \cdot \mathrm{GCD}\{n, g\},\ \ k \geq 0\ ;\quad \frac{h}{g} = |\{A \text{ の共役元 }\}|,\ n|h.$$

Satz 72.III. $A \in \mathfrak{H}$ を中心元とする．$n|h$ とする．

$$|\{X \in \mathfrak{H}; X^n = A\}| = kn,\ k \geq 0.$$

Satz III $\Rightarrow$ Satz II の証明． $k > 0$ とする．$X^n = A\ \Rightarrow\ X \in \mathfrak{G} := Z_{\mathfrak{H}}(A)$．そして，$A$ は $\mathfrak{G}$ の中心元で，$g := |\mathfrak{G}|$．

$\therefore\ X^g = E,\ d := \mathrm{GCD}\{n, g\}\quad \therefore\ A^{\frac{g}{d}} = (X^g)^{\frac{n}{d}} = E.$

$\exists r, s\ :\ nr - gs = d\quad \therefore\ X^n = A, X^g = E\ \Rightarrow\ X^d = A^r.$

逆に，$A^{\frac{g}{d}} = E, X^d = A^r\ \Rightarrow\ X^n = A\quad (\because\ X^n = (A^r)^{\frac{n}{d}} = A(A^{\frac{g}{d}})^s = A).$

故に，$X^g = E$ の下では，$X^d = A^r\ \Leftrightarrow\ X^n = A.$

$\mathfrak{H} \to \mathfrak{G}, A \to A^r, n \to d$ とすると，$|\{X \in \mathfrak{G}; X^d = A^r\}| = kd.$

$\{X \in \mathfrak{G}; X^d = A^r\} = \{X \in \mathfrak{H}; X^n = A\}.$ □

§2, pp.331-332.

Satz 72.IV. $\mathfrak{A} = \{A, B, C, \ldots\} \subset \mathfrak{H}$ an invariant subset (einen invarianten Komplex, i.e., $R^{-1}\mathfrak{A}R = \mathfrak{A}\ (R \in \mathfrak{H})$).

$$|\{X \in \mathfrak{H}; X^n \in \mathfrak{A}\}| = k \cdot \mathrm{GCD}\{n, h\},\ \ k \geq 0.$$

Satz 72.V. $n|h, \mathfrak{A} = \{A, B, C, \ldots\} \subset \mathfrak{H}$ an invariant subset.

$$|\{X \in \mathfrak{H}; X^n \in \mathfrak{A}\}| = kn,\ \ k \geq 0.$$

Satz IV の証明． $\mathfrak{A} = \{R^{-1}AR; R \in \mathfrak{H}\}$ の場合に帰着される．そこで，

$g = |Z_{\mathfrak{H}}(A)|\ \Rightarrow\ \dfrac{h}{g} = |\{R^{-1}AR; R \in \mathfrak{H}\}|,$

$B = R^{-1}XR, Y = R^{-1}XR$ とおくと，$Y^n = B\ \Rightarrow\ X^n = A.$

$B \in \mathfrak{A}$ に対する $\dfrac{h}{g}$ 個の方程式は，それぞれ同じ個数 $= kd, d := \mathrm{GCD}\{n, g\}$ (by Satz II) を持つ．合わせると，$\ell = \dfrac{kdh}{g}$ 個．$\quad d = nr - gs\quad \therefore \ell = kr\dfrac{h}{g}n - ksh$，これは，$\mathrm{GCD}\{n, h\}$ で割り切れる． □

また，§1 の如く，Satz V $\Rightarrow$ Satz IV.

§3, pp.332-333.

証明のために，2つの補助定理を与える．

Satz 72.VI. A の位数 k が n の各 Primzahl で割れるとする（$p|n\ \Rightarrow\ p|k$）．

$$|\{X \in \mathfrak{H}; X^n = A\}| = kn,\ \ k \geq 0.$$

証明． $X^n = A$ が少なくとも1つの解を持つとする．kn の任意の素因数 p をとると，$p|k$ で，$X^{\frac{nk}{p}} = A^{\frac{k}{p}} \neq E$．ゆえに，$nk$ は X の位数である．従って，$nk|h$, $nk|g$, $g := |Z_{\mathfrak{H}}(A)|$.

$X^n = A$ の解 X を同値類に分ける：$X \sim Y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} X = Y^r, Y = X^s.$

$Y = X^\ell$ とするとき，$\ell \equiv 1\ (\mathrm{mod.}\ k)\ \Leftrightarrow\ Y^n = A\ \ (\because Y^n = X^{n\ell} = A^\ell = A).$

$\ell \equiv 1\ (\mathrm{mod.}\ k)$ で ℓ, nk 互いに素，とすると，$\ell m \equiv 1\ (\mathrm{mod.}\ nk)\ (\exists m)$

こうした ℓ の個数は，n．従って，$|\{X \in \mathfrak{H}; X^n = A\}|$ は n で割れる．

Satz 72.VII. 可換群 $\mathfrak{H}$ の位数 h が素数 p で割れれば，$\mathfrak{H}$ は位数 p の元を含む．

証明． 位数が $< h$ の群について主張が正しいとする．$A \neq E$ の位数を k，k の素因数を q とする．$B = A^{\frac{k}{q}}$ の位数は q．$q \neq p$ のときは，$\mathfrak{B} := \langle B \rangle, \mathfrak{H}/\mathfrak{B}$ の位数は $\dfrac{h}{q}$ で p で割れる．帰納法の仮定より，$(\exists C)\ \mathfrak{B}C$ 位数 p $\therefore\ C^p \in \mathfrak{B}$．

故に，C の位数は，p または pq．後者の場合は，C^q が位数 p． □

§4, pp.333-334.

Satz II から Satz V までは互いに同値．そこで，Satz V を示す．$n = p^\nu$ の場合が残る．それについては，ある種の帰納法．

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

論文 73 を見るために，論文 60 の復習

73. *Über die Charaktere der mehrfach transitiven Gruppen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 558–571(1904).

復習 60. *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe*, **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin, 516–534(1900).**

§1 (pp.148-150): $\mathfrak{H}$ を n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ とする．その位数は $h = n!$．その共役類の個数 k は n の分割 $n = \alpha + 2\beta + 3\gamma + \cdots$ の個数である．この分割で決まる共役類を (ρ) と書くと，その位数は，

$$h_\rho = \frac{n!}{1^\alpha \alpha!\, 2^\beta \beta!\, 3^\gamma \gamma!\, \cdots}. \tag{60.1}$$

ρ を数字に対応づけて $\rho = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ とし，$\rho = 0$ は単位元よりなる共役類とする．$\mathfrak{H}$ の Charakter（既約指標）は k 個あるので，$\kappa\ (0 \leq \kappa \leq k-1)$ で番号づけて $\chi^{(\kappa)}$ と書き，それの共役類 ρ での値を $\chi_\rho^{(\kappa)}$ と書く．

n の分割 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m\ (n_i > 0)$ に対応して，$\mathfrak{H}$ の部分群 $\mathfrak{G}$ を定義する：n 文字のはじめの n_1 個を不変にし，次の n_2 個を不変にし，・・・・．この $\mathfrak{G}$ の位数は，

$$g = n_1!\, n_2!\, \cdots\, n_m!. \qquad (\text{注}：\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \cdots \times \mathfrak{G}_m,\ \mathfrak{G}_i \cong \mathfrak{S}_{n_i}). \tag{60.2}$$

$R \in \mathfrak{G}$ を $R = R_1 R_2 \cdots R_m, R_i \in \mathfrak{G}_i$，と分解，$R_i\ (1 \leq i \leq m)$ の型が，n_i の分割

$$n_i = \alpha_i + 2\beta_i + 3\gamma_i + \cdots, \tag{60.3}$$

で決まるとすれば，R の共役類 (ρ) を与える n の分割は，次である：

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 + \cdots, \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots, \quad \ldots \tag{60.4}$$

このとき，$\mathfrak{G}$ と $\mathfrak{H}$ の共役類 (ρ) との共通部分の位数は，

$$g_\rho = \sum \frac{n_1!}{1^{\alpha_1}\alpha_1!\, 2^{\beta_1}\beta_1!\, 3^{\gamma_1}\gamma_1!\, \cdots} \cdot \frac{n_2!}{1^{\alpha_2}\alpha_2!\, 2^{\beta_2}\beta_2!\, 3^{\gamma_2}\gamma_2!\, \cdots} \cdots\cdots. \tag{60.5}$$

上の n の分割を，$\boldsymbol{n} := (n_i)_{1 \leq i \leq m}$ とおき，

$$X^{\boldsymbol{n}}(\rho) := \frac{h g_\rho}{g h_\rho} = \sum \frac{\alpha!}{\alpha_1!\, \alpha_2!\, \cdots} \cdot \frac{\beta!}{\beta_1!\, \beta_2!\, \cdots} \cdots\cdots. \tag{60.6}$$

とおけば，論文 57 により，類関数 X^{n} は，部分群 $\mathfrak{G}$ の自明表現 $\mathbf{1}_{\mathfrak{G}}$ を $\mathfrak{H}$ に誘導した表現 $\pi := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}} \mathbf{1}_{\mathfrak{G}}$ の指標である．これは既約指標 $\chi^{(\kappa)}$ の和に書ける：

$$X^{n}(\rho) := \sum\nolimits_{\kappa} r_{\kappa} \chi_{\rho}^{(\kappa)} \tag{60.7}$$

命題 60.1.1. $x_1, x_2, \ldots, x_m$ を独立変数とする．(60.6) 式の右辺の和は，次の積の展開における $x^{n} := x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$ の係数に等しい：

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^{\alpha} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2)^{\beta} (x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_m^3)^{\gamma} \cdots \\ = \sum\nolimits_{n} X^{n}(\rho)\, x^{n}.\end{aligned} \tag{60.8}$$

§2 (pp.150-152): 差積を $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \prod_{1 \le i < j \le m} (x_j - x_i)$，とおき，整数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ に対して，

$$[k_1, k_2, \ldots, k_m] := \mathrm{sgn}\big(\Delta(k_1, k_2, \ldots, k_m)\big), \tag{60.9}$$

とおく．すると，$[k_1, k_2, \ldots, k_m]$ は交代的である．$k_i = k_j$ $(i \neq j)$ のときには，$[k_1, k_2, \ldots, k_m] = 0$ とおく．下の多項式展開の係数より，類関数 $\rho \mapsto \chi_{\rho}^{(\lambda)}$ を λ ごとに定義する：

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^{\alpha} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2)^{\beta} (x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_m^3)^{\gamma} \cdots \times \\ \times \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ = \sum\nolimits_{(\lambda)} [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]\, \chi_{\rho}^{(\lambda)} x^{\lambda}, \qquad x^{\lambda} := x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots, x_m^{\lambda_m},\end{aligned} \tag{60.10}$$

$$\text{ここに，}\ (\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m),\ \ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = n + \frac{1}{2} m(m-1). \tag{60.11}$$

定理 60.1. 1つの λ に対して，$\rho \mapsto \chi_{\rho}^{(\lambda)}$ は $\mathfrak{H}$ $(= \mathfrak{S}_n)$ の指標を与える．$(\lambda) = (\lambda_i)_{1 \le i \le m}$ における順序を無視すると，相異なる λ には異なる指標が対応する．

$m = n$ の場合には，$\kappa_1 < \kappa_2 < \ldots < \kappa_n$，$\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_n = \frac{1}{2} n(n+1)$，となる $(\kappa) = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n)$ が対応し，その個数は k (= 共役類の個数) である．

§3 (pp.152-154): Cauchy の公式

$$\left| \frac{1}{1 - x_{\mu} y_{\nu}} \right| = \frac{\Delta(x_1, \ldots, x_m)\, \Delta(y_1, \ldots, y_m)}{\prod_{\mu,\nu} (1 - x_{\mu} y_{\nu})} \qquad (1 \le \mu, \nu \le m),$$

を用いて，$\chi_{\rho}^{(\kappa)}$ たちの直交関係式と，いわゆる次元公式を証明している．

命題 60.3.1. $(\kappa_i), (\lambda_i)$ の成分の順序を無視して一致するとき，$(\kappa) \sim (\lambda)$ と書けば，

$$\sum_{\rho} h_{\rho} \chi_{\rho}^{(\kappa)} \chi_{\rho}^{(\lambda)} = \begin{cases} 0 & \text{if } (\kappa) \not\sim (\lambda), \\ h & \text{if } (\kappa) \sim (\lambda), \end{cases}$$

定理 60.2（次元公式）. $f^{(\lambda)} := \chi_{1}^{(\lambda)}$ とおくと，$f^{(\lambda)} = \dfrac{n!\, \Delta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)}{\lambda_1!\, \lambda_2! \cdots \lambda_m!}$.

命題 60.3.2. 得られている指標の集合は完全である．

§4 (pp.154-157): 指標のパラメーターとして，$\chi^{(\kappa)}$

$$\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n), \qquad 0 \le \kappa_1 < \kappa_2 < \ldots < \kappa_n, \tag{60.12}$$

が得られている．$m < n$ や $m > n$ の場合の $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$ による $\chi^{(\lambda)}$ との関係も分かる．より実用的なパラメーターとして，**Charakteristik von** $\chi^{(\kappa)}$ と呼ばれる

$$(\kappa) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix}, \tag{60.13}$$

$$\begin{cases} 0 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_r \le n-1, \\ 0 \le b_1 < b_2 < \ldots < b_r \le n-1, \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_r + b_1 + b_2 + \cdots + b_r = n - r, \end{cases} \tag{60.14}$$

を導入する．r は **Rang der Charakteristik** と呼ばれる．

κ_i のうちで $\ge n$ となるものを $n + b_1, n + b_2, \ldots, n + b_r$ と書き，$< n$ となるものを，$n-1-a_{r+1}, n-1-a_{r+2}, \ldots, n-1-a_n$ として，$\{a_1, a_2, \ldots, a_r\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \setminus \{a_j\,;\, n-r \le j \le n\}$ である．すると，$r \le \sqrt{n}$ である．

定理 60.3. 次元公式は次のように書き表される：

$$\begin{aligned} f^{(\kappa)} &= \frac{n!\,\Delta(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n)}{\kappa_1!\,\kappa_2! \cdots \kappa_n!} = \frac{n!\,\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_r)\Delta(b_1, b_2, \ldots, b_r)}{a_1!\,a_2! \cdots a_r!\,b_1!\,b_2! \cdots b_r! \prod(a_\alpha + b_\beta + 1)} \\ &= \frac{n!}{a_1!\,a_2! \cdots a_r!\,b_1!\,b_2! \cdots b_r!} \left| \frac{1}{a_\alpha + b_\beta + 1} \right|, \end{aligned} \tag{60.15}$$

ここに，$\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r$.

§5 (pp.157-159): Rang der Charakteristik $r = 1$ の場合の指標公式を与えている．

§6 (pp.159-161): $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_n, \mathfrak{G} = \mathfrak{A}_n$ とすると，$\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ の１次元指標として，

$$\chi_\rho^{(1)} = \chi\begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \end{pmatrix}_\rho = (-1)^{\beta+\delta+\cdots} = (-1)^{n-s} = \mathrm{sgn}(\rho),$$

を得る．ここに，s は共役類 ρ の元に現れる（長さ 1 のものを込めた）Cyklen の個数．

$$\chi^{(\lambda)} = \chi^{(1)}\chi^{(\kappa)} = \mathrm{sgn} \cdot \chi^{(\kappa)} \tag{60.16}$$

となっているときに，$\chi^{(\lambda)}$ と $\chi^{(\kappa)}$ とは **associirte** であるという．

定理 60.4. $\chi^{(\lambda)}$ と $\chi^{(\kappa)}$ とが *associirte* であるとすると，

$$(\kappa) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_r \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_r \end{pmatrix}, \qquad (\lambda) = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_r \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_r \end{pmatrix}. \tag{60.17}$$

§7 (pp.161-166): 指標の値を決定しうる２，３の場合を示す．

定理 60.5. 共役類 ρ の元が s 個の Cyklen からなるとする．Rank r der Charakteristik (κ) に対して，$s < r$ ならば，$\chi_\rho^{(\kappa)} = 0$.

定理 60.6. 共役類 ρ の元が長さ c の 1 個の Cyklus と長さ 1 の $n-c$ 個の Cyklen からなるとする．指標の値 $\chi_\rho^{(\kappa)}$ は次のように求められる：

$$f(x) := \frac{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_r)}{(x+a_1+1)(x+a_2+1)\cdots(x+a_r+1)} \quad \text{と置けば,}$$

$$\frac{-c^2 h_\rho \chi_\rho^{(\kappa)}}{f^{(\kappa)}} = \left[\frac{f(x-c)\, x(x-1)\cdots(x-c+1)}{f(x)}\right]_{x^{-1}}, \quad h_\rho = \frac{n!}{(n-c)!\cdot c},$$

ここに，直上の第 1 式右辺は，x の降冪の順に展開したときの x^{-1} の係数を表す．

とくに，ρ が互換（$c=2$）のとき，

$$\frac{h_\rho \chi_\rho^{(\kappa)}}{f^{(\kappa)}} = \frac{1}{2}\left(\sum_i b_i(b_i+1) - \sum_i a_i(a_i+1)\right).$$

%%% %%%%%% %%%%%% %%%%%% %%%%%% %%%

73. *Über die Charaktere der mehrfach transitiven Gruppen,* **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 558–571(1904).**

序文 (pp.335-335):

● 2 重可遷群　$\exists$ Charakter χ s.t.

$\chi(R)=\alpha-1$,　R, α 個の元を動かさないとき（長さ 1 のサイクルが α 個）

● 4 重可遷群　$\exists$ Charakter χ s.t.

$\chi(R)=\frac{1}{2}\alpha(\alpha-3)+\beta$, または $\chi(R)=\frac{1}{2}(\alpha-1)(\alpha-2)-\beta$,

R, 1-cycle を α 個, 2-cycle を β 個（互換をβ 個）含むとき，

(from the results of Netto)

注.　Mathieu 群は，$\mathfrak{M}_{11}, \mathfrak{M}_{12}, \mathfrak{M}_{22}, \mathfrak{M}_{23}, \mathfrak{M}_{24}$ である．

§1 (pp.335-337):　Netto's results:

in §§1–2, *Untersuchungen aus Theorie de Substitutionen-Gruppen,* Crell's J. Bd.**103**:

Satz 73.1.I. 置換群 $\mathfrak{H}$ の位数 h.　$\sharp\{\mathfrak{H}$ 内の長さ s のサイクル$\} \times s = m\cdot h$.

$\mathfrak{H}$ が s-重可遷のときには，$m=1$.

Satz 73.1.II. 置換群 $\mathfrak{H}$ の位数 h.

$\sharp\{$Kombination; 長さ 1 のサイクル κ 個，長さ 2 のサイクル λ 個，長さ 3 のサイクル μ 個，... の集まり$\} \times s = m\cdot h$,　$s = 1^\kappa \kappa!\, 2^\lambda \lambda!\, 3^\mu \mu! \cdots$.

$\mathfrak{H}$ が $r=(\kappa+2\lambda+3\mu+\cdots)$-重可遷のときには，$m=1$.

証明.　Young diagram で，辺長 1 の row が κ 個，辺長 2 の row が λ 個，辺長 3 の row が μ 個,... を用意する．

$r=\kappa+2\lambda+3\mu+\cdots$ 個の数字をこの diagram の中に勝手に入れる．順序を無視した各 1 種類の入れ方に付き，異なるものが，$s=1^\kappa\kappa!\, 2^\lambda\lambda!\, 3^\mu\mu! \cdots$ 個ある．

$\mathfrak{H} \subset \mathfrak{S}_n$, $|\mathfrak{H}| = h$ とする．n 文字から r ($\le n$) 個の相異なる $\mathcal{T} := (\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \vartheta)$ を選ぶ．$R \in \mathfrak{H}$ による像 $(R(\alpha), R(\beta), \ldots, R(\vartheta))$ を共役と呼ぶが，その個数を p とし，$q := |\{R \in \mathfrak{H};\, R(y) = y\ (y \in \mathcal{T}\}|$ とおくと，$h = pq$.

最初に 1-cycle を κ-個，次に 2-cycle を λ 個，次に 3-cycle を μ 個,...,（これで n 文字の内，r 文字が現れている）となっている Kombination の個数を v とすれば，これが問題の集合の位数である．vs はこの型を与える $R \in \mathfrak{H}$ の個数である．この型の R が h 個ずつの部分集合に分けられることを言えばよい．

r 個の元の 1 つの列 $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \vartheta)$ の $\mathfrak{H}$ の元による動きに注目して，普通に計算していけば，証明できる．(以下略)

§2 (pp.337-339): $R \in \mathfrak{H}$ の型を $1^\alpha 2^\beta 3^\lambda \cdots$ とする．$\alpha = \alpha(R), \beta = \beta(R), \ldots$ と書くこともある．§1 の v は,

$$v = v(\kappa, \lambda, \mu, \ldots) = \sum_{R \in \mathfrak{H}} \binom{\alpha}{\kappa}\binom{\beta}{\lambda}\binom{\gamma}{\mu}\cdots = \frac{mh}{1^\kappa \kappa!\, 2^\lambda \lambda!\, 3^\mu \mu! \cdots},$$

$s_1, s_2, s_3, \ldots$ 変数で，Dimension(s_i) = Gewicht$(s_i) = i$, とおく．
$\mathrm{Dim}(s_1^\kappa s_2^\lambda s_3^\mu \cdots) = \kappa + 2\lambda + 3\mu + \cdots$.

（指標公式 1）
$$\begin{aligned}&(x_1 + x_2 + \cdots x_n)^\alpha (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^\beta \cdots \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &= \sum\nolimits_{(\kappa)} [\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n]\, \chi^{(\kappa)}(R) x_1^{\kappa_1} x_2^{\kappa_2} \cdots x_n^{\kappa_n} \qquad (73.1)\\ &= \sum\nolimits_{(\kappa)} [\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n]\, \chi_\rho^{(\kappa)} x^\kappa,\end{aligned}$$
R のサイクル型　　$\rho = 1^\alpha 2^\beta \cdots$.

命名 73.1.　Dimension of $\chi^{(\kappa)} := n'$,

$0 \le \kappa_1 < \kappa_2 < \ldots < \kappa_n$, $\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_n = n + \frac{1}{2}n(n-1)$,

$n' := (\kappa_0 - 0) + (\kappa_2 - 1) + \cdots + (\kappa_{n-1} - n + 2) = 2n - 1 - \kappa_n = n - (\kappa_n - n + 1)$.

- Charakter der Dim. 0:　$\chi_0 = 1$,
- Charakter der Dim. 1:　$\chi\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \alpha - 1$,
- Charakter der Dim. 2:　$\chi\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 3) + \beta$, $\chi\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha-1)(\alpha-2) - \beta$,
- Charakter der Dim. n':　個数 $= n'$ を正整数の和として書く書き方の個数

§3 (pp.339-341): 多重可遷群の ある指標.

Satz 73.3.I.　対称群の指標で，Dimension $\le \frac{1}{2}r$ ならば，それは各 r-可遷群の指標でもある．

Satz 73.3.II. ¥；2-可遷群の指標は，$\chi(R) = \alpha - 1$, R の型が，$1^\alpha 2^\beta \cdots$ のとき．逆に，この指標を持てば，2-可遷である．

Satz 73.3.III.　各 4-可遷群は，次の指標を持つ：

$$\alpha - 1, \quad \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1) + \beta, \quad \frac{1}{2}(\alpha-1)(\alpha-2) - \beta.$$

逆に，これらの指標を持てば，4-可遷である．

§4 (pp.341-344): 対称群の指標の新表示式.

§5 (pp.344-346): 5重可遷群 Mathieu's $\mathfrak{M}_{12}$.
Mathieu 群 $\mathfrak{M}_{12}$, 位数 $h = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$, 共役類 15 個.

§6 (pp.346-346): 5重可遷群 Mathieu's $\mathfrak{M}_{24}$.
Mathieu 群 $\mathfrak{M}_{24}$, 位数 $h = 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 48$, 共役類 26 個.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

78. *Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie II*, **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 428–437(1907).**

序文 (pp.394-394): この仕事の第1部 **72** では，いろいろ違った形で次の定理を導いた：

Satz A. 群 $\mathfrak{H}$ の元 A に対し，$g := |\mathfrak{G}|, \mathfrak{G} = Z_{\mathfrak{H}}(A)$ とおく．
$|\{X \in \mathfrak{H}; X^n = A\}| = k\,\mathrm{GCD}\{n, g\},\ k \geq 0.$

Charaktere という用語を zusammengesetzter Charakter（正整係数の和），uneigentlicher Charakter（整係数の和）にまで拡げる．新しい形の定理は，$A = E$ のとき，

Satz B. 群 $\mathfrak{H}$ の位数 $h = |\mathfrak{H}|$，$n|h$ とする．次の ϑ は ein (uneigentlicher) Character.

$$\vartheta(R) := \begin{cases} \dfrac{h}{n} & \text{if} \quad R^n = E, \\ 0 & \text{if} \quad R^n \neq E. \end{cases}$$

§5 (pp.394-398):
$R \in \mathfrak{H}$ の位数を r とする．R が $C[\mathfrak{H}]$ に働いた作用の特性関数は，
$(1 - x^r) \cdots (1 - x^r)$ ($r - 1$ 回) $= (1 - x^r)^{\frac{h}{r}} = \sum_{0 \leq n \leq h} \vartheta_n(R)(-x)^n$.
このとき，ϑ_n は実数値の zusammengesetzter Charakter である（[**58**], 1899, S.334）.

$$\vartheta_n(R) = \vartheta_n(R^{-1}) = \sum_{0 \leq \kappa \leq k-1} c_{n,\kappa}\chi^{(\kappa)}(R) = \sum_{0 \leq \kappa \leq k-1} c_{n,\kappa}\chi^{(\kappa)}(R^{-1}),$$

$$\sum_{R \in \mathfrak{H}} \chi^{(\lambda)}(R)\vartheta_n(R) = c_{n,\lambda}h.$$

$$\sum_{R} \chi^{(\lambda)}(R)\,(1 - x^{r(R)})^{\frac{h}{r(R)}} = h\,\Phi^{(\lambda)}(x), \quad (r(R) = \text{order of } R) \tag{78.2}$$

$$\Phi^{(\lambda)}(x) = \sum_{0 \leq n \leq h} c_{n,\lambda}(-x)^n, \quad \Phi^{(\lambda)}(0) = 0 \text{ if } \lambda \neq 0 \quad (\chi^{(0)} \equiv 1),$$

$\Phi^{(\lambda)}(x)$ の x の係数は，$-\chi^{(\lambda)}(E) = -f^{(\lambda)}(= -\dim)$
($\because$ x の1次の項は $r = 1$ のときのみ現れる)

$$r \text{ fixed } \ r|h, \qquad \sum_{R: r(R) = r} \chi^{(\lambda)}(R) =: b_r^{(\lambda)} \tag{78.3}$$

$$h\Phi^{(\lambda)}(x)=\sum\nolimits_{r\,:\,r|h} b_r^{(\lambda)}(1-x^r)^{\frac{h}{r}}. \tag{78.4}$$

例 78.1. $\mathfrak{H}=\boldsymbol{Z}_m=\langle A\rangle$,
$\chi^{[d]}(A):=\rho^d$ for $d|m$, $\rho:=$ primitive root of $x^m=1$, $\chi^{(0)}=\chi^{[m]}$.

$$\begin{aligned}
m\Phi^{[d]}(x) &= \sum_{r\,:\,r|m}\ \sum_{R\,:\,r(R)=r} \chi^{[d]}(R)(1-x^r)^{\frac{m}{r}}\\
&= \sum_{r\,:\,r|m}\ \sum_{R=A^s\,:\,s\equiv m/r\ (\mathrm{mod.}\,m)} \rho^{d\frac{m}{r}}(1-x^r)^{\frac{m}{r}}\\
&= \sum_{r\,:\,r|m}\Big(\sum_{s\equiv m/r\ (\mathrm{mod.}\,m)} 1\Big)\rho^{d\frac{m}{r}}(1-x^r)^{\frac{m}{r}}\\
\Phi_m(x) &:= \Phi^{[1]}(x),\\
m\Phi_m(x) &= \sum_{r\,:\,r|m}\Big(\sum_{s\equiv m/r\ (\mathrm{mod.}\,m)} 1\Big)\rho^{\frac{m}{r}}(1-x^r)^{\frac{m}{r}}.\\
m\Phi_m(x) &= \sum_{d\,:\,d|m}\mu_d(1-x^d)^{\frac{m}{d}},\quad \sum_{d\,:\,d|m}\mu_d=0.\\
(m=1)\quad \Phi_1(x) &= 1-x,\quad \mu_1=1,\quad \mu_2,\mu_3,\ldots,\ \text{inductively calculated,}\\
&\qquad \Phi_m(x)\ \text{の}\ x\ \text{の係数は},\ -f=-1.\\
d|m,\quad d\,\Phi_d(x) &= \sum_{s\,:\,rs=d}\mu_r(1-x^r)^s,\\
\sum_{d\,:\,d|m} d\,\Phi_d(x^{\frac{m}{d}}) &= \sum_{d\,:\,d|m}\ \sum_{s\,:\,rs=d}\mu_r(1-x^{\frac{m}{s}})^s=(1-x)^m. \qquad\square
\end{aligned}$$

$$\Phi^{(\lambda)}(x)=\sum_{n\,:\,n|h} a_n^{(\lambda)}\,\Phi_{\frac{h}{n}}(x^n),\qquad na_n^{(\lambda)}:=\sum_{r\,:\,r|n} b_r^{(\lambda)}.$$

Satz 78.1. 群 $\mathfrak{H}$ の位数を h, χ を $\mathfrak{H}$ の指標, $n|h$, とする.

$$\sum_{R\in\mathfrak{H}\,:\,R^n=E}\chi(R)=k\,n,\quad k\in\boldsymbol{Z}.$$

Satz 78.2. 群 $\mathfrak{H}$ の位数を h, $n|h$, とし, $\varepsilon(R):=\delta_E(R)$ を $\mathfrak{H}$ の正則表現の指標とする. 次は $\mathfrak{H}$ の uneigentlicher Charakter である:

$$\frac{h}{n}\,\varepsilon(R^n)=\frac{h}{n}\cdot\mathrm{Ch}_{\mathcal{S}_n}(R),\quad \mathrm{Ch}_{\mathcal{S}_n}\ \text{は}\ \mathcal{S}_n:=\{R\in\mathfrak{H}\,;\,R^n=E\}\ \text{の特性関数}.$$

Satz 78.2′(= Satz B). $n|h$ のとき次の ϑ_n は $\mathfrak{H}$ の uneigentlicher Charakter :

$$\vartheta_n(R):=\begin{cases}\dfrac{h}{n} & \text{if } R^n=E,\\ 0. & \text{if } R^n\neq E.\end{cases} \tag{78.5}$$

§6 (pp.398-400): Satz B の別証を与えた後

展開 $$\vartheta_n(R)=\frac{h}{n}\,\varepsilon(R^n)=\sum_{\kappa} a_\kappa^{(n)}\,\chi^{(\kappa)}(R), \tag{78.6}$$

の係数 $a_\kappa^{(n)}$ の**決定方程式**：　$n\, a_\kappa^{(n)} = \sum_{R \in \mathfrak{H}\,;\, R^n = E} \chi^{(\kappa)}(R);$

(性質)　$\frac{h}{n} a_0^{(n)} = \sum_\kappa \left(a_\kappa^{(n)}\right)^2.$

Satz 78.2bis. 群 $\mathfrak{H}$ の位数を h, $n|h$, とする．
部分集合 $\mathcal{S}_n := \{R \in \mathfrak{H}\,;\, R^n = E\}$ が群をなす
$\Longleftrightarrow$ ϑ_n は $\mathfrak{H}$ の eigentlicher Charakter である (i.e., $\vartheta_n = \sum_\kappa a_\kappa^{(n)} \chi^{(\kappa)}$, $a_\kappa^{(n)} \in \boldsymbol{Z}_{\geq 0}$)
（このとき，$a_\kappa^{(n)} = 0$ または $a_\kappa^{(n)} = a_0^{(n)} f_\kappa$.)

Satz 78.3. 群 $\mathfrak{H}$ の位数を h，χ を $\mathfrak{H}$ の指標，$n|h$, $\mathcal{S} \subset \mathfrak{H}$ を（内部自己同型）不変集合とする．

$$\sum_{R \in \mathfrak{H}\,:\, R^n \in \mathcal{S}} \chi(R) = k \cdot \mathrm{GCD}\{n, h\}, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

§7 (pp.400-402):
Satz 78.4. $n|h$, $A \in \mathfrak{H}$, $g = |Z_{\mathfrak{H}}(A)|$, χ を $\mathfrak{H}$ の指標とする．

$$\sum_{R \in \mathfrak{H}\,:\, R^n = A} \chi(R) = k \cdot \mathrm{GCD}\{n, g\}, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

§8 (pp.402-403):
Satz 78.5. $n|h$, χ を $\mathfrak{H}$ の指標．次は $\mathfrak{H}$ の uneigentlicher Charakter である：

$$\vartheta(R) := \sum_{S \in \mathfrak{H}\,:\, S^n = R} \chi(S).$$

引 用 文 献：

[平井1] 群の表現の指標について（経験よりの管見），第12回数学史シンポジウム（2001），津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**23**, pp.84-94, 2002/03/20.

[平井2] 対称群の指標に関する Frobenius, Schur の仕事，第13回数学史シンポジウム（2002），津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**24**, pp.53-58, 2003/03/20.

[平井3] Schur の学位論文および対称群の表現，第14回数学史シンポジウム（2003），津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**25**, pp.1233-131, 2004/03/09.

[平井4] Frobenius による「群の指標と表現」の研究，第15回数学史シンポジウム（2004），津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**26**, pp.222-240, 2005/03/09.

[平井5] Frobenius による「群の指標と表現」の研究（その2），第16回数学史シンポジウム（2005），津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**27**, pp.168-182, 2006/03/29.

[平井6] Frobenius による「群の指標と表現」の研究（その3），第17回数学史シンポジウム（2006），津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**28**, pp.290-318, 2007/03/29.

フロベニウス： 有限群の指標および線形表現に関する論文リスト
すべて Frobenius 全集 Band III より

53. *Über Gruppencharaktere*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 985–1021(1896).

54. *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1343–1382(1896).

56. *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 944–1015(1897).

57. *Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaftten zu Berlin, 501–515(1898).

58. *Über die Komposition der Charaktere einer Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 330–339(1899).

59. *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen II*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 482–500(1899).

60. *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 516–534(1900).

61. *Über die Charaktere der alternirenden Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 303–315(1901).

68. *Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 328–358(1903).

69. *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante II*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 401–409(1903).

72. *Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 987–991(1903).

73. *Über die Charaktere der mehrfach transitiven Gruppen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 558–571(1904).

75. *Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen* (mit I. Schur), Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 186–208(1906).

76. *Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen* (mit I. Schur), Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 209–217(1906).

78. *Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie II*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 428–437(1907).

Frobenius [53], [54] に関連する Burnside の論文

[B1] Willian Burnside, *On the continuous group that is defined by any given group of finite order, I,* Proc. London Math. Soc., Vol.**XXIX**(1898), 207-224.

[B2] Willian Burnside, *On the continuous group that is defined by any given group of finite order, II,* Proc. London Math. Soc., Vol.**XXIX**(1898), 546-565.