Kroneckerの楕円関数研究

今野秀二

1　クロネッカー（1823-1891）は数論，代数および代数幾何，解析など数学の広い分野で多くの業績をのこしているが，なかでも楕円関数と数論は彼の中心的テーマであった．数論ではクンマー，ガウス，ヂリクレの仕事を引き継ぎ，楕円関数ではヤコビやアーベルを出発点に数論と楕円関数の結びついた領域で輝かしい業績を残している．彼自身は「1863年に発表した”楕円関数を使ったペル方程式の解”が楕円関数の数論への応用の出発点だった」([2-IV] p. 471),「楕円関数の変換方程式を使って虚2次体上のアーベル拡大を構成することは青春の夢（liebsten Jungend traum）であった」（デデキント宛の手紙[2-V] p. 453）などと語っている．クロネッカーの論文は独創的でとても魅力的ではあるが，初期のものは性急な性格と多産のゆえか，証明が簡潔すぎたり省略が多くとりつきにくい．

これに対して晩年(1883年から1891年)に発表された「楕円関数研究」([2])では系統的であり，定理には完全な証明をつけている．このなかでクロネッカーは極限定理の証明，ヤコビの楕円関数 $\mathrm{sn}(u)$ に関する合同関係式の証明，さらにルジャンドル関係式の変形など興味深い関係式がたくさん盛り込まれている．この報告ではクロネッカーのアイデアに注目しながらその成果を紹介することにした．

2　ヤコビのFundamenta novaにはテータ関数の誕生から，テータ関数の性質，楕円関数との関係が詳しく論じられている．テータ関数の発見はヤコビの大きな功績であったが，クロネッカーはこの論文でそのテータ関数を道具として，全面的に活用している．

クロネッカーのテータ関数はヤコビに従っているが，ここではヴェーユの記法（[W]）を適時使うことにする（$q=e^{\pi iw}$ を $q=e^{2\pi iw}$ にするなど）．複素数 $\zeta\in\mathbf{C}$，上半平面 H 上の点 w に対しテータ関数 $\vartheta(\zeta,w)$ を

$$\vartheta(\zeta,w)=\sum_{\mu\in\mathbf{Z}}e\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2\frac{w}{2}+\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)\right] \tag{1}$$

と定義する．ただし $e[x]=e^{2\pi ix}$ である．以後 $z=e[\zeta]$, $q=e[w]$ と書くこと

して

$$X_q(z) = (z^{1/2} - z^{-1/2})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n z)(1-q^n z^{-1}), \qquad P(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$$

とおくと，テータ関数はまた乗法的に

$$\vartheta(\zeta, w) = i^{-1}q^{1/8}P(q)X_q(z), \tag{2}$$

と表せる．さらに簡単な計算でデデキントの η 関数 $\eta(w) = q^{1/24}P(q)$ に結びつく．すなわち

$$\vartheta'(0, w) = \frac{\partial}{\partial\zeta}\vartheta(\zeta, w)|_{\zeta=0} = 2\pi \cdot \eta(w)^3. \tag{3}$$

クロネッカーはまず $\sigma, \tau \in \mathbf{C}$ および $w_1, w_2 \in H$ に対して

$$\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = e\left[\frac{\tau^2}{2}(w_1 + w_2)\right]\frac{(4\pi)^{2/3}\vartheta(\sigma + \tau w_1, w_1)\vartheta(\sigma - \tau w_2, w_2)}{\vartheta'(0, w_1)\vartheta'(0, w_2)} \tag{4}$$

とおいた．一方，この w_1, w_2 に対して

$$ia_0 = \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2}, \quad ib_0 = \frac{w_1 - w_2}{w_1 + w_2}, \quad ic_0 = \frac{-1}{w_1 + w_2} \tag{5}$$

とおいて，複素係数の2次形式 $f_0(m, n) = a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2$ を対応させた．このとき， $w_1, -w_2$ は2次方程式 $a_0 + b_0 w + c_0 w^2 = 0$ の2根になっていて

$$w_1 = \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \qquad w_2 = \frac{b_0 + i}{2c_0}, \qquad 4a_0c_0 - b_0^2 = 1 \tag{6}$$

が分かる．そこで f_0 のゼータ関数をテーラー展開したとき，その定数項が $\log \Lambda$ で表せることを証明している（クロネッカーの第2極限定理）．

クロネッカーは (4) のテータ関数をすべて乗法的に表し，対数 $\log \Lambda$ を考える．これは $\log(1 - Xq^n)$ という形の項の和になるから，それぞれをさらにテーラー展開してやるのだが，その際現れる級数がすべて絶対収束するよう

条件: $\Im(\tau w_1 + \sigma) > 0, \Im(w_1 - (\tau w_1 + \sigma) > 0, \Im(\tau w_2 - \sigma) > 0, w_2 - (\tau w_2 - \sigma) > 0$

とします．そこで良く知られた等式

$$2\pi^2(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}) = \sum\nolimits_{\mu}' \frac{e[-\mu\tau]}{\mu^2} \qquad (0 \leq \tau \leq 1)$$

$$2\pi i\cdot\frac{e[-\tau x]}{e[x]-1}=\sum_{\mu}\frac{e[-\tau\mu]}{x+\mu}\qquad(0<\tau<1)$$

($\sum_{\mu}'$ は整数 $\mu\neq 0$ についての和）を使って次の命題を導いている．

命題 1 σ,τ は実数で $0<\tau<1$ かつ条件 1 を満たすとき

$$\log\Lambda(\sigma,\tau,w_1,w_2)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}{}'\,\frac{e[m\sigma+n\tau]}{f_0(m,n)}.\tag{7}$$

ただし $\sum_{m,n}'$ は $(m,n)\neq(0,0)$ なる $m,n\in\mathbf{Z}$ を動き，和は $-M<m<M,-N<n<N$ について取ってから $M,N\to\infty$ とする（アイゼンシュタイン和である）．

以後 ρ 実数としよう．級数 $\sum' e[m\sigma+n\tau]f_0(m,n)^{-1-\rho}$ は $\rho>0$ なら絶対収束だが，クロネッカーは $0<\tau<1$ という仮定から（アーベル変形を使い）$\rho>-1/2$ で収束することを示し，(7) を

$$\log\Lambda(\sigma,\tau,w_1,w_2)=-\frac{1}{2\pi}\lim_{\rho\to 0}\sum_{m,n}{}'\,\frac{e[m\sigma+n\tau]}{f_0(m,n)^{1+\rho}}\tag{8}$$

と表した．

正の実数 $\Delta>0$ に対し，上記の f_0 から $a=\sqrt{\Delta}\,a_0,b=\sqrt{\Delta}\,b_0,c=\sqrt{\Delta}\,c_0$ で得られる 2 次形式を $f(m,n)=am^2+bmn+cn^2$ とし，

$$w_1=\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c},\qquad w_2=\frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\tag{9}$$

とする．こうすると (8) は次のように一般化される．

定理 1　σ,τ は実数で $0\leq\sigma<1,0<\tau<1$ のとき

$$\log\Lambda(\sigma,\tau,w_1,w_2)=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\cdot\lim_{\rho\to 0}\sum_{m,n}{}'\,\frac{e[m\sigma+n\tau]}{f(m,n)^{1+\rho}}.\tag{10}$$

（$0\leq\sigma<1$, $0<\tau<1$ のとき，収束条件は満たされている）．

f が実正定値 2 次形式のときこれは**クロネッカーの第 2 極限定理**である．ここでクロネッカーは複素係数 2 次形式をも含めて極限定理を考えようとしているのだが，複素数の実数乗の定義が見あたらないのである．ただ彼は $\Re f$ が正定値の場合はうまくできると述べている．

$$P(\sigma,\tau,w_1,w_2)=e\left[\frac{\tau^2}{2}(w_1+w_2)\right]\vartheta(\sigma+\tau w_1,w_1)\vartheta(\sigma-\tau w_2,w_2)$$

とおくと (4) は

$$\Lambda(\sigma,\tau,w_1,w_2)=\frac{P(\sigma,\tau,w_1,w_2)}{\eta(w_1)\eta(w_2)}. \tag{11}$$

となるが，この P について

$$\begin{cases} P_{1,1}=P_{\sigma,\sigma}(0,0,w_1,w_2)=2\vartheta'(0,w_1)\vartheta'(0,w_2), \\ P_{1,2}=P_{\sigma,\tau}(0,0,w_1,w_2)=(w_1-w_2)\vartheta'(0,w_1)\vartheta'(0,w_2), \\ P_{2,2}=P_{\tau,\tau}(0,0,w_1,w_2)=-2w_1w_2\vartheta'(0,w_1)\vartheta'(0,w_2). \end{cases} \tag{12}$$

$$c_0(a_0P_{1,1}+b_0P_{1,2}+c_0P_{2,2})=\vartheta'(0,w_1)\vartheta'(0,w_2). \tag{13}$$

などの関係式を導いている．

3　任意の $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})$ および $\alpha',\beta'\in\mathbf{Z}$ に対して変換 $T':(\sigma,\tau,w_1,w_2)\to(\sigma',\tau',w_1',w_2')$ を

$$\begin{pmatrix}\sigma' \\ \tau'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma \\ \tau\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha' \\ \beta'\end{pmatrix}, \qquad w_1'=\frac{\alpha w_1-\beta}{-\gamma w_1+\delta}, \quad w_2'=\frac{\alpha w_2+\beta}{\gamma w_2+\delta} \tag{14}$$

と定義し，とくに $\alpha'=\beta'=0$ のとき T と表すことにする．

容易に分かるように $\sum{}' e[m\sigma+n\tau]f(m,n)^{-1-\rho}$ は変換 T' で不変である．一方，$SL_2(\mathbf{Z})$ が $\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ で生成されることと $\vartheta(\zeta,w)$ の $w\to w+1$，$w\to -1/w$ による変換公式から Λ がやはり T' で不変となる．したがって

命題 2　$\Lambda(\sigma,\tau,w_1,w_2)$ は $\sum{}' e[m\sigma+n\tau]f(m,n)^{-1-\rho}$ で与えられる数論的同値類の解析的不変量である．

クロネッカーはここで同値関係とは,「推移率」を満たす関係であると定義している．他の関係は自明と見たようである．

4　クロネッカーはこの論文の前半で第２極限定理を使って第１極限定理の主要部だけを求めていて，後になって第１極限定理を完全に証明している．ここでは第２極限定理を使った方法が非常に面白いので証明の概略を紹介しておこう．

２次形式 $f(m,n)=am^2+bmn+cn^2$ は $a,b,c\in\mathbf{Z}$ で $a>0, c>0$，$\Delta=4ac-b^2>0$ とする．w_1,w_2 は (9) の通りとし，$\sqrt{\Delta}f_0(m,n)=f(m,n)$ としよう．また簡単のため

$$Z_f(\sigma,\tau,1+\rho)=\sum_{m,n}{}'\,\frac{e[m\sigma+n\tau]}{f(m,n)^{1+\rho}}, \qquad Z_f(1+\rho)=Z_f(0,0,1+\rho)$$

と書く．

チリクレの式

$$h^{-1-\rho} = -\frac{1}{\Gamma(\rho+2)}\int_0^1 x^h d\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\rho+1}$$

($t=\log 1/x$ とすれば Mellin 変換）を使って

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\rho}+\sum{}'\frac{1}{(2\pi f_0(m,n))^{1+\rho}}\\&\quad=\frac{1}{\Gamma(\rho+1)}\int_0^1\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\rho}\left(\sum{}' x^{2\pi f_0(m,n)}-\frac{x}{\log(1/x)}\right)\frac{dx}{x}\end{aligned}$$

と表し，これが $\rho\to 0$ で有限であることを示しています．右辺は $x=e^{-t}$ とすればテータ級数から $(m,n)=(0,0)$ を除いたものの積分で，$(0,0)$ に $1/\rho$ が対応している．積分を２つに分けてテータの変換公式を使うなど，今日私達が解析接続で使う方法である．クロネッカーはこうして $Z_f(1+\rho)=\sum{}' f(m,n)^{1+\rho}$ が定数 $A_{-1},B_0,B_1,\cdots$ で

$$Z_f(1+\rho)=\frac{A_{-1}}{\rho}+B_0+B_1\rho+B_2\rho^2+\cdots\qquad(\rho\to 0)\tag{15}$$

と書けること，A_{-1} が f の判別式 Δ にのみ依存し同値類に無関係であることを示します（第２極限定理の場合は $A_{-1}=0$）．さて問題は B_0 を求めることである．

彼のアイデアは第２極限定理

$$\log\Lambda_f(\sigma,\tau,w_1,w_2)=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\lim_{\rho\to 0}Z_f(\sigma,\tau,1+\rho)\tag{16}$$

で，両辺の $(\sigma,\tau)\to(0,0)$ を取ることだがこの値は無限大になるからそこを工夫します．まず

$$f(m,n)=am^2+bmn+cn^2=\frac{1}{2c}\left(\frac{1}{2}\Delta m^2+\frac{1}{2}(bm+2cn)^2\right)$$

と書き $n_1=bm+2cn$, $m_1=m$, $\sigma'=\sigma-(b\tau/2c), \tau'=\tau/2c$ とおくと $g(m_1,n_1)=(1/2)(\Delta m_1^2+n_1^2)$ に対して

$$Z_f(\sigma,\tau,1+\rho)=(2c)^{1+\rho}\sum{}'_{(m_1,n_1)\in S}\frac{e[m_1\sigma'+n_1\tau']}{g(m_1,n_1)^{1+\rho}}$$

となる．ただし $S=\{(m_1,n_1)|m_1\in\mathbf{Z},\ n_1\equiv bm_1 \mod 2c\}$，$g$ の判別式は Δ かつ $w_1=w_2=w=i\sqrt{\Delta}$ である．ここで $(2c)^{-1}\sum_{h=0}^{2c-1}e[(2c)^{-1}(n_1-bm)h]=1$

($n_1 \equiv bm_1 \mod 2c$) ， $=0$ （ $n_1 \not\equiv bm_1 \mod 2c$ ）に注意し，この和を右辺に挿入すれば，すべての $(m,n) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}$ に関する和となり次のように書ける.

$$Z_f(\sigma,\tau,1+\rho) = (2c)^\rho \sum_{h=0}^{2c-1} Z_g\left(\sigma - \frac{b}{2c}(\tau+h), \frac{1}{2c}(\tau+h), 1+\rho\right). \tag{17}$$

ここで $h=0$ のときは $\tau \neq 0$ と仮定して極限 $\rho \to 0$ をとると第２極限定理から

$$\log\Lambda_f(\sigma,\tau,w_1,w_2) = \sum_{h=0}^{2c-1} \log\Lambda_g\left(\sigma - \frac{b}{2c}(\tau+h), \frac{1}{2c}(\tau+h), w, w\right). \tag{18}$$

ここで $(\sigma,\tau) \to (0,0)$ としてみよう．右辺 $h \neq 0$ の項は有限（第２極限定理)，$h=0$ の項は無限大になるが $\log\Lambda_f, \log\Lambda_g$ に対応する $Z_f(1+\rho), Z_g(1+\rho)$ の A_{-1} は (15) の注意から同じである．そこでこの項を左辺に移項すると

$$\frac{\Lambda(\sigma,\tau,w_1,w_2)}{\Lambda(\sigma',\tau',w,w)} = \prod_{h=1}^{2c-1} \Lambda\left(\sigma - \frac{b}{2c}(\tau+h), \frac{1}{2c}(\tau+h), w, w\right) \tag{19}$$

が得られる．こうして極限 $(\sigma,\tau) \to (0,0)$ をとると (19) 両辺は有限である．まず，左辺は $\sigma' + \tau' w = \sigma + \tau w_1, \sigma' - \tau' w = \sigma - \tau w_2$ に注意して (12) を使うと

$$\lim_{(\sigma,\tau)\to(0,0)} \frac{P(\sigma,\tau,w_1,w_2)}{(\sigma+\tau w_1)(\sigma-\tau w_2)} = \frac{P(\sigma',\tau',w,w)}{(\sigma'+\tau' w)(\sigma'-\tau' w)} = 2\vartheta'(0,w_1)\vartheta'(0,w_2)$$

となり，これから次式を得る.

$$\lim_{(\sigma,\tau)\to(0,0)} \frac{\Lambda(\sigma,\tau,w_1,w_2)}{\Lambda(\sigma_1,\tau_1,w,w)} = \left(\frac{\vartheta'(0,w_1)\vartheta'(0,w_2)}{\vartheta'(0,w)\vartheta'(0,w)}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

右辺は $(\sigma,\tau) \to (0,0)$ をとり対数を取ると $\log\Lambda((-bh)/(2c), 1/(2c), w, w)$ なる項の和になる．これを (17) で Z_g の和で表して ($2c^\rho$ の展開も考慮して)

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \log\frac{1}{2c}\left(\frac{\vartheta'(0,w_1)\vartheta'(0,w_2)}{\vartheta'(0,w)\vartheta'(0,w)}\right)^{2/3} = \lim_{\rho\to 0}\left(Z_g(1+\rho) - Z_f(1+\rho)\right) \tag{20}$$

を得る．次に f と同値なもう１つの f' をとると共通の g に対して (20) が成り立つから

定理 2 $f(m,n) = am^2 + bmn + cn^2$ と同値な２次形式 $f'(m,n) = a'm^2 + b'mn + c'n^2$ を取り f に対する w_1, w_2 同様 f' に対し w'_1, w'_2 を (9) で定めると

$$\begin{aligned}&\lim_{\rho\to 0}(Z_f(1+\rho) - Z_{f'}(1+\rho)) \\ &\quad = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\left\{\log\frac{1}{c'}\left(\vartheta'(0,w'_1)\vartheta'(0,w'_2)\right)^{\frac{2}{3}} - \log\frac{1}{c}\left(\vartheta'(0,w_1)\vartheta'(0,w_2)\right)^{\frac{2}{3}}\right\}.\end{aligned} \tag{21}$$

を得る．従って (15) より

定理 2-1 $Z_f(1+\rho)$ は f の同値類に依存しない定数 A_1, A_0 をもって次のように表せる．

$$
\begin{aligned}
&Z_f(1+\rho)\\
&= \frac{A_{-1}}{\rho} + A_0 - \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \log \frac{1}{c} \left(\vartheta'(0,w_1)\vartheta'(0,w_2)\right)^{\frac{2}{3}} + O(\rho) \qquad (\rho \to 0).
\end{aligned} \tag{22}
$$

一般に，2次形式の類指標 $\chi \neq 1$ に対し，和 $\sum_f \chi(f) \cdot Z_f(1+\rho)$ は A_{-1}, A_0 に無関係で考慮しなくてもよい．クロネッカーはこの事実を使ってペル方程式を解いている．

クロネッカーは後になって（全集 IV 巻の最後） 実係数正定値2次形式 $f(m,n)$ の場合に第1極限定理の証明をしている．その結果は以下の通りである．

定理 2-2 $f_0(m,n)$ は実係数，正定値2次形式で w_1, w_2 は (6) の通りとすれば

$$
\lim_{\rho \to 0} \left(\frac{1}{2\pi} Z_{f_0}(1+\rho) - \frac{1}{\rho} \right) = 2\gamma + \log c_0 - \log(\eta(w_1)\eta(w_2))^2. \tag{23}
$$

ここで γ はオイラーの定数である（ジーゲルでは b_0 が $2b_0$ であるため少し違っている）．

5 クロネッカーは 1863 年「楕円関数を使ったペル方程式の解」という短い論文を発表し，ペル方程式の解をテータ関数の特殊値で表しているが（全集 IV p.223），その論文には証明抜きで定理 2 を使っている．そして 20 年後の 1883 年，この論文ではじめて定理 2 の証明を公表したようである．ここでのペル方程式の解法は私達がよく知っているもの (例えば [W]) なので結果のみを，2次形式を2次体の言葉に置き換えて紹介しておこう．

$K_j = \mathbf{Q}(\sqrt{D_j})$ $(j=1,2)$ は D_j を判別式にもつ2次体で $D_1 < 0, D_2 > 0$ とする（K_1, K_2 はそれぞれ虚2次体，実2次体）．さらに $|D_1|, |D_2|$ は互いに素とする．このとき K_j の L 関数 $L_j(s) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{D_j}{n}\right) n^{-s}$ についてヂリクレにより

$$
L_1(1) = \frac{2\pi h_1}{w\sqrt{|D_1|}}, \qquad L_2(1) = \frac{2h_2}{\sqrt{D_2}} \log \varepsilon. \tag{24}
$$

ここで h_j は K_j の類数，w は K_1 に含まれる 1 のべき根の個数，$\varepsilon = (t + u\sqrt{D})/2$ は K_2 の基本単数であるが，この t, u がペル方程式 $T^2 - DU^2 = \pm 4$ の有理整数解である．クロネッカーは判別式が $\Delta = -D_1 D_2 > 0$ の虚2次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$ のイデアルに対して，そのノルムを $am^2 + bmn + cn^2$ としてイデア

ルの種指標値を

$$\left(\frac{\Delta}{am^2+bmn+cn^2}\right) \quad \text{から} \quad \frac{1}{2}\left((\frac{D_1}{a})+(\frac{D_2}{a})\right)$$

（とその補正）に変形し次の最終結果を導いている．

定理 3

$$h_1h_2\log\varepsilon = \sum_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{a}\right)\log\left(c\left|\vartheta'\left(0,\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right)\right|^{-4/3}\right). \tag{25}$$

右辺の和は判別式 Δ の正定値 2 次形式類の代表 $f(m,n)=am^2+bmn+cn^2$ についての和である．これから K_2 の基本単数 ε はテータ値で表せたことになる．

6　クロネッカーの時代楕円関数 $\mathrm{sn}(u,\kappa)$ が虚数乗法を持つとは，$\mathrm{sn}(\sqrt{-n}u,\kappa)$ ($n\geq 1$ は整数) が $\mathrm{sn}(u,\kappa)$ の有理関数で表せることであった．1857 年の論文に「アーベルは虚数乗法をもつ楕円関数のモジュライ κ が代数的数であると書いているが，その理由，どうして発見したかは分からない」とある．その後，彼は虚数乗法と題した短い論文をいくつか書いているが，そこでは「$\sqrt{-n}$ を虚数乗法にもつ楕円関数のモジュライが満たす方程式および等分方程式」と「$-n$ を判別式に持つ 2 次形式の類（数）」の関係を問題にしている．しかし詳しい証明はない．それから 20 年を経た，この論文では楕円関数の等分方程式の数論的性質を詳しくしらべ，楕円関数の合同関係式を証明している．

まず $\mathrm{sn}(u,\kappa)$ の定義を思い出そう．定数 κ に対し

$$x=\sqrt{\kappa}\,\mathrm{sn}(u,\kappa) \quad \Longleftrightarrow \quad u=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(\kappa-x^2)(1-\kappa x^2)}} \tag{26}$$

であった．そこで $\rho=\kappa+\kappa^{-1}$, $p(x)=1-\rho x^2+x^4$ とおくと，(26) から $dx/du=\sqrt{\kappa\cdot p(x)}$ となる．したがって，加法定理

$$\mathrm{sn}(u+v)=\frac{\mathrm{sn}(u)\mathrm{cn}(v)\mathrm{dn}(v)-\mathrm{sn}(v)\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)}{1-\kappa^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)}$$

は $x=\sqrt{\kappa}\,\mathrm{sn}\,u$, $y=\sqrt{\kappa}\,\mathrm{sn}\,v$, $z=\sqrt{\kappa}\,\mathrm{sn}\,(u+v)$ とおくと $\mathrm{sn}'(u)=\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)$ ゆえ

$$z=\frac{x\sqrt{p(y)}+y\sqrt{p(x)}}{1-x^2y^2} \tag{27}$$

と表されます．例えば

$$\sqrt{\kappa}\,\mathrm{sn}\,2u=\frac{2x\sqrt{p(x)}}{1-x^4}, \qquad \sqrt{\kappa}\,\mathrm{sn}\,3u=\frac{x(3-4\rho x^2+6x^4-x^8)}{1-6x^4+4\rho x^2-3x^8}$$

となるが，後者はさらに帰納法を使って一般化できる．すなわち $n>0$ が奇数の場合

$$\sqrt{\kappa}\ \mathrm{sn}\ nu=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{xP_n(x)}{x^{n^2-1}P_n(1/x)},\qquad (x=\sqrt{\kappa}\ \mathrm{sn}(u,\kappa)) \tag{28}$$

と書ける．ここで $P_n(x)$ は最高次係数が 1 の $\mathbf{Z}[\rho]$ に係数をもつ n^2-1 次の多項式である．

以後 $n>0$ は奇数と仮定し， $X=\sqrt{\kappa}\ \mathrm{sn}\ (nu,\kappa)$ とおこう．そうすると (28) は

$$xP_n(x)-(-1)^{\frac{n-1}{2}}x^{n^2-1}P_n(\frac{1}{x})X=0 \tag{29}$$

と書ける．これを $\mathbf{Z}[\rho,X]$ に係数をもつ x の n^2 次の方程式と見るとき，その解はどのようになるだろうか．それを記述するためまず第 1 種積分の周期を

$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}},\qquad K'=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa'^2\sin^2\varphi}} \tag{30}$$

とおく．ここでモジュラス κ,κ' は $\kappa^2+\kappa'^2=1$ を満たしている．このとき関数 $u\to \mathrm{sn}(u,\kappa)$ は 2 重周期関数で $\Omega=4K,\Omega'=2iK'$ をその基本周期にとることができ， $u=0$ は基本領域内唯 1 つの単純根になっている．これから (29) の解は

$$x=\sqrt{\kappa}\ \mathrm{sn}\ (u+\frac{h\Omega+h'\Omega'}{n})\qquad (0\le h,h'<n) \tag{31}$$

であることが分かる．とくに $X=0$ の場合，つまり $u=0$ のとき，(29) は $xP_n(x)=0$ となり，その解は周期の n 分点 $\sqrt{\kappa}\ \mathrm{sn}\ ((h\Omega+h'\Omega')/n)$ $(0\le h,h'<n)$ となる．簡単のためこの多項式を $\Phi_n(x)=xP_n(x)$ と書くことにする．

クロネッカーは $\Phi_n(x)$ の判別式を計算した後で，これを円分方程式 x^n-1 の類似と見て（メービウス関数を使い），周期の原始 n 分点を根にもつ多項式 $F_n(x)$ を求め，これについて以下のことを証明している．

(1)　$F_n(x)$ は $\mathbf{Z}[\rho]$ に係数をもつ多項式で $n^2\prod_{p|n}(1-p^{-2})$ 次である． F_n は $\mathbf{Q}(\kappa)$ 上既約，従って $\mathbf{Q}(\rho)$ 上既約で

$$\sqrt{\kappa}\ \mathrm{sn}\ \left(\frac{h\Omega+h'\Omega'}{n}\right)\qquad (1\le h,h'<n,\quad (h,h',n)=1) \tag{32}$$

を根にもつ．

(2)　n が 2 つ以上の素因子を持つ場合は $F_n(0)=\pm1$ で $F_n(x)=0$ の根 (32) は $\mathbf{Z}[\rho]$ を含むある整環の単数である．

$n=p^e$ が素数べきの場合は $F_n(0)=\pm p$ で $F_n(x)=0$ の根 (32) は $\mathbf{Z}[\rho]$ を含むある整環の（p を割る）素因子を与える．

(3) $F_n(x)=0$ の根には群 $(\mathbf{Z}/(n))^\times$ が作用していて，$x=\sqrt{\kappa}\,\mathrm{sn}\,\left(\frac{h\Omega+h'\Omega'}{n}\right)$ のこの群による共役はすべて同じ体に属し，それ以外は別の体に属す.

クロネッカーはここで n を素数と仮定します．従って $F_n(x)=P_n(x)$ である．ここでヤコビの結果（Fundamenta nova ([1]) の前半の主結果）を復習しておこう.

ヤコビは第 1 種楕円微分 $\omega=dx/\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}$ が与えられたとき，ある定数 λ, M に対し

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}=\frac{dy}{M\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} \qquad (\kappa,\lambda,M \text{ は定数}) \quad (33)$$

となる有理変換 $x\to y=R(x)$ を問題にした．そして，各奇数 $n>1$ に対しこの条件を満たす有理関数 $y=R(x)$ と定数 M,λ を求めています.

その結果は $n>1$ が奇素数の場合，(26) の u を使って $x=\sqrt{\kappa}\,\mathrm{sn}(u,\kappa)$ と書くと y は $y=\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sn}(\mu u,\lambda)$ と表せて，これが x の有理関数として

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}y=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sn}\,(\mu u,\lambda)=x\prod_{r=1}^{n-1}\frac{x-\sqrt{\kappa}\,\mathrm{sn}\,\frac{r\Omega}{n}}{1-x\sqrt{\kappa}\,\mathrm{sn}\,\frac{r\Omega}{n}} \qquad (34)$$

で与えられるというものである．ここで定数 $\mu=1/M$ および λ は $\mathrm{sn}(u),\mathrm{cn}(u)$ の u に周期の等分点を代入した値で具体的に記述されます．クロネッカーはヤコビのこの結果をさら精密化し μ が $\sqrt{\kappa}\,\mathrm{sn}(r\Omega/n)$ と同じ体に属し，$N(\mu)=n$ であること，因子 (divisor) として $(\mu)=(\sqrt{\kappa}\,\mathrm{sn}(r\Omega/n))$ であること，λ は κ と同じ性質をもつモジュラスで $(\lambda/\kappa)^{1/4}$ は $\mathbf{Q}(\rho,\kappa)$ 上有理的であることなどを証明する．その上で (34) を $\bmod \mu$ で reduction して次の合同関係式を導いている.

定理 4

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sn}\,(\mu u,\lambda)\equiv\sqrt{\kappa}\,\mathrm{sn}\,(u,\kappa)^{n-1} \mod \mu. \qquad (35)$$

この定理 4 についてクロネッカーは 3 角関数におけるオイラーの合同関係式

$$(-1)^{(n-1)/2}\sin nu\equiv(\sin u)^n \mod n, \qquad (n\ :\text{素数})$$

の一般化であることを注意し，これが整数論と楕円関数を結びつける非常に重要な定理であると強調している．そしてこの結果は本質的にヤコビの功績であると述べています.

クロネッカー研究は以上の他に，系統的ではないが興味ある話題がいくつもあるので，以下その結果を要約しておこう.

7-1　κ_1, κ_1', K_1, K_1' および κ_2, κ_2', K_2, K_2' はそれぞれ (30) の関係にあるモジュライおよび周期としよう．$w_1 = iK_1'/K_1, w_2 = iK_2'/K_2$ に対し (5) の a_0, b_0, c_0 で f_0 を定義し，$f(m,n) = \pi f_0(m,n)$ とする．このとき次の関係式が成り立つ．

$$\frac{1}{2}\log\sqrt{\kappa_1\kappa_2} = \lim_{\rho\to 0}\left(\sum_{\mu,\nu}\frac{1}{(\pi f(\mu,\nu))^{1+\rho}} - \sum_{g,\nu}\frac{1}{(\pi f(g,\nu))^{1+\rho}}\right). \tag{36}$$

ただし和 μ, ν, g は $\mu \equiv \nu \equiv 1 \mod 2, g \equiv 0 \mod 2$ なる整数を動くものとする．これから $\kappa_1\kappa_2$ は w_1, w_2 の関数とみて，群

$$\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}) | \alpha \equiv \delta \equiv 1 \mod 2,\ \beta \equiv \gamma \equiv 0 \mod 2\}$$

で不変である（$SL_2(\mathbf{Z})$ は (14) で (w_1, w_2) に作用）．

　また $a = (\pi K')/(2K), b = 0, c = (\pi K)/(2K')$ とすれば $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2$ に対して

$$\log\sqrt{\kappa} = \frac{KK'}{\pi}\lim_{\rho\to 0}\left(\sum\frac{1}{(K'^2\mu^2 + K^2\nu^2)^{1+\rho}} - \sum\frac{1}{(K'^2g^2 + K^2\nu^2)^{1+\rho}}\right) \tag{37}$$

が成り立つ（和は (36) に同じ）．

7-2　$f_0(x,y) = a_0x^2 + b_0xy + c_0y^2$,　w_1, w_2,　$\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)$ は (4-6) の通りとし，$g_0(x,y) = c_0x^2 - b_0xy + a_0y^2$,　$\Lambda'(\sigma,\tau,w_1,w_2) = \Lambda(\sigma,\tau,w_1,w_2)g_0(\sigma,\tau)^{-1}$ とおく．このとき

$$\Lambda'(\sigma,\tau,w_1,w_2) = \frac{e\left[\frac{\tau^2}{2}(w_1+w_2)\right]}{c_0\eta(w_1)\eta(w_2)}\cdot\frac{\vartheta(\sigma+\tau w_1, w_1)}{\sigma+\tau w_1}\cdot\frac{\vartheta(\sigma-\tau w_2, w_2)}{\sigma-\tau w_2}. \tag{38}$$

ここで $(\sigma,\tau)\to(0,0)$ として $\Lambda'(0,0,w_1,w_2)$ が f_0 の $SL_2(\mathbf{Z})$ に関する同値類の不変量であること，$\Lambda'(0,0,w_1,w_2) = \frac{4\pi^2}{c_0}(\eta(w_1\eta(w_2))^2$ であること，などから $Z_{f_0}(1+\rho)$ の第 1 極限定理を $\Lambda'(0,0,w_1,w_2)$ で表している．

7-3　クロネッカーのこの研究ではいろいろな関数および関係式を "テータ関数に置き換える" 試みを繰り返している．$\zeta, w \in \mathbf{C}$, $\Im w > 0$, $q = e[w]$ は上記の通りとし

$$\vartheta_0(\zeta,w) = \sum_n (-1)^n n^2 q^{(n^2/2)}\cos 2n\zeta\pi,$$

$$\vartheta(\zeta,w) = \vartheta_1(\zeta,w) = q^{1/8}\sum_n (-1)^n q^{(n^2+n)/2}\sin(2n+1)\zeta\pi$$

$$\vartheta_2(\zeta,w) = q^{1/8}\sum_n q^{(n^2+n)/2}\cos(2n+1)\zeta\pi,$$

$$\vartheta_3(\zeta, w) = \sum_n q^{(n^2/2)} \cos 2n\zeta\pi,$$

とする．このときクロネッカーは

$$\sum_{m,n} e^{-\pi f_0(m,n)} = \sqrt{\frac{1}{c_0}}\{\frac{1}{2}\vartheta_2(0,w_1)\vartheta_2(0,w_2)+\vartheta_2(0,4w_1)\vartheta_2(0,4w_2)+\vartheta_3(0,4w_1)\vartheta_3(0,4w_2)\}$$

であることを示し，さらにこれから左辺の級数がモジュライ $\sqrt{\kappa_j} = \vartheta_2(0,w_j)/\vartheta_3(0,w_j)$ (j 1, 2) の簡単な代数関数であることを証明している．

7-4　クロネッカーはこのシリーズの終わりのほうでアイゼンシュタインの研究に注目しています．アイゼンシュタインが $E_h(x,u,v) = \sum'_{m,n}(x+mu+nv)^{-h}$, $(h=1,2,\cdots)$ を楕円関数の基礎としたことに関連し

$$\mathrm{Ser}(\xi,\eta,u,v,w) = \sum_{m,n} \frac{e[m\xi+n\eta]}{u+mv+nw} \tag{39}$$

を導入します．ここで ξ,η は $-1<\xi<0$ を満たす実数，u,v,w は $v/w \notin \mathbf{R}$ なる複素数で和は (7) と同様アイゼンシュタイン和である．彼は $\mathrm{Ser}(\xi,\eta,u,v,w) = \mathrm{Ser}(\xi,-\eta,u,v,-w)$ ゆえ $\Im(w/v)>0$ と仮定しても一般性を失わないことに注意し，この級数の収束を調べる．そしてこの関数が以下のようにテータ関数で表せることを証明している．

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ser}(\xi,\eta,u,v,w)\\ &= \frac{1}{v}e\left[-\frac{\xi u}{v}\right]\left(\vartheta'\left(0,\frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u+u'}{v},\frac{w}{v}\right)\right)\left(\vartheta\left(\frac{u}{v},\frac{w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u'}{v},\frac{w}{v}\right)\right)^{-1}\end{aligned} \tag{40}$$

ただし $u' = \eta v - \xi w$．さらにこれが $SL_2(\mathbf{Z})$ の変換で不変なことを示している．

7-5　(4) で定義した $\Lambda(\sigma,\tau,w_1,w_2)$ に対して

$$A(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0) = e\left[\frac{\tau}{2}(\sigma+\tau w)\right]\frac{\vartheta(\sigma+\tau w,w)}{\eta(w)}, \qquad w = \frac{-b_0+i}{2c_0} \tag{41}$$

とおく．すなわち

$$\Lambda(\sigma,\tau,\frac{-b_0+i}{2c_0},\frac{b_0+i}{2c_0}) = A(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)A(\sigma,-\tau,a_0,-b_0,c_0). \tag{42}$$

この関数についてテータの変換公式を使って $A(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)^{12}$ が $SL_2(\mathbf{Z})$ で不変であること，つまり (14) の変換 T ($\alpha' = \beta' = 0$) で不変であることを示し，

$$w^2\frac{\partial^2 A}{\partial\sigma^2} - 2w\frac{\partial^2 A}{\partial\sigma\partial\tau} + \frac{\partial^2 A}{\partial\tau^2} = ((\sigma+\tau w)\pi i)^2 A \tag{43}$$

を証明している．

次に，この $A(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)$ と $\mathrm{Ser}(\xi,\eta,u,v,w)$ の関係を取り上げる．σ,τ,a_0,b_0,c_0 に対して u,v,w は $(b_0-i)v+2c_0w=0$, $u=\sigma v+\tau w$ を満たす元とし，(41) 右辺のテータ関数を乗法的に表す ((2) 参照)．その上で $w\to w/v$, $\sigma\to u/v-\tau w/v$ とすれば

$$
\begin{aligned}
&A(\sigma,\tau,a_0,b_0,c_0)\\
&=2e\left[\frac{1}{2v}(\tau u+\frac{w}{6})\right]\sin\frac{u\pi}{v}\prod_{\varepsilon=\pm1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e\left[\frac{nw+\varepsilon u}{v}\right]\right)
\end{aligned}
\tag{44}
$$

を得る．この右辺を $\mathrm{Atr}(u,v,w)$ と書こう．さらに $u=\sigma v+\tau w, u_0=\sigma_0 v+\tau_0 w$ に対して

$$
\bar{\mathrm{Atr}}(u_0,u,v,w)=e\left[\frac{\sigma\tau_0-\sigma_0\tau}{2}\right]\cdot\frac{\mathrm{Atr}'(0,v,w)\mathrm{Atr}(u_0+u,v,w)}{\mathrm{Atr}(u_0,v,w)\mathrm{Atr}(u,v,w)}
\tag{45}
$$

とおく．ここで $\mathrm{Atr}'(0,v,w)$ は u に関し微分をして $u=0$ としたものである．こうして

$$
\bar{\mathrm{Atr}}(u_0,u,v,w)=\mathrm{Ser}(\sigma_0,-\tau_0,u,v,w)=\sum_{m,n}\frac{e[m\sigma_0-n\tau_0]}{u+mv+nw}
\tag{46}
$$

を導いている．

7-6 以上で「楕円関数研究」の紹介は終えたが，もう一つの論文で彼は「ルジャンドルの関係式」を取り上げている．すなわち κ,κ' ($\kappa^2+\kappa'^2=1$) に対して第１種積分の周期 K,K' は (30) の通りとし，モジュラス κ,κ' の第２種積分の周期を

$$
E=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\kappa^2\sin^2(u)}du,\qquad E'=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\kappa'^2\sin^2(u)}du
\tag{47}
$$

とする．これについてルジャンドルの関係式は

$$
KE'+K'E-KK'=\frac{1}{2}\pi
\tag{48}
$$

であった．彼はこの関係をいろいろに変形しているが，主な結果はこの関係式が $\vartheta(\zeta,w)$ の変換公式と同値であること，アイゼンシュタイン級数 $E_2(u,v)=\sum'_{m,n}(mu+nv)^{-2}$ で基 $\{u,v\}$ を変換したときの変換公式に同値であることの２点である．

[1] Jacobi.C.G.G; Gesammelte Werke. I (pp.29-239), (pp.497-538). Chelsea.

[2] Kronecker.L; Mathematische Werke. IV (pp. 347-395), V (pp. 3-182). Chelsea.
[3] Weil.A; Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker. Springer (1976).