関とガウスの正十七角形(下)

杉本敏夫

§１３．ガウスの整数論

［７］ガウスの整数論、特にその第７章「円の分割を定める方程式」は《円分論》であり、正十七角形の作図を扱う。以下［７］高瀬氏の翻訳、［８］Bühler のガウス伝、［９］Mathews の整数論などを参照して簡潔に述べる。[10]「近世数学史談」に紹介された「正十七角形の作図の可能性の発見」は重要であるが、発見の様相の検討は他日を期す。本稿では、従来見逃されて来た正十三角形の作図のための数値計算を取り上げて、豊富な「根の相互関係」を詳述する。正十七角形は、その数値計算を、[10]の中に紹介された「ガウスの手紙」とは逆方向に辿る。得られた諸結果を見れば、ガウスと関孝和では、方法が全く異なるものの、内的に密接な関係を持つことが注目される。最後に［７］の正十九角形の数値計算とその補充を扱う。

§１４．正弦と余弦の式

ガウスは、主著［7］整数論の第７章、337 条において、 $t=\cos\phi+i\sin\phi$, ($\phi=2\pi/p$, $c=\cos\ \phi, s=\sin\phi$ と略す）と置き、円周 p 等分方程式 $t^p-1=(c+is)^p-1=0$ を展開し、c の式 C と s の式 S を導く。ガウスが何ら断りなしに、《虚数》$\sqrt{-1}=i$ を使用していることが注目される。[13] オイラーの影響であろう。ただしオイラーは $\sqrt{-1}$ を用い、文字 i は使わない。ガウスによる虚数の正当性の主張は、《複二次剰余》の論文(1831)まで待たねばならない。$p=7$ の場合、

$$
\begin{aligned}
(c+is)^7-1&=c^7+7ic^6s-21c^5s^2-35ic^4s^3+35c^3s^4+21ic^2s^5\\
&\qquad -7cs^6-is^7-1\\
&=[c^7-21c^5(1-c^2)+35c^3(1-c^2)^2-7c(1-c^2)^3-1]\\
&\qquad +i[7s(1-s^2)^3-35s^3(1-s^2)^2+21s^5(1-s^2)-s^7]\\
&=C+iS=0.
\end{aligned}
$$

と置き、[ ] 内を個別に計算すれば、係数のよく似た次の式を得る。

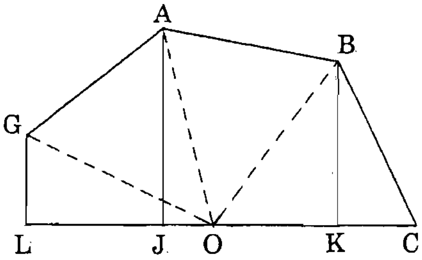
$$C=64c^7-112c^5+56c^3-7c-1=0.$$

$$S=-64s^7+112s^5-56s^3+7s=0.$$

そのうち、式 S に 2 を掛け、$s=a/2y$ を代入し、さらに y^7/a を掛ければ、

$$-a^6+7y^2a^4-14y^4a^2+7y^6=0.$$

を得る。y の降冪の順に並べ換えると、前回（上）§３に述べた、関による正七角形の y の方程式（角径式）（G）に他ならない。



関とガウスの正七角形は見かけの上では異なるようだが、実は《内的に》密接なつながりを持つ。§２公式群で引用した正七角形の図で、ＬＯＣを x 軸とし、G, A, B からの垂足を L, J, K とすれば、三つの縦座標ＧＬ, ＡＪ, ＢＫの満たす方程式（角径式）（G）が、上記の y の方程式なのである。

西洋流に言えば、縦座標は正弦で表されるので、方程式（G）は当然なのであるが。

§１５．正十七角形の場合

$p=7$ の場合に $S=-64s^7+\cdots+7s=0$ を導いたのと同じ方法を、ガウスは $p=17$ の場合に用いた。以下 s を x と書けば、

$$x^{17}-136x^{15}(1-x^2)+2380x^{13}(1-x^2)^2-12376x^{11}(1-x^2)^3$$
$$+24310x^9(1-x^2)^4-19448x^7(1-x^2)^5+6188x^5(1-x^2)^6$$
$$-680x^3(1-x^2)^7+17x(1-x^2)^8=0.$$

各 $(1-x^2)^k$ を、二項係数を用いて展開して整理すれば、［７］整数論の 337 条に、正弦の方程式（Ｉ）として書かれた方程式（$n=17$）の 65536 倍

$$65536\,[x^{17}-(17/4)x^{15}+(17/16)(14!/13!2!)x^{13}$$
$$-(17/64)(13!/11!3!)x^{11}+(17/256)(12!/9!4!)x^9$$
$$-(17/1024)(11!/7!5!)x^7+(17/4096)(10!/5!6!)x^5$$
$$-(17/16384)(9!/3!7!)x^3+(17/65536)(8!/1!8!)x]=0$$

を得る。全体を $65536x$ で割って、係数を整理すれば、ガウスの方程式

$$(\mathrm{S})\quad x^{16}-17x^{14}+(119/16)x^{12}-(442/64)x^{10}+(935/256)x^8$$
$$-(1122/1024)x^6+(714/4096)x^4-(204/16384)x^2$$
$$+17/65536=0$$

を得る。ガウスは約分できるときは約分して、四つの項を

$$-(221/32)x^{10},\ -(561/512)x^6,\ (357/2048)x^4,\ (51/4096)x^2$$

と書いている。これが 364 条に **例Ⅱ** として掲げられた式である。

さて、前回(上)§７～§９に述べた関孝和の計算を、西洋流に翻訳すれば、初め $y=1,\ x=\cos\phi,\ a=2\sin\phi,\ (\phi=\pi/17)$ と置いて、四つの公式（k_1）～

（k_4）を掛け合わせて、$a_{16}=a$ も用いて簡約すれば、

$$y^4 = 16\,b_2 b_4 b_8 x$$

を得る。次に、両辺に y^{12} を掛けて、$b_8 = xc_8/y$ を代入すれば

$$\text{(A)}\quad y^{16} = y^7 c_8 \cdot 2y^3 b_4 \cdot 2yb_2 \cdot 4x^2$$

となる。これが関の基本公式である。各因子を y と a から成る多項式に書き直して、掛け合わせて、y^{16} を移項すれば、

$$\text{(E)}\quad -17y^{16}+204y^{14}a^2-714y^{12}a^4+1122y^{10}a^6-935y^8a^6$$
$$+442y^6a^{10}-119y^4a^{12}+17y^2a^{14}-a^{16}=0$$

を得る。関は　$y=1/(2\sin\phi)$　と置いたのであった。そこでまず $a=1$ と置き、全体に -1 を掛け、$y=1/(2\sin\phi)=1/(2x)$ を代入して、全体に x^{16} を掛ければ

$$\text{(T)}\quad 17/65536-(204/16384)x^2+(714/4096)x^4-(1122/1024)x^6$$
$$+(935/256)x^8-(442/64)x^{10}+(119/16)x^{12}-17x^{14}+x^{16}=0$$

を得る。この（T）は、上のガウスの方程式（S）そのものではないか！

関には勿論、ガウスの「虚平面の単位円周上の点の座標」という考え方は全く無い。関の方法の特色は、(上)§７の正十七角形の図の中に成立する「幾何学的関係」（和算流の式として表される）のみに注目し、基本公式（A）を導き、さらに(A）に含まれる四つの因子 $y^7c_8, 2y^3b_4, 2yb_2, 4x^2$ を、公式群（p）および「旗の補題」を用いて多項式に変形し、掛け合わせて、方程式（E）に到ったのである。

ガウスと関の両者は、全く異なる基礎の上に立ちながらも、結果的に同一の結論に到達した。（同一の図形を扱っている故に、当然であろうか？）誠に興味深い。

§１６．ライステへの記入

[11]ライステ著：算術・代数教科書は本文の対頁に白紙の頁を挟む。ガウスがこの白紙の頁を雑記帳として用い、記入した数学的内容は[12]「ライステ記入」として有名。その 42 頁にガウスの奇妙な記入があり、これまで誰にも注意されなかった。

$A\ =(1+5+12+8)=+0.27389\,05549\,14$　（末位の 14 は 64 が正しい）

$A'\ =(2+10+11+3)=+1.37720\,28539\,77$　（末位の 77 は 73 が正しい）

$A''=(4+7+9+6)=-2.65109\,34089\,56$　（末位の 56 は 37 が正しい）

$A,\ A',\ A''$ の意味は、$a_1,\ a_2,\ a_3$ と書くとき、円周十三等分方程式

$$a^3+aa-4a+1=0$$

の根 $r=\cos\phi+i\sin\phi,\ (\phi=2\pi/13)$ だと言う。(当時 a^2 を aa と書いた。) 上の A の括弧内の数字は、r の指数が 1, 5, 12, 8 等であることを示していて、具体的には

$$a_1=(r^1+r^5+r^{12}+r^8)=2\cos\phi+2\cos5\phi$$
$$a_2=(r^2+r^{10}+r^{11}+r^3)=2\cos2\phi+2\cos3\phi$$
$$a_3=(r^4+r^7+r^9+r^6)=2\cos4\phi+2\cos6\phi$$

を表す。各 a への r^n の割り振りは、法 13 で e を指数とした、原始根 2 の乗冪表

e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^e	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7	1

が基礎になる。実は a_1 の指数の 1, 5, 12, 8 は順序を 8, 12, 5, 1 と並べ換えれば、指数 e の 3, 6, 9, 12 に対応する 2^e の値であったのだ。同様にして a_2 の指数の 2, 10, 11, 3 を 2, 3, 11, 10 と並べ換えれば、指数 e の 1, 4, 7, 10 に対応する 2^e の値であった。a_3 の 4, 7, 9, 6 を 4, 6, 9, 7 と並べ換えれば、指数 e の 2, 5, 8, 11 に対応する 2^e の値であった。すなわち、ガウスは指数 e が $3n+0$ の組、$3n+1$ の組、$3n+2$ の組という規準で、a_1, a_2, a_3 の各組を定めたのだ。

ガウスは a_1, a_2, a_3 がそれぞれ4つの項から成るので、4項周期と呼び、項数と原始根2 の乗冪を用いて $a_1=(4, 1)$, $a_2=(4, 2^1)$, $a_3=(4, 2^2)$ と書く。また例えば $r^3=r^{2^{1+3}}=r^{2^4}$ を印刷の都合上の困難から、[3]＝[2 1+3]＝[2 4] と書いた。上の (1+5+12+8) は ([12]+[9]+[6]+[3]) を意味する。[ ] を使用しても、記号の意味を理解し易くしたとは限らない。(ガウスはルジャンドルへの対抗意識からか、平方剰余のルジャンドル記号を用いない。[7] 整数論の中の平方剰余の説明が、今日の私たちにとって理解しにくいのは、そのためであろうか。n 項周期について、いささか考えてみた。)

§17. 根の組の系統図

ガウスは「円の 13 等分」について、前節の A, A', A'' しか書いてない (別の紙片に記入したかもしれないが、私が入手したのは前節の内容だけである)。そこで、彼に代わってその他の分類を実行しよう。前節の乗冪表で、e が偶数の組と奇数の組で分類しよう。これらは6項周期である。

$$b_1=(r^4+r^3+r^{12}+r^9+r^{10}+r^1)=+1.30277\ 56377\ 32$$
$$b_2=(r^2+r^8+r^6+r^{11}+r^5+r^7)=-2.30277\ 56377\ 32$$

$4=2^2$, $3\equiv2^4$, $12\equiv2^6,\cdots$; $2=2^1$, $8=2^3$, $6\equiv2^5,\cdots$ b_1 と b_2 は2次方程式

$$bb+b-3=0$$

を満たす。この b_1 と b_2 の二つの組は、先に得た a_1, a_2, a_3 の各組とは交わらない。b_1 と b_2 を細分すれば、それぞれは3項周期の二つの組に、計四つの組に分かれる。

$$d_1=(r^3+r^9+r^1)=+0.65138\,78188\,66\;+0.52241\,58034\,56\,i$$
$$d_2=(r^4+r^{12}+r^{10})=+0.65138\,78188\,66\;-0.52241\,58034\,56\,i$$
$$d_3=(r^8+r^{11}+r^7)=-1.15138\,78188\,66\;-1.72542\,21884\,18\,i$$
$$d_4=(r^2+r^6+r^5)=-1.15138\,78188\,66\;+1.72542\,21884\,18\,i$$

分類は、r の指数が 2^{3n}, 2^{3n+1}, 2^{3n+2}, 2^{3n+3} の組である。各 d_i は、4次方程式

$$d^4+d^3+2dd-4d+3=0$$

を満たす。この方程式の根の表示には、虚数 $\sqrt{-1}=i$ が必要になる。それは例えば $d_1=(r^1+r^3+r^9)$ の r が $r=\cos\phi+i\sin\phi$, ($\phi=2\pi/13$) であり、3乗しても9乗しても虚数部分は消えず、三項の和も虚数部分が打ち消されないことから分かる。

再び a_1, a_2, a_3 に戻り、b との交わりで細分すれば、2項周期の六つの組

$$a_1\cap b_1=c_1=(r^{12}+r^1)=2\cos\phi=+1.77091\,20513\,06$$
$$a_1\cap b_2=c_2=(r^5+r^8)=2\cos5\phi=-1.49702\,14964\,42$$
$$a_2\cap b_1=c_3=(r^{10}+r^3)=2\cos3\phi=+0.24107\,33605\,11$$
$$a_2\cap b_2=c_4=(r^2+r^{11})=2\cos2\phi=+1.13612\,94934\,62$$
$$a_3\cap b_1=c_5=(r^4+r^9)=2\cos4\phi=-0.70920\,97740\,85$$
$$a_3\cap b_2=c_6=(r^7+r^6)=2\cos6\phi=-1.94188\,36348\,54$$

を得る。各 c_i は各々1項周期 e_i (計 12 個) に分かれる。c の満たす方程式は

$$c^6+c^5-5c^4-4c^3+6cc+3c-1=0$$

である。以上をまとめると、次の根の組の系統図が出来上がる。Ω は根の総和。

Ω (12 項周期が1個) ——b (6 項周期が2個) ——d (3 項周期が4個)

| | |

a (4 項周期が3個) ——c (2 項周期が6個) ——e (1 項周期が12個)

[9] Mathews には、円の 13 等分の例題が詳しいが、d はあっても、a, c についての言及がなく、この系統図の凡ての組の関係については書かれていない。

§ 18. 数値解法

ガウスは各 a を小数 12 桁まで求めた。例えば $a_1=2\cos\phi+2\cos5\phi$ は三角関数表から個々の余弦を 12 桁求めればよさそうだが、そうは問屋が卸(おろ)さない。

$\phi=2\pi/13$ は、π の詳しい値から求まり、ϕ からガウス所有の[14] Schulze の数表の下巻、三角関数表で cos ϕ を引く。だが、引数は度、分及び 10 秒刻みであり、

関数値は7桁だから、とても小数 12 桁は求まらない。では、ガウスはどうしたのか？

[12]ライステ記入 43 頁に、数値計算が克明に記されている。その内容を通常の記法に直して、a を真の根、x を近似根としよう。a の方程式

$$f(a)=U=a^3+aa-4a+1=0$$

は、数値的に、次のように解かれる。いま微分式を

$$f'(a)=V=3aa+2a-4,\quad f''(a)/2=W=3a+1,$$

と置く。x を近似根とするテーラー展開を二次の項までで打ち切れば次のようになる。

$$(*1)\quad 0=f(a)\fallingdotseq f(x)+(a-x)f'(a)+(a-x)^2f''(a)/2$$
$$=U+(a-x)V+(a-x)^2W$$

しかし、$f'(a)$ や $f''(a)/2$ は、a が未知のために求まらない段階においては、近似的に x を用いて、$f(x)=U$ や $f'(x)=V$ や $f''(x)/2=W$ で代用する。さらに最初の段階では $(a-x)^2$ が僅小な値なので $=0$ と仮定して、

$$(*2)\quad 0\fallingdotseq U+(a-x)V,\qquad a-x\fallingdotseq -U/V,\qquad a\fallingdotseq x-U/V$$

で代用する。これは周知のニュートン法の公式、すなわち第一近似であった。

ガウスは《ひとひねり》して、(＊1) の第三項を再利用しようとし、(＊2) の中間の $a-x\fallingdotseq -U/V$ を利用して、$(a-x)^2W\fallingdotseq -(a-x)WU/V$ と置いた。そこで

$$0\fallingdotseq U+(a-x)V+(a-x)^2W=U+(a-x)V-(a-x)WU/V.$$

第二、第三項をまとめて、$(a-x)(V-WU/V)$ と置き、ガウスの第二近似の公式

$$(*3)\quad a\fallingdotseq x-U/(V-WU/V)$$

を得る。ニュートン法(＊1)の分母 V と比べれば、分母が $(V-WU/V)$ のように複雑な形をしている。しかし公式(＊3)の威力は、後の適用例によって明らかになる。

所でガウスは数値で表しているが、それらを U, V, W で置き換えたとき、

$$(*4)\quad A=U/V,\quad a=x-A,\quad A=U/(V-WA)$$

と書く。奇妙なのは第二近似のための式　$A=U/(V-WA)$　である。A を求めるのに、分母に未知の A を書いている。（この時代の慣用か？）今なら

$$(*5)\quad A=U/V,\quad a=x-A\ ;\ A_1=U/(V-WA),\quad a=x-A_1$$

のように、A と A_1 を区別して書く所であろう。

先ず例題として、三角関数表の $\cos\phi$ を短縮して $x=0.27$ と置けば、第一近似は、

$$U=f(0.27)=0.012583,\quad V=f'(0.27)=-3.2413,$$

$$a\fallingdotseq 0.27-0.012583/(-3.2413)=0.27+0.00388\,20843\,5=0.27388\,20843\,5,$$

この根の精度は先ず先ずであり、

$$f(0.27388\,20843\,5)=0.00002\,73362\,5$$

となる。次にガウスの第二近似では、$W=f''(0.27)/2=1.81$ も用いて

$$a_1 \fallingdotseq 0.27+(-0.012583)/(-3.2413-1.81\times0.012583/(-3.2413))$$
$$=0.27+(-0.012583)/(-3.23427\,34273\,3)$$
$$=0.27+0.00389\,05183\,1=0.27389\,05183\,1.$$

第一近似 a と比べれば、分母の -3.2413 が $-3.23427\ 34273\ 3$ と絶対値が減り、補正項の絶対値が先の 0.00388 20843 5 に比べて 0.00389 05183 1 と増えた。

このガウスの第二近似の根が高精度なることは、得られた値を代入して、

$$f(0.27389\,05183\,1)=0.0^{6}1182\,72$$

が得られることから分かる。(0 の肩の 6 は、0 が 6 個並ぶことを示す略記法。)

次の例題は、0.273 から第一近似として 0.27389 01081 7 を得て、この根の精度は高く、$f(0.27389\ 01081\ 7)=0.0^{5}14418\ 8$ となる。さらに第二近似の公式により 0.27389 05545 2 を得て、この第二近似が一層高精度なることは、$f(0.27389\ 05545\ 2)=0.0^{8}143$ から分かる。

ところで過剰な近似値 0.274 から出発すれば、第一近似として 0.27389 05482 を得て、$f(0.27389\ 05482)=0.0^{7}2183$ で、すでに高精度である。第二近似値として 0.27389 05549 65 を得て、$f(0.27389\ 05549\ 65)=0.0^{11}2525$ となり、もはや根としては、申し分のないほど収束した！

「ガウス自身が実行した、$x=0.27389$ を用いた計算」は、彼にしては計算間違いが多く、あちこちに訂正もあり、その内容の理解に私は長いあいだ悩まされた。第一近似は $a=0.27389\ 05549\ 64043\ 74338$ を得て、$f(a)=0.0^{12}561\ 04737$ と高精度であり、第二近似は $a_1=0.27389\ 05549\ 64217\ 59442$ を得て、$f(a_1)=0.0^{18}35$ と驚異的に高精度である。これらは私の検算であり、ガウスはここまで計算していない。

従来、ライステ 42-43 頁のガウス記入のことは、だれも注目しなかった。一般に数学史家（シュレジンガー等）が興味をもつのは、ガウスにおける理論形成であり、[12] ライステ記入からの引用も、その面に限られる。実際、ライステには、あとでガウスの論文に嵌め込まれた定理も記入されている。私は《ガウスの理論形成は多くの数値計算から帰納された》と考えて、[12]とその他の紙片への記入を取り上げて来た。

なお、私の所謂「二段階方式」は、もっと昔（１７世紀）に考案されていた、と、[16] 長田直樹氏よりご指摘を受けた。末尾の〔補足〕を参照。

§１９．ガウスの手紙

〔10〕数学史談の冒頭には、ガウスが 1796 年に、《正十七角形の発見》をイエナ

『学芸報知』に投じた報告文が紹介されている。

「正多角形の中で三角形、五角形、十五角形…の作図が可能であることは…既にユークリッドの時代に出来ていた…」

とある。私は前回冒頭で、関孝和とガウスが扱った正多角形の中で、$p=5, 7, 13, 17, 19$ の場合が共通であると述べた。ガウス自身は [7] 整数論では、例題として $p=17, 19$ の場合を扱ったに過ぎない。$p=13$ の場合は上記の通り。

[10] 数学史談にはまた、1819 年にガウスが弟子に宛てた手紙が紹介されている。その中に、上記の作図可能の内容が詳述してある。（私はこの発見の重要性に鑑（かんが）み、《発見》についての考察は他日を期したい。）しかし、手紙の中の一文

「方程式 $(x^p-1)/(x-1)=0$ の根を二組に分けること、1796 年の冬休み…帰省していた時… 凡ての根の間の関係を専心考究している中… 起床直前に、それらの根の相互の関係を明瞭に看破することに成功した…」

は極めて重要な意味を持つので、いささか論じたい。私は「ユークリッドの $n=5$ と上記の $n=13$ の中間で、必ずや $n=7$ の場合を小手調べしただろう」と推測する。

$$(x^7-1)/(x-1)=x^6+x^5+\cdots+x+1=0$$

の六根は、$r=\cos\phi+i\sin\phi$, ($\phi=2\pi/7$) の乗冪の和となる。乗冪の

第一の組分けは、$a_1=r^2+r^4+r^1$, $a_2=r^3+r^6+r^5$ であり、

第二の組分けは、$b_1=r^6+r^1$, $b_2=r^3+r^4$, $b_3=r^2+r^5$ である。

これら二種類の組分けは、法 7 の原始根 3 を用いた乗冪表

e	1	2	3	4	5	6
3^e	3	2	6	4	5	1

に基づく。第一の組 a_1, a_2 は、e の偶・奇で分類し、2 次方程式

$$aa+a+2=0$$

を満たし、第二の組 b_1, b_2, b_3 は、e の法 3 による剰余で分類し、3 次方程式

$$b^3+bb-2b+1=0$$

を満たす。二種類の組分けから得る系統図は、$n=13$ の場合の小型版になっている。

Ω（6 項周期が 1 個）——a（3 項周期が 2 個）

|　　　　　　　　　　|

b（2 項周期が 3 個）——c（1 項周期が 6 個）

ガウスが正十七角形や正十九角形の場合に示した図式を模倣して示そう。

$$\Omega \begin{cases} a_1 & \begin{cases} c_1 \\ c_2 \\ c_4 \end{cases} \\ \\ a_2 & \begin{cases} c_3 \\ c_5 \\ c_6 \end{cases} \end{cases} \qquad\qquad \Omega \begin{cases} b_1 & \begin{cases} c_1 \\ c_6 \end{cases} \\ \\ b_2 & \begin{cases} c_3 \\ c_4 \end{cases} \\ \\ b_3 & \begin{cases} c_2 \\ c_5 \end{cases} \end{cases}$$

ガウスが洩らした「凡ての根の相互の関係の明瞭な看破が生ずる」ためには、この $n=7$ と $n=13$ の場合（枝分かれを含んでいる）の専心考究が、彼にとって適切な例題になったであろう、と私は推測する。それに対比して $n=17$ の場合は（次節に述べるように）根の相互関係が直線的であって、単純過ぎて、適切とは言えない。

しかし $n-1=16$ の場合、$2^4=16$ 次の方程式は、平方根の積み重ねによって解ける。すなわち、定規とコンパスのみを使った作図が可能である。野心に燃えた青年が世間を驚かせようとすれば、「ユークリッド以来の壁を打ち破った $n=17$ の場合の作図可能性の公表のほうが適切だ」と判断したことは、容易に推察できる。

§２０．ガウスの手紙（続）

私がこの手紙を重視する理由の一つは、正十七角形の場合の根の相互関係が、数値を伴って詳細に述べてあるからである。[10] 数学史談では《ガウスの秘密主義》が強調される。しかしそれは、彼がライバルと目したルジャンドルなどに対してであり、それは《学の先達》に対して甚だ無礼であろう。（ガウスの周辺に理解者は居らず、研究内容が外国に洩れたら巧妙に利用されるだろう、と懼(おそ)れた可能性はある。）

それに引き替え、親しく付き合っていた弟子たちに対して甚だ親切だったことは、多くの証拠がある。[10] 数学史談に紹介された上の手紙（手紙全体の一部分）が、ガウスの発見を伝え聞いて、作図法を工夫して[7] 整数論の発行後に発表したH某に対する愚痴まで零(こぼ)されていて、文庫版の頁数で６頁も占めていることから分かる。

正十七角形の解析を、ガウスの手紙の中の解説とは逆の方向に実行してみよう。それには、法 17 の原始根 3 の乗冪表が要る（[7] 整数論の354条を参照）。すべての根を分類する。いま $r=\cos\phi+i\sin\phi$, ($\phi=2\pi/17$) と置き、r^n ($n=1, 2, \cdots, 16$) を組み合わせて $r^n+1/r^n=2\cos n\phi$ と置き、ガウスに倣って $2\cos\phi+2\cos 4\phi=2a$, $2\cos 2\phi+2\cos 8\phi=2b$, $2\cos 3\phi+2\cos 5\phi=2c$, $2\cos 6\phi+2\cos 7\phi=2d$, かつ $2a+2b=2e$, $2c+2d=2f$ と置く。$2e+2f=-1$, $e\cdot f=-1$ が基本である。

16 次の方程式

$$(X)\qquad (x^{17}-1)/(x-1)=x^{16}+x^{15}+\cdots+x+1=0$$

を次々に分解して行けば、まず二つの８次式を得る。

$$p(x)=x^8-2ex^7+(2-2e)x^6-(2e-3)x^5+(1-4e)x^4$$
$$-(2e-3)x^3+(2-2e)xx-2ex+1,$$
$$p_1(x)=x^8-2fx^7+(2-2f)x^6-(2f-3)x^5+(1-4f)x^4$$
$$-(2f-3)x^3+(2-2f)xx-2fx+1.$$

これらの８次式 $p(x)$ も $p_1(x)$ も、中央の x^4 の係数を中心にして、各係数がその前後で逆順に並ぶ、いわゆる《逆数式》である。$p(x)$ はさらに二つの４次式

$$q(x)=x^4-2ax^3+(2c+2)xx-2ax+1,$$
$$q_1(x)=x^4-2bx^3+(2d+2)xx-2bx+1$$

に分解され、係数は同じく《逆数式》である。$q(x)$ はさらに二つの２次式

$$s(x)=xx-2\cos\phi\cdot x-1,\qquad s_1(x)=xx-2\cos 4\phi\cdot x-1$$

に分解される。$q_1(x)$, 遡って $p_1(x)$ の分解も同様であり、類推できるので略す。

［７］整数論の 357 条によれば、$p(x)$ の x^7 の係数は $2e=(-1+\sqrt{17})/2$ である。その他の係数も凡て $\sqrt{17}$ を含む式を《入れ子》に重ねた式で表される。さいごに正十七角形の作図の基礎になる $\cos\phi$ の値そのものも、手紙の中では、平方根を幾重にも重ねた壮観な式で表されている。［10］数学史談を参照して頂きたい。

これらの値は、上述のように定規とコンパスによる作図が可能である。これに対して正七角形や正十三角形の場合は、途中に三次方程式が出て来るので、同じ用具による作図は不可能である。ガウスが正十七角形の作図可能性を重視して、[7] 整数論の発行以前にイエナ『学芸報知』に予告まで出したのは、そのためであろう。

ガウスは自分の理論の構成には、ここに紹介したように、また［７］整数論 342 条以下の記載と同様に、上から下への順序で理論を構成したと思われる。16 次の円分方程式の分解可能性が焦点である。関孝和、延いては和算とは立場が違う。

ガウスの手紙の《正十七角形の作図》は、ここに述べたのとは丁度逆の順序、（いかにも正十七角形を紙の上で順々に作図して行くかのように）下から上への積み上げの順序に辿って解いた。手紙は相手を初心者と見做して、作図の順序（積み上げの順序）のほうが適切と考えた、と思われる。作図という点において、関と共通である。

正十九角形の場合は、［７］にも例題として紹介されたように、途中で枝分かれするから、複雑である（次節で解説する）。私が正七角形や正十三角形のほうを重視するのは、理論構成において適切な例だと思うからである。それに対して、正十七角形

の根の組の系統図は直線的であって、余りに単純であり、興味に乏しい。

Ω（16 項周期が 1 個）—— (8 項周期が 2 個) —— (4 項周期が 4 個)
—— (2 項周期が 8 個) —— (1 項周期が 16 個)

§２１．正十九角形

ガウスは［７］整数論、第７章「円の分割を定める方程式」の多くの「条」において、例題として正十九角形（円の１９分体）の詳細な計算を示した。幸いに高瀬氏の翻訳によって、それを一々辿ることが出来る。さらに私はガウスによる計算に加えて、彼が扱わなかった「二つの９次方程式への分割の研究」を追加する。

まず、ガウスによる基礎の数表（353 条）に、３行目を補って示す。

e	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2^e	1	2	4	8	16	13	7	14	9	18	17	15	11	3	6	12	5	10
$7\cdot 2^e$	7	14	9	18	17	15	11	3	6	12	5	10	1	2	4	8	16	13

さてガウスは 19 分体の根　$r^n=\cos n\phi+i\sin n\phi$　を$[n]$と表す代わりに、もう少し一般化した $r^{7n}=\cos 7n\phi+i\sin 7n\phi$　を［n］と表す。つまり三行目の値をもつ根の値を、倍数 7 を除外した二行目の値で表す。原典を読む際、この点の認識が不十分だと混乱が生じる。 私は本稿では、さらにブラケットの使用を避けて、例えば $r^{7*8}=\cos 7\cdot 8\phi+i\sin 7\cdot 8\phi$　をガウスの[8] の代わりに ⑧ で表すことにする。三行目の値を指すのに、二行目の値で指定する所に無理がある。数値では例えば、⑧$=\cos 18\phi+i\sin 18\phi=0.94581\cdots-i\cdot 0.32469\cdots$　となる。(ガウスの主張に沿う二行目と三行目の対応が、第７章の理解を妨げる原因の一つだ、と私は考える。)

さてガウスは出発点の、１８次方程式

(＊1)　$X=x^{18}+x^{17}+\cdots\cdots+xx+x+1=0$

を解くため、３つの６項周期 a_1=①+⑧+⑦+⑱+⑪+⑫$=-1.22187\,61622\,6$, a_2=②+⑯+⑭+⑰+③+⑤$=2.50701\,86440\,9$，　a_3= ④+⑬+⑨+⑮+⑥+⑩ $=-2.28514\,24818\,2$　を作った。各 a は、３次方程式

(＊2)　　$a^3+aa-6a-7=0$

を満たす(各数値解は上記のように実数である)。a_1 を３つの２項周期 b_1=①+⑱, b_2=⑦+⑫, b_3=⑧+⑪　の和と考えれば、各 b は、３次方程式

(＊3)　　$b^3-a_1\cdot bb+(a_1+a_3)b-(a_2+2)=0$

を数値的に解いて、$b_1=-1.35456\,31432\,5$　と求まる。最後に２次方程式

(＊4)　$ee+b_1\cdot e+1=0$

を数値的に解いて、−0.67728 15716 29±i・0.73572 39106 75 を得る。複号のうち ＋ の根が ① を表し、− の根が ⑱ を表す。

ガウスによって次々になされた分解の仕方、分解の《系統図》、および各根の詳細な値は、［7］の 353 条を参照されたい。以上がガウスの研究である。

私は、ガウスが実行しなかった《もう一つの連鎖的な分解》を試みた。出発点は、先と同じく１８次方程式（＊1）であり、これを２つの９項周期

c_1 ＝⑦＋⑨＋⑰＋⑪＋⑥＋⑤＋①＋④＋⑯＝ $(-1+\sqrt{-19})/2$,

c_2 ＝②＋⑧＋⑮＋③＋⑫＋⑩＋⑭＋⑱＋⑬＝ $(-1-\sqrt{-19})/2$,

に分けた。c_1 と c_2 は、２次方程式

(＊5)　$cc+c+5=0$

を満たすので、この方程式を解いて c_1 と c_2 の値をそれぞれ右に書いた。

次に、c_1 と c_2 をそれぞれ a との交わりで三分割して、６つの３項周期

$c_1\cap a_1=d_1$ ＝①＋⑦＋⑪＝−0.61093 80811 32＋i・0.58447 59868 44

$c_1\cap a_2=d_2$ ＝⑤＋⑯＋⑰＝　1.25350 93220 5　−i・0.45479 46979 43

$c_1\cap a_3=d_3$ ＝④＋⑥＋⑨＝−1.14257 12409 2　＋i・2.04976 81828 7

$c_2\cap a_1=d_4$ ＝⑧＋⑫＋⑱＝−0.61093 80811 32−i・0.58447 59868 44

$c_2\cap a_2=d_5$ ＝②＋③＋⑭＝　1.25350 93220 5　＋i・0.45479 46979 43

$c_2\cap a_3=d_6$ ＝⑩＋⑬＋⑮＝−1.14257 12409 2　−i・2.04976 81828 7

を作る。ここで c_1 を分割して作った d_1，d_2，d_3 は、３次方程式

(＊6)　$d^3-c_1\cdot dd+(c_1-1)d-(c_1+2)=0$

を満たす。d^2 の係数 c_1 は $d_1+d_2+d_3$ から、d の係数(c_1-1)は $d_1\cdot d_2+d_1\cdot d_3+d_2\cdot d_3=(1/2)(d_1+d_2+d_3)^2-(1/2)(d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2)$ から得られる。定数項 (c_1+2) は $d_1\cdot d_2\cdot d_3$ から得られる。同様にして、d_4，d_5，d_6 は２次方程式

(＊7)　$d^3-c_2\cdot dd+(c_2-1)d-(c_2+2)=0$

を満たす。計算は、本節初めに述べた　⑧＝r^{7*8}　などの値を用いて計算した。

私は方程式（＊6）,(＊7）を構成する根の値を知っているから算出できたのであり、はなから虚係数の３次方程式を解くことは、実用には適さない。ガウスも３次方程式の「カルダノの公式」を、彼所有の[15] ランベルトの「数表への補足」の巻末の白紙に記入した。しかし、根号や単位の虚立方根の這入った複雑な公式を、実際に用いたことはなく、§18 に紹介したような数値計算を行ない、特に本稿で紹介したような

円周等分に関わる特別な虚数が這入り込む計算においては、§14 に示した正弦・余弦の式を用いている。

私はヒューレット・パッカード社製の関数電卓を用いて計算している。それは虚数も正弦・余弦も自由に使えるので、計算には重宝している。

<u>根の組の系統図</u>は次の通り。系統図の構造は、正十三角形の場合によく似ている。

Ω（18 項周期が 1 個）——	a（6 項周期が 3 個）——	b（2 項周期が 9 個）
|	|	|
c（9 項周期が 2 個）——	d（3 項周期が 6 個）——	e（1 項周期が 18 個）

［補足］ n 乗根の求め方（二段階方式）

［16］長田直樹氏より、私の所謂「二段階方式」は、彗星で有名なE．ハレーの論文(1694) が初出である、と伺った。そこでは、$(a^n+b)^{1/n}$ の近似値が二段階方式で

(＊1)　$(a^n+b)^{1/n}=a+a\,b/[n\,a^n+(1/2)(n-1)\,b]$

の形で得られた、とのことである。[16] を参照。

私は、式（＊1）は、微分法なしに二項定理だけで得られることを確かめた。

実は、[11] の著者ライステ自身が、[11] 102-103 頁の本文で、c の n 乗根 $c^{1/n}$ を、近似値 x と誤差 t を用いて、次にように導いている。先ず

(＊2)　$c=(x+t)^n=x^n+(n/1)x^{n-1}t+[n(n-1)/(1\cdot 2)]\,x^{n-2}t^2+\cdots$

と置き、初めは $t^2=0$ とし、$t=(c-x^n)/nx^{n-1}$ を求め、次いで $t^3=0$ と置き、式(＊2) の右辺の t^2 のうち<u>片方の t </u>にこれを代入し、右辺を t で括って整理すれば、$c-x^n=t\cdot[(n+1)\,x^n+(n-1)c]/2\,x$, よって $t=2\,x(c-x^n)/[(n+1)\,x^n+(n-1)c]$

(＊3)　$c^{1/n}=x+2\,x(c-x^n)/[(n+1)\,x^n+(n-1)\,c]$

を得る。このライステの「t^2 のうち<u>片方の t </u>に得られた t を代入する」という<u>技巧</u>を、ハレーの例題に応用しよう。まず誤差 t を用いて

(＊4)　$(a^n+b)^{1/n}=a+t$

と置き、

(＊5)　$a^n+b=(a+t)^n=a^n+n\,a^{n-1}t+[n(n-1)/(1\cdot 2)]\,a^{n-2}t^2+\cdots$

と展開、<u>一次近似</u>は $t^2=0$ と置き $a^n+b=a^n+n\,a^{n-1}t$ から $t=b/n\,a^{n-1}$ を導き、

(＊6)　$(a^n+b)^{1/n}=a+b/n\,a^{n-1}$

を得る。<u>二次近似</u>のためには $t^3=0$ と仮定して、上の級数(＊5)の三項目の t^2 のう

ち片方の t に $t=b/na^{n-1}$ を代入して整理すれば、

$a^n+b=a^n+na^{n-1}t+[n(n-1)/2]a^{n-2}t\cdot b/na^{n-1}=a^n+na^{n-1}t+[(n-1)/2]tb$,

そこで $b=t[na^{n-1}+(1/2)(n-1)b/a]$, $ab=t[na^n+(1/2)(n-1)b]$, よって

$$(*1)\qquad (a^n+b)^{1/n}=a+ab/[na^n+(1/2)(n-1)b]$$

を得る。すなわち微分法を用いず、二項定理だけで（＊1）が導かれた。

§18 のガウスの場合、どこから「二段階方式」を入手したのか不明である。なお、§18 で述べたように、一般の方程式の場合は、微分法が必要になる。

［付記］　遥か昔、XVIIIth International congress of history of science, 1st-9th August 1989, Hamburg-Munich. で、'A comparison of the construction of regular polygons by Seki and Gauss' の表題のもと、今回と同じ主題で、遥かに未熟な内容を研究報告した。今回、二年に亘り、充実した内容が発表できて、念願が果たせた。

文　献　　　（前回の文献表の再録は略す）

［7］C. F. Gauss : Disquisitiones arithmeticae, Gerh. Fleischer, Lipsiae, 1801.
　高瀬正仁訳、ガウスの整数論、朝倉書店、1995.

［8］W. K.Bühler : Gauss, A biographical study, Springer-Verlag, 1981.

［9］G. B. Mathews : Theory of numbers, Chelsea, 2nd ed, 1962.

［10］高木貞治：近世数学史談、岩波文庫、1995.

［11］Ch. Leiste : Die Arithmetik und algebra, zum Gebrauch bei dem Unterrichte, Wolfenbüttel, 1790.

［12］ライステ記入（ガウスによる［11］の白頁への書き込み）

［13］L. Euler : Introductio in analysyn infinitorum, Lausannae, 1748.
　高瀬正仁訳、オイラーの無限解析、海鳴社、2001.

［14］J. C. Schulze : Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer Tafeln, Auguste Mylius, Berlin, 1778.　I Band, Tafel der Logarimen,　II Band, Tafel der Sinus, Tangenten,Secanten.

［15］J. H. Lambert : Zusätze zu dem Logarithmischen und Trigonometrischen Tabellen, Berlin, 1770.

［16］長田直樹：お話し、数値解析(11)、「理系への数学」、2009 年 4 月号、77 頁。

（2009 年 10 月 18 日）