関孝和の交式、斜乗

竹之内　脩

表の形に数を配列したものは、古く中国にはじまる。そして、江戸時代、關孝和により壮大な理論が展開された。西欧の数学でこの形のものが登場するのは 17 世紀末である。

1　九章算術から

劉徽『九章算術』(263)　巻第八　方程　18 問

【1】　今、上禾 3 秉、中秉 2 束、下秉 1 束では、実は 39 斗、
上禾 2 秉、中禾 3 秉、下禾 1 秉では、実は 34 斗、
上禾 1 秉、中禾 2 秉、下禾 3 秉では、実は 26 斗、
である。

問う、上中下の粟の 1 秉の実は、それぞれいくらか。

術

上禾 3 秉、中秉 2 束、下秉 1 束、実 39 斗を右方に置き、中、左禾、右方の如く列す。右行上禾中行に遍く乗じ、以って直ちに除す。…

これは、次のように配列し、計算することを言っている。

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

→

1	6	3
2	9	2
3	3	1
26	102	39

→

1	0	3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

そして、最終的に次の式を導く。

0	0	36
0	34	0
36	0	0
99	153	333

ここでは、表およびその変形については、文章で述べられていて、表の形にはされていない。

2　四元玉鑑から

『四元玉鑑』(1303)　巻下之三　方程正負　8 問

ここでは、表が与えられている。

【1】　今、糸 273 両で、錦 7 匹、綾(りょう) 1 匹を織る。

又、糸 247 両で、綾 8 匹、紬 1 匹を織る。

又、糸 242 両で、紬 9 匹、錦 1 匹を織る。

1	0	7	錦
0	8	1	綾
9	1	0	紬
242	247	273	糸

錦の匹長を自乗し、綾の匹長を引いて余りを自乗し、紬の匹長を加えたものが、358,829 尺である。綾の匹長は紬の匹長に 2 尺及ばず、卻(かえ)って錦の匹長より 1 尺多いとき、3 色の用糸、及び匹長は、各いくらか。

答　錦 2 丈 5 尺　　糸 35 両

綾 2 丈 6 尺　　糸 28 両

紬 2 丈 8 尺　　糸 23 両

術　方程正負の術を立て、之に、3 色毎匹用糸の数を入れる。

天元の一を立てて錦の匹長と為す。如積、之を求め、

358,825	益実
3	従方
1	益上廉
2	益下廉
1	正隅

三乗方、之を開いて、錦の匹長を得る。

又、天元の一を立てて、　……

問に合う。

程大位『算法統宗』(1592)　巻之十一　方程第八章 9 問

【3】　今、硯 3 箇、墨 5 匣 (はこ)、筆 9 枝で、共の値 8 錢 1 分、

又、硯 4 箇、墨 6 匣、筆 7 枝で、共の値 8 錢 9 分、

又、硯 5 箇、墨 7 匣、筆 8 枝で、共の値 1 両 0 6 分　である。

硯、墨、筆は、それぞれいくらか。

答　硯毎箇 8 分、　墨毎匣 6 分、　筆毎枝 3 分。

術　所問の数を列する。

先ず右行硯 3 を以って法となし、左中 2 行に遍く乗じ、数を得る。却って中行硯 4 を以って右行墨、筆に遍く乗じ、得る数、墨 20、筆 36、値 3 両 2 錢 4 分。

中行と対にして減じ、余り、墨 2、筆 15、値 5 錢 7 分、

右の位に、另 (別に) 列する。

又、左行硯 5 を以って法となし、右行墨、筆に遍く乗じ、得る数、墨 25、筆 45、値 4 両 0 5 分、

左行と対にして減じ、余り、墨 4、筆 21、値 8 錢 7 分、

左の位に、另列する。

左	中	右
硯 5 得 15	硯 4 得 12	硯 3 法となして 左、中に乗
墨 7 得 21	墨 6 得 18	墨 5 得 20
筆 8 得 24	筆 7 得 21	筆 9 得 36
値 1 両 0 6 分 得 3 両 1 錢 8 分	値 8 錢 9 分 得 2 両 6 錢 7 分	値 8 錢 1 分 得 3 両 2 錢 4 分

再び、減余を列し、左右の位の数を分ける。

右行墨 2 を以って法となし、遍く左行筆、價に乗じて得る数、左位に列す。

復た、左行墨 4 を以って法となし、遍く右行筆、價に乗じて得る数、右位に列す。

却って、左右を対にして減じ、墨尽きる。余り筆 18 枝を得る。法となす。又余價に得たる数を相減じて、余り 5 錢 4 分。実となす。実を法で割って、筆價毎枝 3 分を得る。

左	右
墨 4	墨 2
筆 21 得 42	筆 15 得 60
値 8 錢 7 分 得 1 両 7 錢 4 分	値 5 錢 7 分 得 2 両 2 錢 8 分

3　解伏題之法

関は、この解伏題之法において、多元の方程式の議論をしている。

天和癸亥重陽日重訂書　…………………………………　天和癸亥は 1683 年

真虚第一

両式第二

定乗第三

換式第四

生剋第五

寄消第六

4　生剋第五

(a)　3 次の場合

三式	二式	一式
壬	己	丙
辛	戊	乙
庚	丁	甲

相壬 乘乙 丁 **生**	相己 乘辛 甲 **生**	相丙 乘戊 庚 **生**
○	○	○
三 辛丁乙	二 辛戊甲	一 庚戊乙
六 庚丁乙	五 辛丁甲	四 庚戊甲

相壬 乘戊 甲 **剋**	相己 乘乙 庚 **剋**	相丙 乘辛 丁 **剋**
○	○	○
二 辛戊甲	一 庚戊乙	三 辛丁乙
四 庚戊甲	六 庚丁乙	五 辛丁甲

これが、関による行列式の定義である。すなわち、2 次式 3 個から、天元の未知数を消去した式が、下のものである。

何も説明がないので、どうやってこれを出してきたのかよくわからない。

(c)　4 次の場合

データの図を与える。

四式	三式	二式	一式
婁	危	斗	房
奎	虚	箕	低
壁	女	尾	亢
室	牛	心	角

ここに記された漢字は二十八宿といわれるもので、星座を表すものである。

三次の場合と同様の消去した表

相尾婁 乗角虚 生	相亢危 乗室箕 尅	相壁斗 乗牛 [底] 生	相女房 乗心奎 尅
○	○	○	○
二十四 奎虚尾角	二十三 室虚箕亢	二十二 壁牛箕 [底]	二十一 奎女心 [底]
六 壁虚尾角	五 室女箕亢	八 壁牛尾 [底]	七 奎女心亢
二十八 室虚尾角	二十七 室牛箕亢	二十六 壁牛心 [底]	二十五 奎女心角

相尾婁 乗牛 [底] 尅	相亢危 乗心奎 生	相壁斗 乗角虚 尅	相女房 乗室箕 生
○	○	○	○
四 奎牛尾 [底]	三 奎虚心亢	二 壁虚箕角	一 室女箕 [底]
八 壁牛尾 [底]	七 奎女心亢	六 壁虚尾角	五 室女箕亢
十二 室牛尾 [底]	十一 奎牛心亢	十 壁虚心角	九 室女箕角

相女婁 乗角箕 尅	相尾危 乗室 [底] 生	相亢斗 乗牛奎 尅	相壁房 乗心虚 生
○	○	○	○
三十二 奎女箕角	三十一 室虚尾 [底]	三十 奎牛箕亢	二十九 壁虚心 [底]
十五 壁女箕角	十四 室女尾 [底]	十三 奎牛尾亢	十六 壁虚心亢
九 室女箕角	十二 室牛尾 [底]	十一 奎牛心亢	十 壁虚心角

相亢婁 乗心虚 尅	相壁危 乗角箕 生	相女斗 乗室 [底] 尅	相尾房 乗牛奎 生
○	○	○	○
三 奎虚心亢	二 壁虚箕角	一 室女箕 [底]	四 奎牛尾 [底]
十六 壁虚心亢	十五 壁女箕角	十四 室女尾 [底]	十三 奎牛尾亢
二十 室虚心亢	十九 壁牛箕角	十八 室女心 [底]	十七 奎牛尾角

相女婁 乗心 [底] 生	相尾危 乗角奎 尅	相亢斗 乗室虚 生	相壁房 乗牛箕 尅
○	○	○	○
二十一 奎女心 [底]	二十四 奎虚尾角	二十三 室虚箕亢	二十二 壁牛箕 [底]
三十六 壁女心 [底]	三十五 奎女尾角	三十四 室虚尾亢	三十三 壁牛箕亢
十八 室女心 [底]	十七 奎牛尾角	二十 室虚心亢	十九 壁牛箕角

相亢婁 乗牛箕 生	相壁危 乗心 [底] 尅	相女斗 乗角奎 生	相尾房 乗室虚 尅
○	○	○	○
三十 奎牛箕亢	二十九 壁虚心 [底]	三十二 奎女箕角	三十一 室虚尾 [底]
三十三 壁牛箕亢	三十六 壁女心 [底]	三十五 奎女尾角	三十四 室虚尾亢
二十七 室牛箕亢	二十六 壁牛心 [底]	二十五 奎女心角	二十八 室虚尾角

5　交式、斜乗

この表にしたがって各項を掛け、生尅をつけて加えるのだが、掛ける数が多くて見やすくないから、次の交式、斜乗の方式を使う、といって、次のやり方を示す。

交式

換三式より換四式を起こし、換四式より換五式を起こし、逐って此の如くす。〇順逆共に逓めて一を添えて、次を得る。乃ち、式数奇なるものは皆順、偶なるものは順逆相交わる也。

このように述べて、次の表を挙げている。

換三式

順	順	順
三	二	一

換四式

逆	順	逆	順
四	三	二	一
二	四	三	一
三	二	四	一

換五式

五	四	三	二	一
四	五	二	三	一
三	二	五	四	一
二	三	四	五	一
三	五	四	二	一
五	三	二	四	一
四	二	三	五	一
二	四	五	三	一
四	三	五	二	一
二	四	二	五	一
五	二	四	三	一
二	五	三	四	一

n 次の行列式の中には、$n!$ 個の項がなくてはならない。

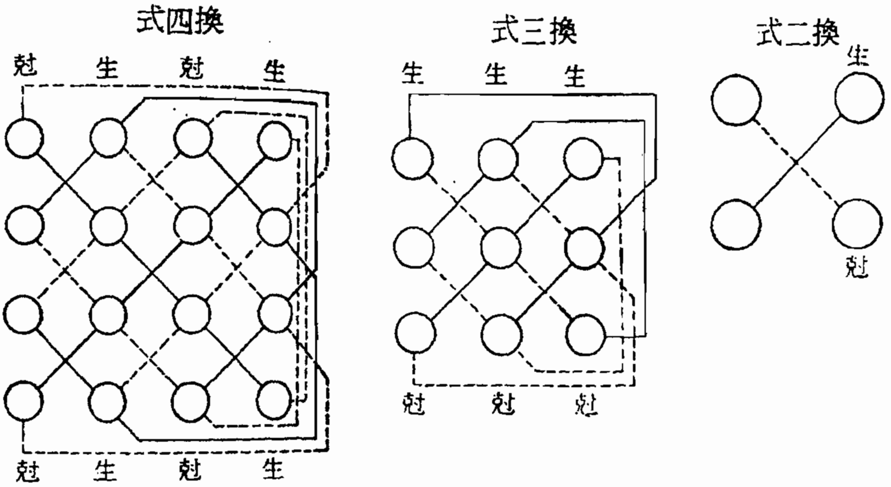
ところで、下の斜乗という方法でやると、

2 次 … 2 項、3 次 … 6 項、4 次 … 8 項、

5 次 … 10 項

しかでてこない。これでは、2 次、3 次の場合はよいが、それ以上になると、項の数を多くする工夫をしなくてはならない。その方法が、ここに述べられている。ただ残念なことに、5 次の場合には誤りがある。(敢えて、掲載しない)

斜乗　下にあげた式図で、線で結んだ項の積を作り、実線のところにはプラス、点線のところにはマイナスの符号をつける。(われわれが今使っているのと、左右反対になる)



3 次の場合は、いわゆるサラスの方法とよばれるものである。サラスは 19 世紀の人で、この方法が、このように早くに開発されていたことは、誇りとしてよい。

一番最後に、次のことが書いてある。

今まで第一から第六まで述べたことは、伏題を解する法である。一、二の例を挙げて、説明したが、書は言を尽くさない。学習する者は、すべからく、自分で考えて、はっきりと会得すべきものである。

関がこの書でしていることは、この章のはじめに書いておいたように、多元の方程式から元 (変数) を消去することであって、普通に扱われているような、連立 1 次方程式の議論ではない。

この関の議論は、西欧における行列式の議論でも、その出発点になったものであった。Cramer の議論、Bezout の議論はその発端をなすもので、いわゆる '終結式' の議論と呼ばれるものである。これらは、18 世紀後半になされている。

西欧数学の場合には、これから大発展していくのであるが、関の議論は、これをもとにした発展はないのが残念なところである。交式斜乗の計算は、次数が高くなると、たいへんなことになる。6 次、7 次までの計算はなされている。

6　田中由真『算学紛解』

田中由真 (1651 ～ 1719) は、その著『算学紛解』において、「雙式定格術」で、次のような方法を述べている。

まず、前後飯除式之格として、次の方式を与える。

㊂|実	㊀|実
㊃|方	㊁|方
前式	後式

前式、後式ともに飯除式の時は、互いに斜乗して相消、適当を得る。
前式の㊀は、㊁による何某なり。
㊃を乗じては、㊁により㊃による何某なり。
正として、左に寄せる。
後式の㊂は、㊃による何某なり。
㊁を乗じては、又、㊁により㊃による何某なり。
負として、相消数を得る。

是両式寄消の発端にして、たとえば幾乗の式にても、皆此の理を推察し、定格を得べし。

そして、次の前後平方式之格においては、前式、後式ともに 2 次の式を与えて、それから消去を適当に行って、次の陰陽率を作る。

寅	丑	子
辰	卯	巳
午	申	未

陰率

		子
未	辰	
申	巳	

子辰申 相乗 同名　陽率
子巳未 相乗 異名　陰率

そして、これから、

午	卯	
		丑
申	巳	

丑巳午 相乗 同名　陽率
丑卯申 相乗 異名　陰率

寅	丑	子
卯	巳	辰
未	午	申

陽率

午	卯	
未	辰	
		寅

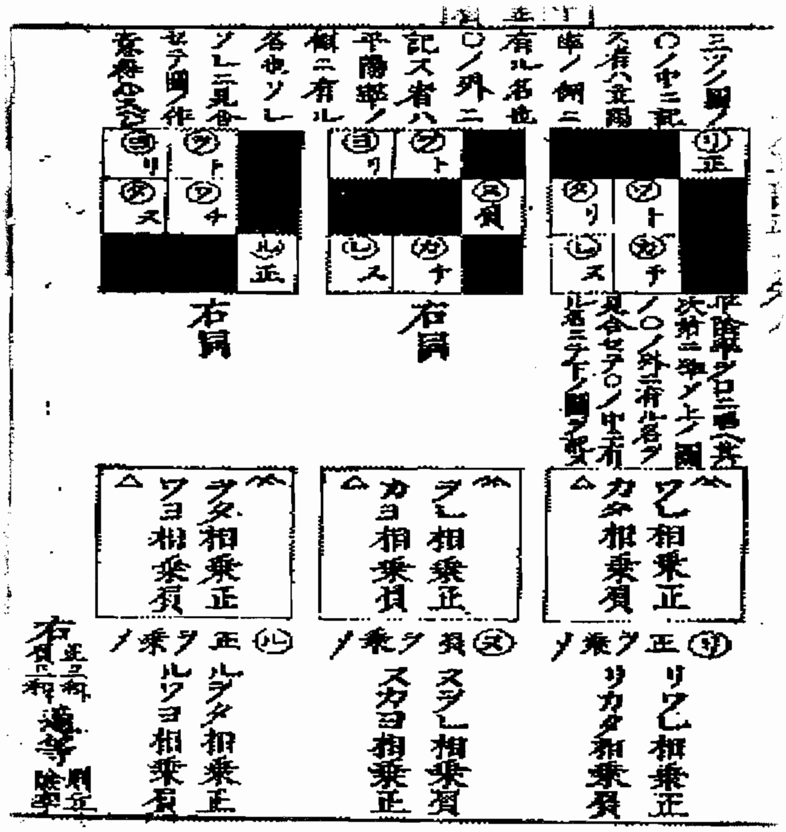
寅卯未 相乗 同名　陽率
寅申午 相乗 異名　陰率

この後、さらに前後立方式之格、前後三乗式之格、・・・と続けている。

7　井関知辰『算法発揮』

(1690)

井関知辰は、行列式を、小行列式を用いて計算する方法を述べ、また、行列式を利用して問題を解決する方法について述べている。



この後、前後三乗方式之格、前後四乗方式之格が同じように、詳細に述べられ、前後五乗方式之格については、小行列式展開の形だけが示され、「前後六乗式以上は、之を略す。前の例に準じて、推して知るべし。」とある。

8　關孝和、建部賢明、建部賢弘『大成算経 巻之一七』

『大成算経 巻之一七』(1711) において、「全題解」、「見題解」、「隠全題解」が簡単に述べられた後、「伏題篇」　が述べられ、ここに再び行列式の形式が登場する。

例えば、両式各立方とする。

三式	二式	一式
壬	巳	丙
辛	戊	乙
庚	丁	甲

一式を以って主となし、その余、各実壬巳を脱し、$\begin{array}{|c|c|}\hline ○ & ○ \\ \hline 辛 & 戊 \\ \hline 庚 & 丁 \\ \hline\end{array}$　平方交乗法に拠り、

戊庚相乗 $\begin{array}{|c|}\hline 戊 \\ 庚 \\ \hline\end{array}$、丁辛相乗 $\begin{array}{|c|}\hline 丁 \\ 辛 \\ \hline\end{array}$ 却って主式実丙を乗じ、$\begin{array}{|c|}\hline 丙 \\ 戊 \\ 庚 \\ \hline\end{array}$ 加、$\begin{array}{|c|}\hline 丙 \\ 丁 \\ 辛 \\ \hline\end{array}$ 減を得る。

次に余式、各方辛戊を脱し、$\begin{array}{|c|c|}\hline 壬 & 巳 \\ \hline ○ & ○ \\ \hline 庚 & 丁 \\ \hline\end{array}$　巳庚相乗 $\begin{array}{|c|}\hline 巳 \\ 庚 \\ \hline\end{array}$、丁壬相乗 $\begin{array}{|c|}\hline 丁 \\ 壬 \\ \hline\end{array}$ 却って主式方乙を乗じ、$\begin{array}{|c|}\hline 乙 \\ 巳 \\ 庚 \\ \hline\end{array}$ 加、$\begin{array}{|c|}\hline 乙 \\ 丁 \\ 壬 \\ \hline\end{array}$ 減を得る。

復、余式、各廉庚丁を脱し、$\begin{array}{|c|c|}\hline 壬 & 巳 \\ \hline 辛 & 戊 \\ \hline ○ & ○ \\ \hline\end{array}$　巳辛相乗 $\begin{array}{|c|}\hline 巳 \\ 辛 \\ \hline\end{array}$、戊壬相乗 $\begin{array}{|c|}\hline 戊 \\ 壬 \\ \hline\end{array}$ 却って主式廉甲を乗じ、$\begin{array}{|c|}\hline 甲 \\ 巳 \\ 辛 \\ \hline\end{array}$ 加、$\begin{array}{|c|}\hline 甲 \\ 戊 \\ 壬 \\ \hline\end{array}$ 減を得る。

	<u>立方交乗</u>		
甲巳辛	加	乙丁壬	丙戊庚
甲戊壬	減	乙巳庚	丙丁辛

このあと、同様にして、<u>三乗方交乗法</u>、<u>四乗方交乗法</u>が作られている。

9　關孝和の交式、斜乗

[関の意図]

関の意図を忖度するに、関は、もとの式が何次のものであっても、5 節に述べた交式、斜乗の方式でやれば、結果を得ることができることを主張したかったのであろう。そして、5 次の場合には、ともかくも、このようにやればよい、とい方式はできた。そこで、これを 6 次の場合にやるとして、どのようにやればよいか。ところが、これがうまくいかないのである。6 次の場合の交式をどのように作ればよいのか。

関は、おそらく 5 次の場合のあやまりについては、気がついていたことであろう。そして、これを改良するためにあれやこれや考えているうちに、田中由実や井関知辰による小行列式展開の方法が発表されて、この方式ならば順次やっていけることがわかり、『大成算径』では、交式斜乗の方法を捨てて、小行列式展開の方法を採用したものと考えられる。

関の交式斜乗の方法については、その後、何人かの人が改良を試みているのであるが、関にしろ、その人たちにしろ、これによって何をしようとしていたのであろうか。

関がはじめに目指したように、変数の消去が目的であったのならば、はじめの符号のあやまりなどは当然気がついていなければならない。

そこで、単に、交式斜乗という形式的処理にだけ興味をもって、それを consistent な形で拡張しようと考えたと思われる。

行列式という見地では、理論の整合性が出てくるが、この和算における一連の業績では、そのような形の評価を与えることができない。

9.1　交式の作り方と符号

関は、4 次の場合の交式として、

1 2 3 4,　1 3 4 2,　1 4 2 3

を記した後、5 次の場合の交式として、12 個の

1 2 3 4 5,　1 3 2 5 4,　1 4 5 2 3,　1 5 4 3 2
1 2 4 5 3,　1 4 2 3 5,　1 5 3 2 4,　1 3 5 4 2
1 2 5 3 4,　1 5 2 4 3,　1 3 4 2 5,　1 4 3 5 2

をあげている。この左端のものは、4 次の場合のものから、「順逆共に逓めて一を添えて」として作られたとして、その右に並ぶものは、それぞれから派生してつくったものであるが、その作り方には発展性がなく、これを更に 6 次、7 次と続けていくためには、どのようにすればよいのか、方針がたたない。

これに対して、松永良弼は、

寺内良弼『解伏題交式斜乗之諺解』(1715)

において、

1 2 3 4 5 ⟶ 1 3 4 5 2 ⟶ 1 4 5 2 3 ⟶ 1 5 2 3 4

1 2 4 5 3 ⟶ 1 4 5 3 2 ⟶ 1 5 3 2 4 ⟶ 1 3 2 4 5

1 2 5 3 4 ⟶ 1 5 3 4 2 ⟶ 1 3 4 2 5 ⟶ 1 4 2 5 3

とすることを与えている。これは、2番目の数字を次々1番後ろに廻す、ということによって作っていくので、この方針でやれば、何次になっても、続けていくことができる。　いくつ後ろに廻すか。この場合は奇数個なので、+, −, +, − と符号を変えていけば、

+12345　−13452　+14523　−15234

+12453　−14532　+15324　−13245

+12534　−15342　+13425　−14253

が得られる。

9.2 斜乗の符号

このことについて、はじめて述べているのは、

菅野 元健『補遺解伏題正尅篇』(1798)

である。

彼は、

左斜乗について、次数が4の場合からはじめて、項の符号が、

$+-+-,\quad +++++,\quad +-+-+-,\quad +++++++,\quad \cdots$

右斜乗について、

$+-+-,\quad +++++,\quad -+-+-+,\quad -------,\quad \cdots$

となり、以下このパターンを繰り返すと述べている。

これについて、菅野はこれだけしか述べていないので、どのようにしてこのことを結論したのかわからない。

井関知辰の『算法発揮』(1690) はすでに知られていたことであるから、菅野は、これを敷衍していったことと考えられる。