フーリエとコーシー　初期の実解析の諸相

高瀬正仁
(九州大学, 日本オイラー研究所)

目次

1. はじめに

西村重人さんの長年にわたる努力が実り，フーリエの著作『熱の解析的理論』とコーシーの著作『解析教程』の翻訳が完成した．現在（平成 22 年 1 月），出版の準備も整い，刊行の日を待っているところである．

西村さんの翻訳作業の進展に伴って，この二冊の作品を熟読する機会に恵まれたが，そのおかげで実解析のはじまりのころの情景に目が開かれるようになった．ひとことで言えば，コーシーは実解析の枠を作り，フーリエは実解析の中味を提示したと言えるのではないかと思うが，この二人の数学者の背後には，オイラーという共通の人物の数学的思索が控えている．

オイラーの全集を俯瞰してあらためて気づくのは，オイラーの無限解析の世界には「連続関数」という概念は存在しないのではないかという一事である，これに連動して，解析学におけるコーシーの構想の真意の所在についても反省を迫られる，コーシーのねらいは解析学の厳密化にあったと言われることが多いが，実際の姿はそうではないのではないかと思う，オイラーはオイラーで十分に厳密であった，コーシーはオイラーの世界を厳密化したのではなく，関数概念を一般化し，オイラーに範例を求めてオイラーの世界を拡大したのである．

コーシーの解析学にはフーリエの熱の理論に見られるような動的なおもしろさはないが，さながら「曠野に杭を打つ」かのような力強さが充満している，本稿ではそのあたりの消息をいくぶん詳しく語りたいと思う．

2. 解析概論の系譜

昨年の数学史シンポジウムでは「解析概論の系譜」という題目で講演を行った．微積分のテキストの系譜というほどの意味だが，数学史上にはじめて出現したテキストはロピタルの著作『曲線の理解のための無限小解析』である．この作品は実はロピタルの創意によるものではなく，ヨハン・ベルヌーイに教えてもらったことを再現して成立したのであるから，いわば勉強ノートである．ヨハン・ベルヌーイ自身はバーゼル大学でも微積分の講義を行っているが，微分計算の講義録はロピタルの著作とそっくりである．

ヨハン・ベルヌーイの講義録よりも前の時点に立ち返ると，ライプニッツとベルヌーイ兄弟（ヨハンとヤコブ）との往復書簡が目に留まる．この往復書簡こそ微積分の揺籃と見るべきであり，微積分の本質を知るには本当はここを研究しなければならないところだが，きわめて困難な作業である．この往復書簡の源泉はライプニッツ自身の諸論文である．

ロピタル以降の解析概論の系譜をたどると，オイラーの「解析学三部作」が続き，その次にラグランジュの『解析関数の理論』，さらにその次の位置を占めるのがコーシーの『解析教程』である．コーシーにはコーシーに独自の解析概論の構想があったことはまちがいないが,『解析教程』の段階では微分も積分も語られていないことでもあり，これだけではまだコーシーの構想の全容はわからない．大著ではあるが，全体として序説と見るべき作品であり，コーシーの解析概論の本論を見るには続く著作『微積分要論』を参照しなければならない.『解析教程』が刊行されたのは 1821 年,『要論』の刊行は 1823 年．中間の 1822 年にはフーリエの『熱の解析的理論』が出版されている．

フーリエの作品には基礎理論の枠がなく，解析概論とは言えないが，実解析の枠の内部を満たすに足る「中味」がぎっしりと詰まっている．実に充実した作品である．これに対し，コーシーの『解析教程』と『要論』は微積分の「枠」を提供しているが,「中味」は見あたらない．関数概念の提示に始まり，極限の概念を基礎にして，その土台の上に「関数の微分」と「関数の積分」の理論が構築されていくが，その様相は今日の微積分のテキストと同じである．コーシー以降，ピカール，ダンジョア，グルサ等々，さまざまな人物の手で解析概論が書き継がれ，日本でも高木貞治の著作『解析概論』が出現したが，コーシーの『解析教程』と『要論』はコーシー以後のすべての微積分のテキストの範例として機能した．

3. コーシー以後のフーリエ解析

コーシーの「枠」とフーリエの「中味」のその後の状況に着目すると，1829 年と 1837 年のディリクレの論文が目に留まる．1829 年の論文は

「与えられた限界の間の任意の関数を表示するのに用いられる三角級数の収束について」(ディリクレ全集，巻 1，119-132 頁)，

1837 年の論文は

「まったく任意の関数の，正弦級数と余弦級数による表示について」(ディリクレ全集，巻 1，135-160 頁)

である，フーリエの著作のテーマは数学の視点から見ると熱伝導方程式の解法理論だが，根柢を形作る基礎理論が十分に整備されているとは言えず，しばしば不可解な議論に直面する，フーリエの心情に立ち返るなら厳密性は保持されていると思われるが（厳密ではない数学はありえない），心情を解き明かす言葉が与えられていないのである，基礎理論の整備というのは，関数，関数の連続性，関数の微分，関数の積分，無限級数の収束性などの諸概念を明快に提示し，連続性と微分積分の可能性との関係や，無限級数の収束性に関するいくつかの命題を確保しておくことを意味するが，これらはみなコーシーの微積分の領分である，他方，コーシーにあるのは基礎理論のみであり，基礎理論を適用して何かしら解明しようとする意志は見られない，これはこれでまったく不思議な情景で，理解しがたいが，コーシーはそのようなタイプの数学者だったのであろう，　ディリクレが上記の二論文において試みたのは，コーシーが構成した解析学の基礎理論を適用して，フーリエの熱伝導方程式論に具体的な数学の言葉を与えようとすることであった，この試みはリーマンの 1854 年の論文

「三角級数による関数の表示可能性について」(1990 年版の『リーマン全集』，227-271 頁)

に継承された，リーマンは数学的意図をディリクレと共有しているが，対象として設定される関数の範疇が異なっている．すなわち，ディリクレは連続関数の範囲内でフーリエ級数の収束性などを論じたのに対し，リーマンは守備範囲をもっと拡大して有界関数を考察したのである．これでフーリエ解析の根柢が確立された．

ディリクレとリーマンはコーシーが構成した基礎理論を武器にしてフーリエ解析の整備に取り組んだが，この歩みに伴ってコーシーの基礎理論そのものもまた変革を強いられた，このプロセスはしばしば「解析学の厳密化」と言われるが，コーシー以降，もっとも著しい事例を挙げるなら，デデキント，カントール，ヴァイエルシュトラスたちによる「実数の理論」の提示に着目しなければならないであろう．

コーシーの基礎理論は大きな枠としては非常に有効で，今もそのまま生きているほどである，だが，個々の具体的な場面においてコーシーはつねに正しかったわけではなく，コーシーの誤りを正すこともまた「解析学の厳密化」のプロセスにおける重要な局面である，この道筋に先鞭をつけたのはアーベ

ルであった．

コーシーは『解析教程』において連続関数を項にもつ無限級数を取り上げて，もしその級数が収束するならば，極限として認識される関数もまた連続なるという命題を提示し，証明さえ記述しているが，アーベルはここに疑問を抱き，1826 年の論文

「級数

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots$$

の研究」(アーベル全集，巻 1，219-250 頁)

において興味深い反例を提示した．それは

$$\frac{x}{2}=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots$$

という形の級数である．左辺の級数は $x=\pm n\pi(n=1,2,3,\cdots)$ において値 0 に収束し，それ以外の x に対しては $\frac{x}{2}$ に収束する．したがって極限関数には不連続点が無数に存在することになり，コーシーの命題は成り立たないことがわかる．アーベルはこのような例をフーリエ級数から採取したのだが，まさしくその点において尽きせぬ興味が感じられるのである．この一例だけを見ても，アーベルを今日の実解析の始祖と呼ぶのに相応しい．

4. 解析学の厳密化をめぐって

コーシー以前の解析学というとオイラーやラグランジュの名前が念頭に浮かぶところだが，コーシー以前は厳密生に寄せる関心が気迫だったと，しばしば耳にするところである．コーシー以降の解析学の歩みを概観すると，厳密化という言葉はたしかにぴったりあてはまりそうに思う．だが，コーシーの解析学それ自体については厳密化という評価は相応しくないのではないかと思う．オイラーやラグランジュの解析学は別段，曖昧でもなければ厳密生を欠いていたわけでもないし，コーシーの数学的意図もまたオイラーやラグランジュの厳密化にあったわけでもない．コーシーはまったく別の状勢をめざしていたのである．

このあたりのことを思索するために著しい一事実を提示したいと思う．それは,「オイラーには連続関数の概念がなかった」という一事である．

オイラーの解析学には連続関数という言葉は見られない．オイラーの全集を構成するすべての巻を渉猟するまでにいたらないため，今のところはまだ確定的な事実とまでは言えないが，少なくとも第一シリーズの全 29 巻，30 冊の中には見あたらない．また，オイラーが提示した関数概念は三種類まで数えられるが，微分計算や積分計算の対象になりえたのは解析的表示式とい

う関数のみである．しかもオイラーの解析学は全体的に依然として「変化量の世界」にとどまっていて，解析的表示式としての関数もまた変化量の一種として認識されているのである．

与えられた変化量と定量をもとにして解析的表示式を組み立てると新しい変化量が構成される．オイラーはそれを関数と呼び，その微分の計算を遂行した．関数の守備範囲が解析的表示式にとどまる限り，微分計算は個々の解析的表示式の形に応じて遂行されるのであり，連続性という一般的な観念を持ち出す必要はないのである．ただし，オイラーには「連続曲線」の概念は存在する．オイラーのいう連続曲線とは「解析的表示式のグラフとして認識される曲線」を指すが，そのような曲線に「連続的」という形容句を冠したオイラーの心情を忖度すると，オイラーの心には何かしら連続性の名に相応しい観念が生きていたのではないかという想像に誘われるのである．コーシーはそこに着目したのであろう．

コーシーの微積分の対象は関数であり，コーシーは関数を微分し，関数を積分する．すなわち，一番はじめに関数概念が提示され，次に連続関数の概念，関数の微分可能性，関数の積分可能性の定義が次々と与えられていくが，全体の土台になっているのは連続関数の概念である．では，コーシーは連続性の概念をどこから汲んだのであろうか．

コーシーが微積分の対象として設定した関数は単なる解析的表示式ではなく，複数個の変化量の相互依存関係を通じて認識されるものであり，はるかに高い一般性を備えている．それはオイラーが提案したものではあるが，オイラーはそのような関数の微分や積分の概念に言葉を与えるところまでは進まなかった．ところがコーシーはこの論点に踏み込んでいった．x と y は二つの変化量とし，y は x の連続関数とする．y が x の解析的表示式であれば，オイラーは y の微分 dy を計算する方法を知っていて，

$$dy = Adx$$

という微分等式（微分方程式）を導くことができた．ここで A は微分係数と呼ばれる量である．この計算の手順を教えるのが微分計算であり，オイラーはこれを数学の師匠のヨハン・ベルヌーイから継承したのである．

関数の世界が解析的表示式のみで充満しているのであれば微分も積分も自在であり，そこはさながら桃源郷のような世界である．解析的表示式の性質はことごとくみな式そのものに内包されていて，式の形を見れば一目瞭然であり，ことさらに連続性を語る必要はない．だが，フーリエの理論があからさまに示し，オイラー自身も早い時期からすでに察知していたように，解析学はいつまでも解析的表示式の世界に留まることはできず，解析的表示式を越えて関数の世界を拡大していかなければならなかった．それなら，解析的表示式よりもはるかに一般的な関数を対象にするとき，そのような関数の微分や積分をどのように考えればよいのであろうか．

オイラーは解析的表示式のほかになお二種類の関数概念を提示し，そのような関数 $y = f(x)$ についても微分係数 A が存在しうる場合があることを，少なくとも観念的には承知していた．微分係数 A が存在する場合，それはどこまでも二つの微分 dx と dy の比であるほかはないが，解析的表示式ではない関数の場合，この比を計算する手段は存在しない．ところが，この場面に直面してコーシーが選択したのは，微分係数 A そのものを直接定義する道筋であった．コーシーは極限の概念を基礎としてこれを遂行した．その様相は200年後の今日の微積分に見られる通りである．

微分と積分の前にコーシーは「関数の連続性」の概念を規定し，連続関数の範疇で微積分を展開した．コーシーが提案した関数の微分可能性と積分可能性は，定義そのものを見る限り連続関数に限定されるわけではないが，微分可能性はおのずと連続性を誘発する．また，コーシー自身が試みたように（後日，論証にやや不十分な点があることが指摘されたが）連続関数は積分可能であるという簡明な事実が証明されて，積分の理論の土台が構築される．このような状勢を見通したうえで，コーシーは関数の範疇を連続関数に限定したのであろう．

5. 関数の連続性をめぐって

コーシーは拡大された関数の世界に置ける微積分という，オイラーが予感した道の領域へと大きく踏み出していった．その際，コーシーが登攀の足場にしたのが連続性の概念であった．

関数の概念を拡大する必要に迫られて，解析的表示式を離れて抽象的な関数を考察しなければならない事態に立ち至ったとき，正確に言えば，そのような事態に直面したことを自覚したとき，どこに，また何に手がかりを求めて登攀を試みなければならないのであろうか．コーシーはまちがいなくこの論点の重大さに気づいた「一番はじめの人」であり，まさしくここにおいてコーシーの数学者としての偉大さが認められるのである．コーシーの創意は，抽象的な関数を対象として連続性の概念を設定したところにすでに現れているが，コーシーはこの概念をオイラーが開いた解析的表示式の世界から取り出した．オイラーの桃源郷で自在に行われたあれこれの事柄の中から抽象的な概念を抽出し，それらの概念をいわば「曠野の杭」に見立てて，解明の足場にしようとしたのであり，山登りに例を求めるなら断崖絶壁にハーケンを打ち込むというような作業に相当する．

オイラーの解析学の世界は十分に厳密であったこと，コーシーが試みたのはオイラーの厳密化ではなかったことを，ここでもう一度，強調しておきたいと思う．

6. これからの微積分のテキストについて

このような状況を念頭に置いて解析概論のあるべき姿を思い浮かべると，コーシーの「枠」の中にフーリエを「中味」を配置して，フーリエ解析を中心に配置するのはよいアイデアと思う．フーリエ級数は今日の微積分のテキストでも取り上げられることはあるが,「枠」と「中味」が分離しているような印象は否めない．この場合のフーリエ解析というのはフーリエとディリクレ，それにリーマンの理論そのものを指している．

それともうひとつ，フーリエ解析とともに複素解析もまた微積分のテキストに取り入れて，二本の主柱を立てるのが望ましい．実解析と複素解析の発生の事情を顧みても，まずはじめに実解析ができあがり，それからおもむろに複素解析へと進んでいったというのではなく，複素解析の契機は微積分のはじまりの当初からすでに芽生えていたのである．さらにもうひとつ，フーリエ解析と複素解析に加えて変分法もまた興味が深いテーマである．変分法はベルヌーイ兄弟に端を発し，オイラーの手で歩みを始めたが，その足取りに伴ってオイラーの無限解析もまた大きく展開した．

オイラーの無限解析，ひいてはコーシーの微積分を理解する鍵は，フーリエ解析とともに変分法の中にひそんでいる．変分法の歴史的研究が進展し，微積分のテキストに取り入れることができるようになれば，今日の微積分のテキストはいっそう充実したものになるであろう．

平成 22 年 (2010 年)1 月 31 日