ガウス「天体運動論」について

植　村　栄　治　(大東文化大学)

2009年10月18日

1　ケレスの発見

イタリアの天文学者ピアッツィ(Giuseppe Piazzi. 1746-1826)は1801年1月1日に未知の星(8等星程度)を発見した．彼はこの星がかねてから天文学者たちの探索していた火星と木星の間にある惑星だと考え，ケレス(Ceres. 当初はCeres Ferdinandea)と命名した．その観測は，1801年1月1日から2月11日まで行われ，19回の観測データが得られた．その後，この星は観測網から消え，次にいつどこに現れるか全く分からなくなった．この新惑星の発見は世間の注目を浴び，ケレスを再発見できるかが世界的な関心の的となった．

ピアッツィの観測データはツァッハ(Franz Xaver von Zach. 1754-1832)が編集・発行していた月刊雑誌「地球及び天空に関する学問の発展のための月刊報告」(Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels- Kunde. 以下「月報」と略す)の1801年9月号に掲載された．以前から天文学に興味を持っていたガウス(Carl Friedrich Gauss. 1777-1855)は1801年9月にこの問題に取り組み始め，たちまちケレスの軌道計算に成功した(注1)．ガウスは自己の計算結果をツァッハに送り，ツァッハは月報の1801年12月号でそれを世に紹介した．

(注1) ガウスの数学日記には天文学の研究に関する記載がいくつかあるが，1801年9月中旬の第119項目では「天体の軌道要素を探求するための極めて簡明で迅速な新方法」と記され，また，同年10月の第121項目では「天文理論における有用な新公式を多数発見した」旨が記されている．Carl Frederich Gauss, *Werke*[以下「全集」と略記], Bd. X (1), 561-563, 1917 参照．

2　ガウスによるケレスの軌道計算

月報の1801年9月号に掲載された，ピアッツィによるケレスの観測結果は次の通りであった(注2)．

(注2) 1801年9月号の月報は参照できなかったが，12月号のツァッハの記事にはガウスの計算値とピアッツィの観測値との差異が示されているので，そこから後者を計算した．なお，12月号のツァッハの記事は，全集第6巻(1874年)199-204頁に収録されている．

観測日	地心経度	地心黄緯 (−)
1801 年 1 月 1 日	53°22′58″3	3° 6′42″1
1 月 2 日	53°19′44″3	3° 2′24″9
1 月 3 日	53°16′58″6	2°58′ 9″9
1 月 4 日	53°14′15″5	2°53′55″9
1 月 10 日	53° 7′59″1	2°29′ 0″6
1 月 13 日	53°10′37″6	2°16′59″7
1 月 14 日	53°12′ 1″2	2°12′56″7
1 月 19 日	53°25′59″2	1°53′38″2
1 月 21 日	53°34′21″3	1°46′ 6″0
1 月 22 日	53°39′ 1″8	1°42′28″1
1 月 23 日	53°44′15″7	1°38′52″1
1 月 28 日	54°15′15″7	1°21′ 6″9
1 月 30 日	54°29′59″0	1°14′16″0
1 月 31 日	54°38′ 7″3	1°10′54″6
2 月 1 日	54°46′19″3	1° 7′30″9
2 月 2 日	54°54′57″9	1° 4′10″5
2 月 5 日	55°22′43″4	0°54′28″9
2 月 8 日	55°53′29″5	0°45′ 5″0
2 月 11 日	56°26′40″0	0°36′ 2″9

1801 年 12 月号の月報のツァッハの記事によれば, ガウスは幾つかのデータを選んで計算を繰り返すが, 最終的には, 1 月 1 日, 1 月 21 日 及び 2 月 11 日 の 3 個のデータに基づいて, 次のようなケレスの軌道要素を算出した (括弧の中は現在の観測値).

遠日点 ··············	326°27′38″	(330°43′48″)
昇交点黄経 ········	81° 0′44″	(80°24′)
軌道傾斜角 ········	10°36′57″	(10°35′24″)
長軸半径の対数 ···	0.4420527	(0.44186)(長軸半径 ·· 2.766AU)
離心率 ··············	0.0825017	(0.079)
平均日々運動 ······	770″914	(771″34)(公転周期 4.60 年)

ガウスは, これらの軌道要素に基づき, 1801 年 11 月 25 日から 12 月 31 日までのケレスの 6 日おきの位置を次のように予想した (パレルモで観測する場合).

パレルモ時間の夜12時：	地心経度	地心黄緯(北緯)
1801年11月25日	5時間20分16秒	9°25′
12月 1日	5時間22分15秒	9°48′
7日	5時間24分7秒	10°12′
13日	5時間25分51秒	10°37′
19日	5時間27分27秒	11° 4′
25日	5時間28分53秒	11°32′
31日	6時間0分10秒 (注3)	12° 1′

(注3) この12月31日の経度は他の経度の値と飛び離れていて明らかにおかしい. ミスプリントその他の誤りあるいは基準時の30分変更等が考えられるが詳しいことは不明である.

3 ケレスの再発見とその結果

ツァッハは, 1801年12月7日に, ガウスが計算・予測した場所に星が観測されることを見出した. また, ドイツの著名な天文学者ハインリヒ・オルバース (Heinrich Wilhelm Matthäus Olbers. 1758-1840) も1801年12月31日にこの星の観測に成功し, これがケレスであることを確認した.

ツァッハは1802年2月の月報にこのニュースを掲載し, その中で自分及びオルバースの見解として, この再発見はガウスの功績に帰せられるべき旨を明言した (注4).

以上に至る経緯について, ガウス自身はその著書「天体運動論」の序言の中で次のように述べている (注5).

「1801年9月, 私はその時全く別の仕事に従事していたが, 上述の大きな問題の解決に役立つと思われる幾つかのアイデアが突然頭に浮かんだ. (中略) というのは, その頃, 1801年1月1日にパレルモの観測所で発見された新しい惑星についての噂が万人の話題となっており, まもなく, 高名なピアッツィが1月1日から2月11日まで遂行した観測自体が一般に知られるに至った. これほどの重要な機会は天文学の記録のどこにも全くなかった. この問題の価値をこの上なく明瞭に示すのにこれ以上の重要なものはほとんど想像できなかった. ほとんど1年も経ってから無数の星の空の中で惑星のアトムを再び見つけたいという希望は, すべて, 極めて少数の観測のみに基いて軌道の十分な近似値を知ることができるかにかかっていた. そのような危機と緊急性が当時存在していたのである. 私のアイデアが実際的な用途についてどの程度の力を持っているかを試すのに, ケレスの軌道決定以上に好都合なものがかつてあっただろうか? この惑星の場合, 41日間で描いた弧の地心角はわずか3度であり (注6), 1年経過後にそこから非常に離れた天空の区域で発見しなければならなかったのである. この方法は1801年10月に初めて適用されたが, そこから導かれた数字に従って探索が行われた最初の晴れた夜に, この

行方不明の惑星は再び観測網に捕らえられた．その後に発見された他の3個の惑星を通じて，この方法の効果と一般性をテストし承認する新たな機会が得られた.」

ガウスの軌道計算は，1802年3月にオルバースが発見した2番目の小惑星パラスの観測においても有効であることが立証され，ガウスの名声は揺るがぬものとなった．そして，オルバースの尽力等もあって，ガウスはゲッチンゲンの新設の天文台の台長に就任することが決まった(実際の着任は1807年).

ガウスが30歳にしてこのような一応の安定した生活を得るに至った直接の契機は，彼の歴史的大著「整数論」の刊行よりも，むしろケレスの軌道計算の成功にあったことは否めないと思われる．

(注4) 全集第6巻204-205頁参照．オルバースはツァッハ宛の書簡で「(ガウスの予測がなければ)私はそれほど東の方を探したりしなかったであろう」と述べている．また，ガウス自身が「天体運動論」に関するAnzeige(紹介批評)の中で記したところによると，当時の多くの天文学者が行ったような円軌道の仮定に基づく計算では1801年末において既に約11° の誤差が生じるという(全集第6巻56頁参照).
(注5)「天体運動論」の正式の書名は「円錐曲線で太陽を回る天体の運動の理論」(Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium, Hamburg, F. Perthes and I.H. Besser, 1809) であり，ラテン語で書かれている．ガウス全集では第7巻に収録されている(全集第7巻(1906)3-293頁)．翻訳は，Charles Henry Davis による英訳が1857年に，Edm. Dubois による仏訳が1864年に，Carl Haase による独訳が1865年にそれぞれ刊行された．邦訳はまだないが，第2部第3章のみ【10】の92〜113頁に訳出されている．
(注6) この41日間にケレスの描いた角度を約9度と記してある書物もあるが，それは太陽から見た場合の角度(日心角度) である．

4　「天体運動論」の刊行

天体の軌道を計算してその結果を発表することは，必ずしもその軌道計算の方法を明らかにすることを意味しない．ツァッハが1801年12月の月報でガウスの軌道計算を世に急告した際も，計算結果や軌道要素が示されているだけで，その計算方法が詳しく説明されているわけではない．

当時の天文学界・数学界では，太陽の周囲を動く天体が円を描く場合と放物線を描く場合には観測データからその軌道を計算することができたが，楕円を描く場合の軌道の計算方法はまだ知られていなかった．ガウスは独自の方法を用いてその計算方法を案出したわけだが，その計算方法を公表して優先権を主張するよう勧められても，すぐには応じなかった．その間の事情をガウスは「天体運動論」の序言で次のように述べている．

「ケレスの再発見後直ちに，何人もの天文学者たちは，私がこの計算に用いた方

法を公表して権利主張をすることを望んだ．しかし，この友好的な申出を実現させるには当時多くの障害があった．他にも諸仕事があったし，この問題をもっと十分に検討したいという希望もあった．特に，引き続きこの研究を進めれば解法の種々の部分の一般性，単純さ，エレガンスがより高まるだろうという期待があった．このような希望はほとんど誤っていなかったので，私はこの遅れを後悔する理由はないと思っている．当初用いた方法は何度も多くの修正を受けたので，かつてケレスの軌道を計算したときのやり方と本書で採用した仕組みとの間には，類似の跡がほとんど残っていない.」

こうして，ケレスの再発見から８年近く経過した1809年に，ガウスは「天体運動論」を刊行し，自己の軌道計算法を世に公開したのである (注 7).

(注 7) 1801 年の秋にガウスが用いた計算方法がどのようなものであったかは必ずしも明確でないが，ガウスの書簡や手稿からある程度うかがうことができる．例えば，1809 年９月号の月報に登載されたガウスの論稿「新たな２個の惑星の軌道決定に用いられる方法の概観」(全集第６巻 148-165 頁) の内容は 1802 年８月にガウスがオルバースに送ったものであるが，そこに示された計算方法は「天体運動論」に書かれたものとはかなり異なっている．また，ガウスの数学日記を見ると，1806 年１月から 1807 年１月 21 日まで，天体の軌道計算に関して進展や取組みを示す記述がある (第 125, 126, 127, 129 項目)．これらを合わせ考えると，ガウス自身が上で述べているように，1801 年のケレスの軌道計算の方法は「天体運動論」に書かれたものとは相当異なっていたと思われる．

5 「天体運動論」の構成

「天体運動論」は全２部から成り，全体で 192 の節に分かれている．その大まかな内容は以下の通りである．

前半の第１部「太陽を回る天体の動きを決定する諸量の間の一般的な諸関係」(第１節～第 114 節) は４つの章から成る．

「第１章 軌道上の単一の場所に係る諸関係」(第１節～第 46 節) は，軌道平面のみに着目し，天体が或る１点にある場合にその位置や他の軌道要素等の間で成り立つ関係や等式を考察する (一種の平面幾何学と言える)．天体の軌道が楕円を描く場合のみならず，放物線あるいは双曲線を描く場合も取り上げられている (この点は次章以下も同様である).

「第２章 空間中の単一の場所に係る諸関係」(第 47 節～第 77 節) では，空間における天体の位置を黄道面や天球に投影したり，太陽あるいは地球を原点とする３次元直交座標で表したりしつつ，それらの相互関係や軌道要素との関係等を考察する (球面幾何学及び立体幾何学と言える).

「第３章 軌道上の複数の場所相互間の諸関係」(第 78 節～第 109 節) では，天体が占める位置を複数個考え，それらについて軌道平面上で成立する諸関係を考察す

る．例えば，動径２つと或る軌道要素から他の軌道要素を決定する方法などが示される．

「第４章 空間中の複数の場所相互間の諸関係」(第110節〜第114節) では，軌道上の３つの点の座標を太陽を原点とする３次元直交座標で表し，そこから生ずる種々の関係式の数学的検討などが行われる．

後半の第２部「地球から見た観測に基づく天体軌道の考察」(第115節〜第192節) は，４つの章から成る．

「第１章 ３個の完全な観測に基づく軌道の決定」(第115節〜第163節) は本書の中核とも言うべき部分で，観測により得られた天体の３個の経度・緯度からその軌道要素を計算する方法を示している．その計算の遂行に必要な諸量や補助計算の多くは既に第１部の各所で示されており，本章ではそれらを随時引用しながら議論が進められる．

「第２章 ４個中２個のみが完全な観測に基づく軌道の決定」(第164節〜第171節) は，軌道傾斜角がゼロに近い場合等の軌道決定法を説明したものである．この場合には４個の観測データが必要となるが，未知数は６個で足りるので，観測時刻が最初と最後のものについては，緯度の数値を除外し経度の数値のみを使用して軌道の決定が行われる．

「第３章 何個の観測であれそれらを最も近似する軌道の決定」(第172節〜第189節) は，前章までと趣きが異なり，観測データが多数ある場合にどのような軌道を採用すれば最も真の軌道に近いかという問題が取り上げられる．ここで有名なガウスの最小自乗法が紹介される．

「第４章 摂動を考慮に入れた軌道の決定について」(第190節〜第192節) では，木星等の引力により生ずる天体の摂動にどう対処すべきかが手短に述べられている．

6 「天体運動論」におけるガウスの独創性

1809年に刊行された「天体運動論」は直ちに各国で高い評価を受け，1810年にはイギリスやフランスからメダルや褒賞が贈られた．同書は，天体の軌道決定に関する初めての本格的な理論書と言ってよく，その後の天文学者たちにも大きな影響を与えた．

以下に示すように，同書にはガウスの独創的なアイディアが幾つも見られる．

(1) ガウス定数　　ガウスは「天体運動論」の冒頭において，太陽を回る天体の運動を考察するために，

$$k = \frac{2\pi}{t\sqrt{1+\mu}}$$

という定数 k を導入した (第１節)．ここで，t は平均太陽日を単位とする１恒星年，μ は太陽の質量を１としたときの地球の質量である．ガウスは，

$$t = 365.2563835, \qquad \mu = 0.0000028192$$

とおいて，

$$k = 0.01720209895$$

と計算した．この k は万有引力定数の平方根に相当するが，太陽系の天体の運動を精度よく記述するのに便利であり，「ガウス定数」(ガウス重力定数，ガウス引力定数などともいう) と呼ばれて現在でも広く用いられている．

(2) 直接法と間接法　　現在の軌道決定論においては，太陽の周りを回る天体の軌道決定の方法として，大別して直接法と間接法がある．直接法には，ラプラスの創案にかかる「ラプラスの方法」とラグランジュに始まる「ラグランジュ＝シャリエの方法」などがあり，運動方程式を積分せずに天体の速度成分を求めるのが特徴である．但し，ラグランジュやラプラスの研究は実用には余り役立たず，実用化されたのは20世紀になってからとされる．

間接法はガウスが「天体運動論」において示した方法であり，「ガウスの方法」とも呼ばれる．この方法はケプラーの法則などを用いて，天体の２つの位置と太陽を結ぶ扇形と３角形の面積比を利用する (第95節，第128節等)．この面積比に着目したところにガウスの独創性があったと言えよう．(注8)

(3) ガウスの方程式　　「天体運動論」の第141節でガウスは，等式(IV) として次のような式を示している．

$$\text{(IV)} \quad cQ\sin\omega\sin^4 z = \sin(z-\omega-\sigma)$$

ここで，c, Q, ω, σ は計算により求めることができる既知量と考えてよいので，この式は z についての方程式となる．この方程式は展開すると８次方程式になるが，展開しないで試算によって解くのが最も早いとガウスは述べている (第142節)．この方程式は，直接法においても間接法においても解かなければならない不可欠の式であり，「ガウスの方程式」と呼ばれている．

(注8) 直接法と間接法の説明については，【２】の97～122頁が詳しい．

7　軌道計算の実例について

ガウスは「天体運動論」の全般にわたりかなり多くの実例や計算例を挙げて，その叙述を分かりやすくしている (注9)．ガウスの創始した間接法は計算が長くなるのが難点とされているが，これらの計算例を見るとどの程度の計算量が必要かをうかがうことができる．

例えば，軌道が全く分かっていない惑星について３回の観測から軌道要素を決定する計算の例として，ガウスは1804年に発見されたユノーのデータを用い，第150節から第155節にかけて計算の仕方を丁寧に説明している．これはガウス全集で言えば第７巻の183頁から193頁までの約10頁分に当たり，かなりの計算量である．

また，第２の例として，パラス (1802年発見) についても３回の観測から軌道を決定する計算過程を示しているが (第156節～第157節)、ここでも全集の約７頁分

(193 頁～200 頁) が費やされている.

いずれにせよ, このような実例を挙げての計算の説明は, いわばガウスの手の内を見せるうようなものであるが, その内容を見ると, 各計算方法の有効範囲や例外の有無に気を配りつつ、完璧なアルゴリズムを追求するガウスのひたむきな態度が印象に残る.

(注 9) そのような具体的な計算を行っている例として, 第 10 節, 第 13 節, 第 14 節, 第 23 節, 第 24 節, 第 26 節, 第 38 節, 第 43 節, 第 46 節, 第 51 節, 第 56 節, 第 63 節, 第 65 節, 第 69 節, 第 73 節, 第 77 節, 第 87 節, 第 97 節, 第 105 節, 第 150 節～第 157 節, 第 159 節, 第 171 節, 第 184 節等が挙げられる.

8　最小自乗法について

1801 年秋のケレスの軌道計算に際してガウスは当時まだ一般に知られていなかった最小自乗法を利用して精確な軌道決定を行ったかのように言われることがある. しかし, これは明らかに誤りである. ツァッハの月報での記事を見ても分かる通り, ガウスは 3 個の観測データから軌道を決定しているのであり, それを残りのデータと総合して最小自乗法による軌道精密化を行ったのではない. また, 「天体運動論」を見ても分かるように, 最小自乗法の考察は軌道決定の議論が終わった後の第 2 部第 3 章で初めて登場するに過ぎず, 「3 個 (あるいは 4 個) のデータから軌道を計算すること」とは全く無関係である. したがって, 例えば「『天体運動論』は最小自乗法を含んでおり, それは今日でも最も広く用いられている観測データの計算法の 1 つである」という記述は誤りとは言えないが, 「ガウスは自分の並外れた計算力と自身の開発した最小自乗法を駆使して, わずかな観測結果からケレスの軌道を算出した」という表現は誤りである.

そもそも惑星のように長年にわたって観測可能な天体の場合には, 観測を続けることによってより精確な軌道を得ることができるのであるから, 最小自乗法が必要とされる場面は想定しにくい. ガウスの開発した方法によれば, 基礎となる 3 個あるいは 4 個の観測データが精確であれば相当の精度で軌道を計算できるし, それ以上に多数のデータを関与させて最小自乗法を用いる意味は余りない. 算出した軌道を修正するならば, 最新の (より精確な) 観測値を反映させる方が現実的であろう.

実際, 全集に収録されているガウスの論文・草稿・書簡等を見ても, 軌道の決定や比較に最小自乗法を用いていると思われる例は全くと言っていいほど見出すことができない. したがって, 「天体運動論」第 2 部第 3 章における最小自乗法の考察は, 軌道決定に役立つ実用的な方法ではなくて, 多数のデータを基に最も可能性が高いと思われる軌道を選ぶ方法についての純粋に理論的な研究と見るべきである. 実際の惑星の軌道決定となると, 「天体運動論」の最終章で触れられているように摂動を考慮する必要があり, その方が最小自乗法よりも大きな問題である.

参考文献

◎ガウス全集：Carl Friedrich Gauss, *Werke*, Bde 1-12, 1863-1929.

◎軌道決定に関する邦語文献
【1】渡辺敏夫著『新版 天体の軌道計算』, 新天文学講座 14, 恒星社厚生閣, 1964.
【2】荒木俊馬著『天體力学』, 恒星社厚生閣, 1980.
【3】長沢工著『天体の位置計算（増補版)』, 地人書館, 1985.
【4】長谷川一郎著『天体軌道論』(改訂版), 恒星社厚生閣, 1986.
【5】長谷川一郎著『新装改訂版 天文計算入門 — 球面三角から軌道計算まで —』, 恒星社, 1996.
【6】木下宙著『天体と軌道の力学』, 東京大学出版会, 1998.
【7】長沢工著『軌道決定の原理』, 地人書館, 2003.
【8】福島登志夫編『天体の位置と運動』, シリーズ現代の天文学 13, 日本評論社, 2009.

◎ガウスに関する翻訳書
【9】ダニングトン著, 銀林浩他訳『ガウスの生涯』, 東京図書, 1976.
【10】ガウス『誤差論』, (飛田武幸・石川耕春訳), 紀伊國屋書店, 1981.
【11】S. G. ギンディキン著, 三浦伸夫訳『ガウスが切り開いた道』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1996.