平行線公理から非ユークリッド幾何学へ *

堀 井 政 信 † ‡

1 はじめに

昨年のシンポジウム（「*Éléments de géométrie*/1823 の平行線に関する命題」）[1] では，Adrien Marie Legendre（1752-1833）の *Éléments de géométrie avec des notes*/1823，蔵書印 東京帝国大学 (以下，*e.ge.notes*/1823) における，公理と平行線に関する命題について述べた．*Éléments de géométrie avec des notes*/1812，蔵書印 École polytechnique(以下，*e.ge.notes*/1812) と比較対照した．*e.ge.notes*/1823 と *e.ge.notes*/1812 の AXIOMES にはいずれにも，公理「1点を通り与えられた直線に平行な直線は，1本のみ引かれる」が含まれない．A.M. Legendre は，*e.ge.notes*/1812 の PROPOSITION XX を，*e.ge.notes*/1823 では PROPOSITION XIX，XX に置き換え，証明を試みたが成功しなかった．既に Semen Emel'yanovič Gur'ev（1746-1813）が，*e.ge.notes* の初版（1794 年）における証明の問題点を明らかにしていたが，その指摘は生かされなかった．

本報告では，平行線公理を証明しようとする取組みから非ユークリッド幾何学が生まれた歴史について述べる．そして，証明に対する多くの取組みが成功しなかったにもかかわらず，なかなか新しい幾何学の誕生に至らなかった背景を通覧する．

---

*津田塾大学 数学・計算機科学研究所 第 20 回数学史シンポジウム，2009.10.18

†e-mail : masa.horii@nifty.com，キーワード：非ユークリッド幾何学，平行線公理，ギリシャ伝来の公理観，A.M. Legendre

‡メールマガジン 高校教員が始めた数学史 http://www.mag2.com/m/0000125834.htm/ (pc)，http://www.mag2.com/m/M0084409.html（携帯），ウェブサイト 高校教員が始めた数学史 http://homepage3.nifty.com/mathhis/

2 $e.ge.notes/1812$ と $e.ge.notes/1823$

昨年のシンポジウムでは $e.ge.notes/1823$ について述べ，$e.ge.notes/1812$ と比較対照した．

2.1 AXIOMES

$e.ge.notes/1823$ と $e.ge.notes/1812$ の AXIOMES は一致する．いずれにも公理「1点を通り与えられた直線に平行な直線は，1本のみ引かれる」が含まれない．

2.2 $e.ge.notes/1812$ の PROPOSITION XX

$e.ge.notes/1812$ の PROPOSITION XX は，「BD ⊥ AB，∠BAE < ∠R → BD と AE は交わる」である．BD ⊥ AB，∠BAE が鋭角のとき，AE 上の点が E の方向に移動すると，その点から AB 上に下ろした垂線の足は B に近づくので，直線 BD と直線 AE は交わるとしている．

Semen Emel'yanovič Gur'ev が，$e.ge.notes$ の初版（1794年）における証明の問題点を著書（1798年）で明らかにし，「級数の部分和が単調増加であっても，それが級数の和を超えることを意味しない」と書いている [2]．しかし，その指摘は $e.ge.notes/1812$（第9版）でも生かされなかった．

2.3 $e.ge.notes/1823$ の PROPOSITION XIX

$e.ge.notes/1823$ の PROPOSITION XIX は，「三角形の内角の和は2直角」である．まず，2つの三角形の内角の和が等しいことを示す．次に，∠A，∠A′，∠A″，……が単調減少であることを言う．そして，三角形の内角の和を2直角と2つの内角と1つの外角で表し，「三角形の2つの内角と1つの外角が単調減少でありゼロになるから，三角形の内角の和は2直角になる」としており，証明は正しくない．単調減少であっても有限の値に収束することがあり，ゼロになるとは言えないからである．

3　非ユークリッド幾何学に関係する数学者（生年順）

Semen Emel'yanovič Gur'ev の指摘が生かされなかったことの要因を考えるために，平行線公理を証明しようとする取組みから非ユークリッド幾何学が生まれた歴史について，文献 [3] により通覧する．

3.1　Euclid（=Eukleides）（B.C.C.300?-275?）

ユークリッドの第五公準は，その定式化がきわめて複雑であるばかりでなく,「限りなく」という言葉が用いられているところからも分かるが，公準の特性とみられていた直観的自明性に欠ける.「限りなく」とか「無限」は無限定であり，無限定なものは，明確な本性を持たないものであるから学問の対象としてふさわしくない，こうした無限観を抱いていたギリシャ人にとっては，ユークリッドの平行線公準（第五公準）は幾何学の基本命題として不適当と思えたのである．

ユークリッド自身もその欠点に気づいていたようである．第1巻の定理28までは，この公準を用いずに証明できる定理だけがあげられているからである．

3.2　Claudius Ptolemaios（=Ptolemy, Ptolemeus）（85?-165?）

プトレマイオスの平行線公準の「証明」は以下のようなものである．いまこの公準が不成立だと仮定しよう．すなわち二直線と他の一直線とが交わって作る内角の和が二直角よりも小であるとき，この小なる側において二直線が交わらぬとしよう．この場合，これら二直線は他の側でも交わらぬであろう．何故なら，この側では内角の和が二直角よりも大であるのだから．故に二直線はいずれの側でも交わらず，つまり平行である．ところで平行であるとすれば，定理29によって内角の和は二直角でなければならないから，ここに矛盾が生ずる．故に二直線は交わらねばならない．

彼は平行線公準を他の公準や定理から導出したようである．だが果たしてそうであろうか．実は定理29の証明の中に難点がひそんでいるのである．

その主張のうちには，所与の直線には任意の一点を通りただ一本の平行線が描かれるという仮定がひそんでいるが，しかしこの仮定こそ証明さるべき筈の平行線公準（第五公準）と等値なものなのである．プトレマイオスの「証明」は見せかけの証明にすぎない．

3.3 Girolamo Saccheri（1667-1733）

平行線公理をユークリッドの他の公理から，あるいは別の形のもっと自明と思われる公理，つまり平行線の代替的公理から直接に導出しようとする多くの試みが論理的に欠陥をもっていたことを，サッケーリは鋭い批判的検討によって看取したのであろう．そこでこの事態に対処する態度として二つのものが考えられる．なるほど平行線公理には直観的自明性は不足しているものの，その公理を用いるならば多くの正しい定理を導出できるし（たとえば「三角形の内角の和が二直角である」という定理はその一つである），またそれを反証する事例は存在しないのであるから，その公理は一つの事実上の真理として，あるいは幾何学の理論を構築する一つの基本仮定として承認するというのが，その一つの態度である．しかしこれは，幾何学の公理はまさしく公理であるからには，自明のものであり，不可疑のものとして必然的に真であるというギリシャ以来の公理観を根本からくつがえすことになる．公理は必然的に真ではないから，それを否定した別の公理も可能であり，従って種々の幾何学が論理的に可能になる筈である．だがサッケーリはこうした態度をとることはできなかった．おそらくギリシャ伝来の公理観を堅持していたためであろう．公理は当然，自明な必然的真理である．ただ残念ながら平行線公理には自明性が不足はしているが，幾何学は全体として必然的な真実である筈である．平行線公理の直接証明は失敗に終った．しかし間接証明の途が残されている．その公理を否定した別の公理をユークリッドの他の諸公理と組合せて体系を作るとき，もしユークリッドの平行線公理が必然的に真であるならば，必ずやそこに矛盾が出てくる筈である．これがサッケーリのとった態度である．

サッケーリはギリシャ伝来の公理観を堅持していたため，平行線公理を幾何学の理論を構築する一つの基本仮定として承認することはできなかった．そして，間接証明を試みたが成功しなかった．

3.4　Carl Friedrich Gauss（1777-1855）

ガウス（C.F. Gauss 1777-1855）はすでに1792年以来，幾何学の基礎について考察をはじめ，1816年頃には非ユークリッド幾何学の大要を確立している．しかし，反対や論議を予想し，新幾何学の公表を差し控えた．メモや往復書簡は1855年の彼の死後公刊された．

非ユークリッド幾何学成立の一素因として，勿論，根本的のものとはいえないが，18世紀末葉から急激に勢いをました平行線公理をめぐる幾何学の基礎研究を忘れてはならない．それの原因としてシュテッケルは論著『幾何学者としてのガウス』のなかで，次の二つのものをあげている．

その一つは，ライプニッツ（G.W. Leibniz 1646-1716），ヒューム（D. Hume 1711-1776），ダランベール（J.le R. D'Alembert 1717-1783）など，とくにカント（I. Kant 1724-1804）の，数学的認識の本質の探究という哲学の側面からの推進力である．

いま一つは，フランス大革命の産物として生まれたエコール・ポリテクニク，エコール・ノルマールなどの全く近代的な高等教育機関の創立（1795年）である．これら教育機関では数学教育が特に重要視され，その教材の整備の必要は，幾何学の基礎に多くの数学者の目を向けさせた．ラグランジュ（J.L. Lagrange 1736-1813），カルノー（L.N.M. Carnot 1753-1823），ラプラース（P.S. Laplace 1749-1827），フーリエ（J.B. Fourier 1768-1830）など，しかしとりわけルジャンドル(A.M. Legendre 1752-1833)は重要な貢献を残した．彼は多くの版を重ねた『幾何学の原理』(*Éléments de géométrie*)において実に執拗に平行線問題を考え抜いている．その理論的水準はサッケーリやランベルトのそれを凌駕してはいないが，その書が広く流布されたため，その影響は甚大であり，非ユークリッド幾何学の発見者たちも，ルジャンドルを批判的に読むことによって多くの知見を得たのである．

非数学者の陣営からの，非ユークリッド幾何学に対するかまびすしい反対や，おせっかいな論議はとりあげるまでもないであろう．これらの空騒ぎを予想して，ガウスは神経質になっていた．彼が自身の創めた新幾何学の公表を差しひかえたのは，全く「愚者どもの騒ぎ」（ガウスからベッセル（F.W. Bessel 1784-1846）への手紙，1829年1月27日付）を恐れたからであった．しかしながら愚者ならぬ父ボヤイ，このガウスの青年時代からの知友であり，幾何学の基礎について優れた研究者であり，また息子ヤーノシュの非ユークリッド幾何学の発見にも刺戟を与えたほどのボヤイ・ファルカシュ，さらに非ユークリッド三角法の発見によってこの新幾何学の創

始者の一人にもかぞえられるタウリヌス，これら両人が非ユークリッド幾何学の本質について抱いた不安には，充分の考慮を払うべきであろう．

3.5 Nikolaĭ Ivanovich Lobachevskiĭ (1793-1856)

ロバチェフスキー（N.I. Lobachevsky 1793-1856）はロシアのニジニ・ノヴゴロド（現在のゴルキー市）に生まれ，カザン大学の中心人物となった．彼も非ユークリッド幾何学の創始者の一人である．ガウスは自己の新幾何学の公表をはばかったが，ロバチェフスキーは多くの反対や嘲笑をも恐れず，あえて新幾何学を公表した．ガウスの非ユークリッド幾何学の考察はいささか断片的であり，その大要を確立したというにすぎなかったのに対して，ロバチェフスキーは新幾何学を系統的に詳細に仕上げたばかりでなく，解析幾何学や微分幾何学とも結びつけたのであるから，発見の時期がおくれたという点ではガウスに一歩譲るとしても，内容的にみるならば，ガウスを抜きんでていたのである．

彼はルジャンドルなどを読み，幾何学の基礎について考察を深めていったようである．彼の幾何学の基礎研究が始まったのは1815-16年の頃，それが非ユークリッド幾何学として結実したのが1823-26年間であったと推定されている．

3.6 Bolyai János (1802-1860)

ボヤイ・ヤーノシュの空間論の最も本質的な部分は1823年の終りには獲得されていた．それは父の著書『テンタメン』の『附録』（アッペンディックス）として出版され，非ユークリッド幾何学を創立した画期的論文『問題のユークリッドの第11公理の（アプリオリには決して決定できない）真または偽とは無関係な空間論』の第29節に与えられている結果である．すなわち一点から一直線におろした垂線と，その点を通りその直線にひいた漸近平行線となす角（平行角）と，その垂線との関係を示す式であり，これによって非ユークリッドの三角法への門戸が開かれたといえよう．

4　The Loss of Truth

Morris Kline が“The Loss of Truth”[4] において非ユークリッド幾何学について論評している．“43 Mathematics as of 1900”の中の一つの章である．その中で,「数学の世界でも“counterparts”(よく似たもの）がない概念はなかなか受け容れられない」ことから,「数学は人間らしい任意の創造物である．自然の本質の理想化ではない」,「数学は自然について真実の主要部ではない」としている．そして,「非ユークリッド幾何学の衝撃は，数学者の特有な保守性と閉鎖的な考え方によって遅らされた」と書いている．

5　終わりに

平行線公理を証明しようとする取組みから非ユークリッド幾何学が生まれた歴史について見てきた．ユークリッド自身も平行線公準（第五公準）の欠点に気づいていた．プトレマイオスの「証明」は見せかけの証明にすぎなかった．サッケーリは，平行線公理をユークリッドの他の公理から，あるいは別の形のもっと自明と思われる公理から，直接に導出しようとする多くの試みが論理的に欠陥をもっていたことを，鋭い批判的検討によって看取した．しかし，ギリシャ伝来の公理観を堅持していたため，幾何学の理論を構築する一つの基本仮定として承認することはできなかった．ガウスは反対や論議を恐れて，新幾何学の公表を差し控えた．ボヤイ・ファルカシュやタウリヌスも非ユークリッド幾何学の本質について不安を抱いた．ロバチェフスキーは新幾何学を公表するにあたり，多くの反対や嘲笑を覚悟しなければならなかった．以上のことより，ユークリッド幾何学の存在が当時の数学者にとっていかに大きなものであったかがわかる．しかし，そのことが幾何学自体の発展に良くない影響をおよぼしたことも否定できない.「ギリシャ伝来の公理観」が一つのキーワードである．

とてつもなく長い期間にわたる取組みにもかかわらず，なかなか新しい幾何学の誕生に至らなかった．このことから,“counterparts”の存在しない新しい考えが受け入れられることがいかに難しいかを，改めて考えさせられる．ロバチェフスキーとボヤイ・ヤーノシュの研究は約30年間認められなかったのである．従って，Semen Emel'yanovič Gur'ev の指摘が当時生かされなかったことも，そのずっと以前から後にも至る歴史を鑑みれば，一つの事象であるのかもしれない．ただ，その指摘は直接的かつ具体的な

ものである．他の数学者にどのように受け止められたのか，論争は存在したのかなどは今後の課題としたい．

参考文献

[1] 堀井政信,「*Éléments de Géométrie*/1823 の平行線に関する命題」,『津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 30 第 19 回数学史シンポジウム (2008)』，津田塾大学 数学・計算機科学研究所，2009 年，312-316 頁

[2] B.A.Rosenfeld，*A History of Non-Euclidean Geometry, Evolution of the Concept of a Geometric Space*, Springer-Verlag, 1988, 103-104 頁

[3] 近藤洋逸,『幾何学思想史』，日本評論社，1994 年,（近藤洋逸数学史著作集，第 1 巻）

[4] Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times Volume 3*, Oxford University Press, 1990, 1032 p.