H.Weyl の invariant theory と Representation theory of continuous Groups(II)

(2010.02.06 麻生泰弘)

(I) では、主として、

"Randbemerkungen zur Hauptproblem der Mathematik", Math.Zeitschrift 20 130-150(1924)

により、Weyl による Capelli identity の reformulation と、その古典群での基本 invariants の決定への応用について述べた。

H.Weyl は、I.Schur の Dissertation, Berlin, 1901 と

"Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie I,II", Sitzungs.Preussien Akad. 1924, 189-208, 279-321 を踏まえて、

"Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen (Aus einem Schreiben an Herrn I.Schur)", Sitzungs.Preussien Akad. 1924, 338-345 を書いた。さらに,

"Das Gruppentheoretische Fundament der Tensorrechunung," Nachrichten Gesellschaft Göttingen 1924, 218-224 をも書いた。これらを踏まえて、I.Schur は、

"Neue Anwendungen III", Sitzungs.Preussichen Akad. 1924, 346-355 を記した。

これらの問題を扱う方法として、おおきく

(1) A.Hurwitz, I.Schur による integral method と

(2) S.Lie, É.Cartan による infinitesimal (transcendental) method

とがあげらられるが、H.Weyl は、彼の "Theorie der Darstellung" で、これらを融合し集大成した。

後に、著書 "The Classical Groups" としてまとめられた。

H.Weyl は既約表現の構成には、infinitesimal method を用い、characters の計算と完全可約性の証明には integral method を用いている。

この考察では、

1) A.Hurwitz(1897), "Über der Erzeugung der Invarianten durch Integration", Nachrichten Gesellschaft Göttingen, 1897, 71-90

2) I.Schur(1924), "Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie", Sitzungs.Berlin 1924, I.189-208, II.297-321, III.346-355 を扱う。

# 1 A.Hurwitz

1) A.Hurwitz(1894), Zur Invariantentheorie, Math.Annalen, 45, 381-404

2) A.Hurwitz(1897), "Über der Erzeugung der Invarianten durch Integration", Nachrichten Gesellschaft Göttingen, 1897, 71-90

連続群 $G$ の invariants の計算に際して、A.Hurwitz は、有限群における averaging method にならって、"integration method" を導入した。これを用いて、

(1) orthogonal invariant forms

(2) $SL(n)-$ invariants

を扱った。積分を扱う際、

その　well-definedness が問題となるが、その際、"unitary restriction" を導入した。

## 1.1 Orthogonal invariant

$\Phi(a;x)$ $(x \in V^n, a \in V^m)$ を、$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_m)$ の　p-form とする。

直交変換　$x_i = \sum_k r_{ik} x'_k$ のもとに $\Phi(a;x)$ は、$\Phi(a';x')$ となる。

ここに、$a'_i (i = 1, \ldots, m)$ は $a_k, (k = 1, \ldots, m)$ の　linear homogeneous, $r_{ik}$ の intgral homogeneous functions である。

$F(a)$ を　form $\Phi(a;x)$ の係数　$a_i$ の homogeneous integral rational function とするとき、直交変換のもとに、$F(a')$ となる。

$dR$ を　$SO(n)$ の　volume element とするとき、form $\Phi(a;x)$ の　proper orthogonal invariant は、

$$(1)\ J(a) = \int_{SO(n)} F(a')dR$$

で与えられる。(cf. Hilbert's 1st fundamental theorem)

## 1.2 volume element of SO(n)

*Euler's parametrization*

$\alpha, (1, \ldots, n-1)$ を index, $\beta, (1, \ldots, n)$ を、$\alpha$, $\alpha+1$ とことなる index とし, 直交変換　$E_\alpha(\phi)$　を次のように定義する。

$$\begin{aligned} x_\alpha &= \cos(\phi)x'_\alpha + \sin(\phi)x'_{\alpha+1} \\ x_{\alpha+1} &= -\sin(\phi)x'_\alpha + \cos(\phi)x'_{\alpha+1} \\ x_\beta &= x'_\beta \end{aligned}$$

更に、$i = 1, \ldots, n-1$ に対して、直交変換　$E_i$ を

$$E_i = \prod_{k=0}^{i-1} E_{n-i+k}(\phi_{i-k-1,i})$$

と定義する。ここに、$0 \le \phi_{\alpha,\alpha+1} < 2\pi$, $0 \le \phi_{\alpha,\beta} \le \pi (\beta - \alpha > 1)$.

*Proposition 1* : 任意の　$S \in SO(n)$ は

$$S = E_1 E_2 \cdots E_{n-1}$$

と一意的にあらわされる。

*Proposition 2* : SO(n) の volume element, volume は

$$dR = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{\alpha=0}^{n-2} \prod_{\alpha<\beta}^{n-1} (\sin(\phi_{\alpha,\beta}))^{\alpha} d\phi_{\alpha,\beta}$$

$$M = \int dR = 2^{\frac{(n-1)(n+4)}{4}} \pi^{\frac{n(n+1)}{4}} / (\Gamma(1/2)\Gamma 2/2) \ldots \Gamma(n/2))$$

で与えられる。

<u>*Proposition 3*</u> : Form $\Phi(a;x)$ の　orthogonal invariant は

$$(2) J(a) = \int_{SO(n)} F(a; \cos(\phi_{\alpha,\beta}), \sin(\phi_{\alpha,\beta})) \prod (\sin(\phi_{\alpha,\beta}))^{\alpha} d\phi_{\alpha,\beta}$$

で与えられる。

## 1.3 Unimodular group

Unimodular group $SL(n)$ の場合、積分　$\int_{SL(n)} F(a')dw$ は、任意の係数　$a$ に対しては、発散するので、この積分によって、invariants　を定めることは困難である。

そこで、$USL(n;\mathbb{C})$ にうめこむ("unitary restriction", 後に　Weyl　の　"unitarian trick")。埋め込み、によって得られる領域を　$T$, その　volume element を　$dT$ とするとき、

<u>*Proposition 4*</u> :

$$(3) J(a) = \int_T F(a')dT$$

とあらわされる。

$\alpha, (1, \ldots, n-1)$ に対して、1次変換　$E_\alpha(\phi, \psi, \chi)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} x_\alpha &= ax'_\alpha + bx'_{\alpha+1} \\ x_{\alpha+1} &= -\bar{b}x'_\alpha + \bar{a}x'_{\alpha+1} \\ x_\beta &= x'_\beta (\beta \neq \alpha) \\ a = \cos(\phi)e^{\sqrt{-1}\psi}, b &= \sin(\phi)e^{\sqrt{-1}\chi} \end{aligned}$$

更に、$k, (1, \ldots, n-1)$　に対して変換　$G_k$ を

$$\begin{aligned} G_1 &= E_{n-1}(\phi_{0,1}, \psi_{0,1}, \chi_1) \\ G_2 &= E_{n-2}(\phi_{1,2}, \psi_{1,2}, 0) E_{n-1}(\phi_{0,2}, \psi_{0,2}, \chi_2), \cdots\cdots \end{aligned}$$

と定義する。この時、任意の　$t \in T$ は、

$$t = G_1 G_2 \cdots G_{n-1}$$

と一意的に表される。 ここに、$0 \leq \phi_{(\alpha,\beta)} \leq \pi/2$, $0 \leq \psi_{(\alpha,\beta)} < 2\pi$, $0 \leq \chi_\beta < 2\pi$。

*Proposion 5* :

volume element $dT$ は,

$$dT = \sqrt{n!}\, 2^{n(n-1)/2} \cdot \prod_{\beta=1}^{n-1} \prod_{\alpha-0}^{\beta-1} \cos(\phi_{\alpha,\beta})\ \sin(\phi_{\alpha,\beta})^{\alpha+1}\, d\phi\, d\psi \prod_{\beta} d\chi_\beta$$

unimodular invariant は、

$$J(a) = \int F(a; \phi_{\alpha,\beta},\ \psi_{\alpha,\beta} \cdot \chi_\beta)\, dT$$

と表される。

### 1.4 invariant integral

$p \in V^r (p = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$ が 変換

$$p_i^{'} = \phi_i(p_1, \ldots, p_r; \chi_1, \ldots, \chi_r)$$

$(i = 1, 2, \cdots, r)$,

を受けるとき、ここに、 $\chi_k$ は変換パラメータ、

*Proposition 6* :

$$\int \psi(p_1, \cdots, p_r) dp = \int \psi(p_1^{'}, \cdots, p_r{}') dp^{'}$$

## 2 I.Shur

*Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie*

I. Mitteilung(1924, 189-208)

Erster Teil. Projective Invarianten

§1 Ein Hilfssatz über unitäre Substitutionen

§2 Der Integrationsprozess zur Erzeugung projektiver Invarianten

§3 Beziehungen zum $\Omega$–Prozess

Zweiter Teil. Die Homomorphismen der Drehungsgruppe der Drehungsgruppe und das Abzählungsprolem für Orthogonalinvarianten

§4 Der Hurwitzsche Integralkalkül
§5 Einige Eisenschaften der Homomorphismen der Gruppe $\mathfrak{D}$
§6 Die Grundrelationen für die einfachen Charakteristiken
§7 Das Abzählungsproblem für Orthogonalinvarianten
§8 Die Fälle n=2 und n=3
§9 Beliebige orthogonale Transformationen

II. Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch Lineare homogene Substitutionen (297-321)

§1 Allgemeine Vorberkungen
§2 Die Fälle n=2 und n=3
§3 Eine Hilfsbetrachtung
§4 Die einfachen Charakteristiken der Gruupe $\mathfrak{D}'$
§5 Forsetsung und Schluss des Beweises
§6 Folgerungen aus dem Satze IV

III. Vereinfachung des Integralkalküls. Realt"atsfragen (346-355)

§1 Einige Hilfsformeln
§2 Der vereinfachte Integralkalkü"l
§3 Der Abzä"lungskalkül für Orthogonalinvarianten
§4 Über die reellen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{D}$

## 2.1 Hilfssatz über unitäre Substitutionen

$Hermite\,form E(x) = \sum_i^n x_i\overline{x_i}$ は unitary 変換 $(s_{ik})$ 不変とする。

<u>*Lemma 1*</u> $n^2$-variables entire rational homogeneous function $F(z_{ik})$ が、変数 $z_{ik}$ の 任意の unitary 変換 $(s_{ik})$ のもとで vanish するならば、$F(z_{ik}) \equiv 0$.

## 2.2 Der Integrationsprozess zur Erzeugung projektiver Invarianten

$\mathfrak{G}$ を $GL(n)$ とする。$\mathfrak{G}$ の Homomorphism $(H(s); s \in \mathfrak{G})$ をつぎのように定義する。

$$For\ s, t \in \mathfrak{G},\ H(st) = H(s)H(t), H(s) \in GL(N)$$

H(s) の表現行列 $c_{\rho\sigma}(s)$ が $s_{ij}$ の k一次 多項式 のとき、

*homogen vom Grade k*　と云う。

$a \in V^N$　の form $J(a)$ が $J(H(s)a) = \gamma(s)J(a),\ s \in \mathfrak{G}$

をみたすとき、H(s)-invariant form と呼ぶ。とくに、$J(a)$ が $k-homogeneousformf(a;x$

の

$H(s) = P_k(s)(Hurwitz' powertransform)$　r-invariant　$J(a)$ とするとき、

$\gamma(s) = \det(s)^{kr/n}$, $weight\, p = kr/n$ は、interger.

Proposition 1. Projevtive group $\mathfrak{G}$ の $H(s)-$ invariant $J(a)$ の system は有限基底である。

$F(a)$ を integer weight $p = kr/n$ の $r-form$, とし、$g,\ h \in \mathbb{N}$　に対して、

$$F^*_{g,h} := \int F(H(s)a)\det(s)^g\overline{(\det s)}^h ds(\ h = g + p)$$

## 2.3　Ω - process

integer weight p をもつ form F(a) にたいして

$$F^*(a) := \Omega_s^p F(H(s)a)$$

$$\Omega_s^p := \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma)\frac{\partial^n}{\partial s_{1\sigma(1)}\dots\partial s_{n\sigma(n)}}\ (Cayley)$$

weight p の invariant $J(a)$ のとき、

$$J^*(a) = \prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{(p+\nu)!}{\nu!}\cdot J(a)$$

また、

$$\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{(p+\nu)!}{\nu!}\cdot F^*_{g,h}(a) = \Omega_s^p F(H(s)a)\cdot\int \det(s)^h\overline{\det(s)}^h ds.$$

## 2.4　Hulwitz's Integralcalculus

A.Hulwitz 参照

## 2.5　Einige Eigenschaften der Homomorphismen der Gruppe $\mathfrak{D}$

$H(s);\ s \in SO(n)(=\mathfrak{D})$ を $SO(n)$ の表現

$$H(s) = (\ c_{\rho\sigma}(s)) \in GL(N)$$

, $c_{\rho\sigma}(s)$ は　s　の連続関数とする。表現　$H(s)$ の character

$$\chi(s) := c_{11}(s) + c_{22}(s) + \dots + c_{NN}(s).$$

*Fundamental Satz :*

I. $SO(n)$ の二つの表現 $H(s)$ と $H_1(s)$ とが equivalent である必要十分条件は characters が一致することである。

II. $SO(n)$ と homomorph な任意の group $\mathfrak{H}$ は完全可約である。

III. $SO(n)$ と homomorph な任意の group $\mathfrak{H}$ は, *Hermitesche Gruppe*, すなわち $H(s)$ は, s に依存しない, positive Hermite form を invariant にする。

## 2.6 Die Grundrelationen für die einfachen Charakteristiken

既約表現 $H(s)$ の character $\chi(s)$ を primitive character と呼ぶ。
$N = \chi(e)$ は 指標の grade。

<u>*Orthogonality relations*</u>

(1) $\chi(s)$ を grade N の primitive character とするとき、

$$\frac{1}{h}\int \chi(ts^{-1})\chi(s)ds = \frac{1}{N}\chi(t)$$

$$\frac{1}{h}\int \chi(s^{-1})\chi(s)ds = 1 \quad (h = vol(SO(n)))$$

(2) $\chi(s)$ ,$\chi_1(s)$ を inequivalent な primitive characters とするとき、

$$\int \chi(ts^{-1})\chi_1(s)ds = 0$$

$$\int \chi(s^{-1})\chi_1(s)ds = 0$$

Orthogonality relations により primitive charater に関して, $\{\frac{\chi(s)}{\sqrt{h}}\}$ は、$L^2(SO(n))$ の orthonormal bases system をなす。

## 2.7 Das Abzählungsproblem für Ortogonalinvarianten

primitive characters $\{\chi_1(s), \chi_2(s), \cdots, \chi_m(s)\}$ に対して,

$$\varsigma(s) := \sum_{i=1}^{m} A_i\chi_i(s)$$

, $A_i$ は, positive intergers. $A_i$ は

$$A_i = \frac{1}{h}\int \varsigma(s)\chi_i(s^{-1})ds$$

で与えられる。$H^{(r)} := P_i(H(s))$ とおくとき、

<u>*Theorem 1*</u>

1 次独立な、$H(s) - invariantoforderr$, $J^{(r)}(a)$ の個数 $A^{(r)}$ は

$$A^{(r)} = \frac{1}{h}\int \varsigma^{(r)}(s)ds$$

で与えられる。ここに、$\varsigma^{(r)}(s)$ は、$H^{(r)}$ の character。

## 2.8 Beliebige orthogonale Transformationen

$SO(n)$ を $O(n)$ の index 2 の subgroup とみなす。以下、$O(n)$ の元を 変数 $t$, $SO(n)$ の元を 変数 $s$ と記す。

$$\oint f(t)dt := \int f(s)ds + \int f(su_0)ds,\ u_0 \in O^-(n)$$

$\oint dt = 2\int ds = 2h$ , $O(n)$ の表現　$H(t)$　の character $\chi(t)$ は real である。

$\varsigma(t)$ を homomorphism H(t) の character とする。1次独立な H(t)- skewinvariant　linear homogeous function の個数は

$$\frac{1}{2h}\oint \varsigma(t)\det(t)dt = \frac{1}{2h}[\int \varsigma(s)ds - \int \varsigma(su_0)ds]$$

となる。

## 2.9 II.1 Darstellung der $SO(n)$, Allgemeine Vorbemerkungen

$SO(n)$　の　表現　$H(s)$ に対して、

$$H^*(s) := H(u^{-1}su), u \in O^-(n)$$

$H^*(s)$ を $H(s)$ の adjoint とよぶ。

*Definition* $\chi(s) = \chi^*(s)$ の　とき、$H(s)$ を *gerade* homomorphism, $\chi(s)$ を *gerade* character という。

*Facts* :　1) $n = 2\nu + 1$ のとき、$\chi(s)$ は grade.
　2) gerade characteristic $\chi(s)$ は real-valued.

$O(n)$ の characteristic $\chi(t)$ に対して *associate characteristic* $\chi'(s)$ を次のように定義する：

$$\chi'(s) = \chi(s)\ (s \in SO(n)),\ \ \chi'(u) = -\chi(u)\ (u \in O^-(n))$$

$\chi'(t) = \chi(t)$ *i.e.* $\chi(u) = 0$ のとき、$\chi(t)$ を *zweiseitige* characteristic と云う。

*Facts* :

3) $n = 2\nu + 1$ のとき、$H(s)$ は、gerade である。
4) $n = 2\nu + 1$ のとき、　$\chi(t)$ は　not zweiseitige.
実際、$\det(-e) = (-1)^{2\nu+1} = -1$, より、$-e \in O^-(n)$.
zweiseitige とするとき、$\chi(-e) = \pm\chi(e) = 0$.
$\therefore\ \chi(e) = 0$. これは、矛盾。故に　$n = 2\nu + 1$ のとき、not zweiseitige.
5) $\chi(t)$ : *primitive if and only if* $\chi'(t)$ : *primitive*.
6) 表現 $H(t)$ の primitive characteristic を $\chi(t)$ とする。

a) $\chi(t)$ : *not zweseitige* のとき，　$H(s)$ は既約である。

$$\int \chi(s)^2 ds = h$$

b) $chi(t)$ : *zweiseitige* のとき、

$$\int \chi(s)^2 ds = 2h$$

$$\chi(s) = \eta(s) + \eta^*(s)$$

ここに、$\chi(s)$ : *gerade* とした。また、$\eta(s)$, $\eta^*(s)$ は、mutually adjoint primitive characteristics 。

## 2.10 Eine Hilfsbetrachtung

Lemma 2 :
$f(z,s) := \det(e - zs)$. $z_1, \cdots, z_m$ に対して、$f_i := f(z_i, s)$.
a) For $m = 1, \cdots n-1$,

$$\frac{1}{h}\int \frac{ds}{f_1 f_2 \cdots f_m} = \prod_{j \le k}{}_1^m \frac{1}{1 - z_j z_k}.$$

b) For $m = n$,

$$\frac{1}{h}\int \frac{ds}{f_1 f_2 \cdots f_n} = (1 + z_1 \cdots z_n)\prod_{j \le k}{}_1^n \frac{1}{1 - z_j z_k}.$$

c) For $m = 1, \cdots, n$,

$$\frac{1}{2h}\oint \frac{ds}{f_1 f_2 \cdots f_m} = \prod_{j \le k}{}_1^m \frac{1}{1 - z_j z_k}.$$

## 2.11 Die einfachen Charakteristiken der Gruupe $O(n)$

$t \in O(n)$ に対して、

$$f(z,t) := \det(e - zt),$$
$$\frac{1 - z^2}{f(z,t)} := \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k$$

$, \mid z \mid < 1,\ q_{-1} = q_{-2} = \cdots = 0.$

Thorem II
(irreducible representations and its dimension)

(A) $\nu = [\frac{n}{2}]$ 個の integers $\alpha_1 \ge \alpha_2 \cdots \alpha_\nu$ に対して、

$$\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu}(t) = \det(q_{\alpha_i - i + 1}, q_{(\alpha_i - i + 1) + (j-1)} + q_{(\alpha_i - i + 1) + (j+1)})_i^\nu$$

$, i=1,\cdots,\nu; j=2,\cdots,\nu)$.

$\chi_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu}(t)$ を primitive character とする既約表現 $H_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu}(t)$ が存在する。

$H_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu}(t)$ は、$n: even$, $\alpha_\nu > 0$ のときのみ、gerade。

(B)

$$M^{(n)}_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu} := \chi_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu}(e);$$

$$M^{(2\nu+1)}_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu} = \frac{(2a_1+2\nu-1)\cdots(2a_\nu+2\nu-1)}{1!3!\cdots(2\nu-1)}\prod_{\substack{1\\ j<k}}^{\nu}(a_j-a_k)(a_j+a_k+2\nu-1)$$

$$M^{(2\nu)}_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu} = \frac{2^{\nu'}}{2!4!\cdots(2\nu-2)}\prod_{\substack{1\\ j<k}}^{\nu}(a_j-a_k)(a_j+a_k+2\nu-2)$$

ここに、$a_j = \alpha_j - 2j + 1$; $\nu' = \nu - 1$ $for$ $\alpha_\nu = 0$, $and$ $\nu' = \nu$ $for$ $\alpha_\nu >$

(C) $H_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu}(t)$ が not zweiseitige のとき、associate $H'_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu}(t)$ を付加して、これらが $O(n)$ の complete system of irreducible representations を成す。

$O(n)$ **の 連続表現** $H(t)=(T_{jk})$ **の特徴づけ：**

<u>*Proposition 2*</u> : $H(t)=(T_{jk})$ は、rational representation である、i.e. $T_{jk}$ は、$t_{\alpha\beta}$ $(t=(t_{\alpha\beta}))$ の polynomial rational function として表しうる。

$SO(n)$ の場合も同様。

$t=(t_{\alpha\beta})$ ,

$\det(t_{ij}); 1 \le i_1 \le \cdots \le i_\mu \le n, 1 \le j_1 \le \cdots \le j_\mu \le n$ のなす行列を $C_\mu(t)$ と定義する。

$C_\mu(t)$ ; $(\mu = 1,2,\cdots,n)$ (determinantal transform) は character-istic $c_\mu(t)$ ; $(\mu=1,2,\cdots,n)$ をもつ $O(n)$ の表現である。

$$f(z,t) = \det(e-zt) = 1 - c_1(t)z + c_2(t)z^2 + \cdots + (-1)^n c_n z^n$$

$C_\mu(t)$ と $C_{n-\mu}(t)$ は associate である。

<u>*Proposition 3*</u> :

$$C_1, C_2, \cdots, C_\nu \quad (\nu = [\frac{n}{2}])$$

は $O(n)$ の既約表現である。$SO(n)$ の場合、$n=2\nu$, $C_\nu$ を除いて既約。

$SO(n)$ の場合,$C_\nu$ は互いに adjoint な表現 $K_\nu$ と $K^*_\nu$ に分解する。

ここに、$K_\nu$ は characteristic $\eta_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu}$ をもつ 既約表現、$K^*_\nu$ は characteristic $\eta^*_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu}$ をもつ 既約表現。