オイラーの変分法　2

九州大学大学院数理学府　　尾崎　文秋 (FUMIAKI Ozaki)
Graduate school of Mathematics,
Kyushu University.

概 要

オイラーは 1744 年に出版された変分法のテキスト *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* において，変分法を積分式の極値問題として一般化している，そしてその中でオイラー方程式が作り上げられた．オイラーはこの方程式が正しいかを確かめるかのように例題を多く解いている．変分法の問題はオイラー以前にも存在し，オイラー自身もその方法を受け継いでいる．ここでは曲面上の曲線に対する変分法の問題について，オイラー方程式発見以前の 1732 年と 1744 年の彼の方法を紹介する．

オイラー方程式

オイラーは変分法のテキスト [1] において，はじめに変分法の問題は，ある軸の決まった区間にある曲線群の中から極大か極小になる曲線を選択することである．としている．そして次にそこから見つけるべき曲線において，極値を持つ積分式

$$\int_0^x Z(x,y,y',\ldots)dx \tag{1}$$

を考えて，この Z(x, y, y', ...) を変分させてオイラー方程式

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\cdots=0 \tag{2}$$

を作り上げたのである．

例えば，テキストの第二章 34 節にある例題 III では，

ある曲線が同じ軸に対応するとき，その曲線において積分式 $\int \frac{dx\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{x}}$ が極大か極小になる．そのような曲線を見つけよ．

この問題のように $Z=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{x}}$ が 1 階の導関数 y' を含む場合は，その全微分 $dZ=\frac{dx\sqrt{1+y'^2}}{2x\sqrt{x}}+\frac{y'dy'}{\sqrt{x(1+y'^2)}}$ の dy, dy' の係数に注目し，オイラー方程式

$$N-\frac{dP}{dx}=0 \tag{3}$$

に代入すると極値を与えるような微分方程式が得られる．この場合 N は dy の係数，P は dy' の係数である．上記の dZ の場合だと dy が無いので N が 0，dy' の係数が $\frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}}$ となり，オイラー方程式 (3) はまず $N=0$ なので $-\frac{dP}{dx}=0$ となる．ここから

$$P=\frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}}=\text{Const.} \tag{4}$$

ここで，この Const. を $= \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ と置くと，

$$P = \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} = \text{Const.} = \frac{1}{\sqrt{a}} \tag{5}$$

$ay'^2 = x + y'^2 x$ よって，
$y' = \sqrt{\dfrac{x}{a-x}}$ と $y' = \dfrac{dy}{dx}$ から

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}} \tag{6}$$

この微分方程式を満たす曲線はサイクロイドである．サイクロイドがこの微分方程式になることはヨハン・ベルヌーイも示しているから当然オイラーもこの結果を知っていたはずである．このようにオイラーは新しい方法を使って今までの問題を解くことで，方法を確かめているのである．

1　曲面上の変分法について

エネストレームの目録によれば，オイラーが書いた変分法についての一番始めの論文は 1732 年の “De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente” E9 [1] とされている．この論文は曲面上における曲線の変分法の問題が取り扱われている．オイラー方程式が導入された変分法のテキスト [1] E65 にも曲面上における変分法の問題が収録されている．この問題の計算過程では，E9 の結果が使われており，オイラー方程式を使用しても同様の結果がでるということからその方程式の正確さを示している．

1.1　E9 について

“De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente” E9
ある曲面において任意の２点を結ぶ最短線について

この論文について M.Kline の [4, p.577] によると，

> 1728 年にヨハン・ベルヌーイがオイラーに次の問題を提案した．
> 「曲面上の測地線は，その測地線の接触平面と曲面は直交するという特性によって得られる.」
> この問題からオイラーの変分法は始まった．

と書かれている．実際 E9 の一番最後には，

> Proposuit mihi quaestonem Cel. Ioh. Bernoulli, $(\cdots)$
> Solutonem igitur huius quaestionis, quia tam facile ex antencedentibus fluit, hic adiungere volui.
> 偉大なるヨハン・ベルヌーイはこの問題を私に提示した．(中略)
> だからこのヨハンの問題の解答はこの巻に加えたい．なぜなら以前から容易すぎて漂っているからである．

という記述が見られることから，上のヨハンの問を受けて書かれたのがこの論文であると言える．一方 H. Goldstine [3] によれば，これはヤコブ・ベルヌーイがオイラーに持ちかけた問題だと主張している．

---

[1] E はエネストレームナンバー

E9では，冒頭にこの論文で取り扱う曲面の問題は凸曲面上だけであることが説明され，続いて曲面に最短線を引くための補題があり，次に円，円筒形，円錐，そして放物線が軸の周りを回転した回転体の表面における最短線を考察している．E9で扱われている全ての図形はそれらの図形の測地線の接触平面と曲面は直交すれば，測地線の形状は円であることは当たり前である．オイラーはこのことを利用して，測地線の形が円になることを式で表すことによってヨハンの問に答えている．

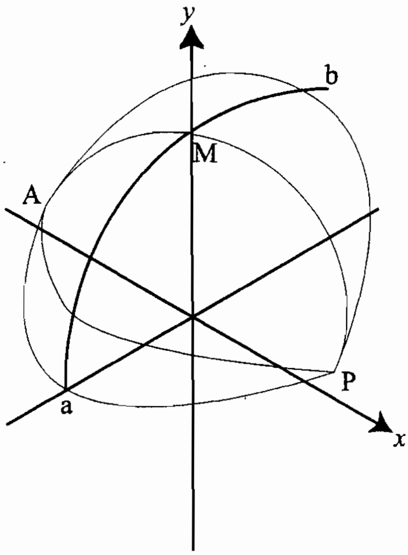

図.1

補題では上の図.1のように曲面上の任意の2点を結ぶ最短線AMP(測地線)と曲面上の曲線abを定め，この二つの曲線の交点Mを求めて，そのMにおける接触平面での微分つまりdxとdyの比を求めて最短線AMPの式を求める．そして，そこから現れる微分方程式が円を表せば測地線の接触平面と曲面は直交することを示すことができる．といのがオイラーの主張である．以下オイラー計算を紹介する．Mをmにずらすという変分に相当する作業が見られる．この作業は極大極小を見つける方法と名付けられている．

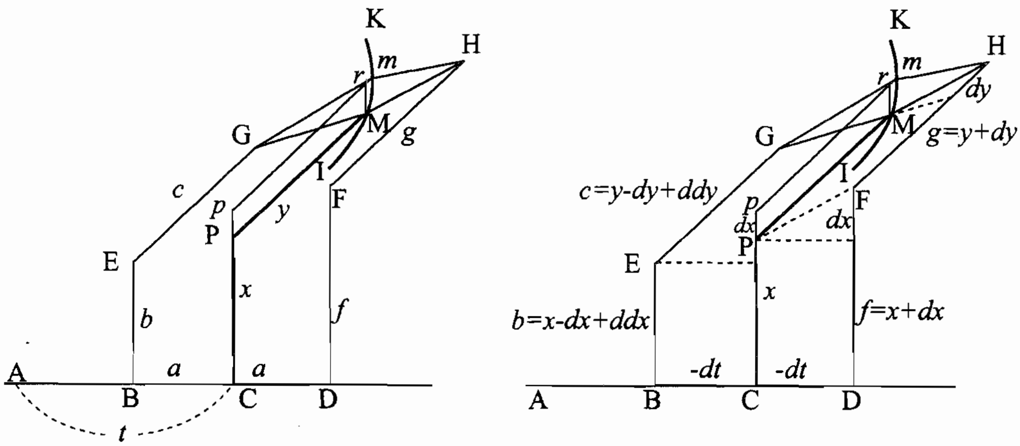

Fig.2

点Mを通過する曲線IKを引く．
GM＋MHはすべての経路の中で最小である．

ここに極大極小を見つける方法を適用する.
まず $GM+MH=Gm+mH$ なる m をとる．そして $GM+MH$ が最小経路なので，この方程式から点 M の位置はわかる.
Fig.2 のように点をおいて,
点 m の座標は $(t,x+dx,y+dy)$．点 G の座標は $(t-a,b,c)$ となる.
M は変化量 (t,x,y)，H は $(t+a,f,g)$，A を原点にして $AC=t, mr=dy, Mr=dx$ となる.
これらより $GM=\sqrt{a^2+(x-b)^2+(y-c)^2}$, $GM^2=(MH-GE)^2+(CP-BE)^2$, 同じく $HM=\sqrt{a^2+(f-x)^2+(g-y)^2}$. だから経路全体は $GM+MH=\sqrt{a^2+(x-b)^2+(y-c)^2}+\sqrt{a^2+(f-x)^2+(g-y)^2}$.
この量は最小値をとらなければならないから微分をして, それらを 0 と置ける.

$$\frac{(x-b)dx+(y-c)dy}{\sqrt{a^2+(x-b)^2+(y-c)^2}}=\frac{(f-x)dx+(g-y)dy}{\sqrt{a^2+(f-x)^2+(g-y)^2}} \tag{7}$$

この式より点 M の位置が決定する.

ここで曲線 IK を平面上に置くと，x と y の $Pdx=Qdy$ または $dx:dy=Q:P$ という形の方程式にならなければならない.

$$\frac{(x-b)Q+(y-c)P}{\sqrt{a^2+(x-b)^2+(y-c)^2}}=\frac{(f-x)Q+(g-y)P}{\sqrt{a^2+(f-x)^2+(g-y)^2}}. \tag{8}$$

この方程式は微分量を持っていない.
ここで $AC=t$ そして今量 $CP=x, PM=y$ と置くと，$BC=CD=a=dt, DF=f=x+dx$; $FG=g=y+dy$; $BE=b=x-dx+ddx$; $EG=c=y-dy+ddy$ となる．これらの値を a,b,c,f そして g を上で得られた式に代入すると，次の方程式が得られる.

$$\frac{Q(dx-ddx)+P(dy-ddy)}{\sqrt{dt^2+(dx-ddx)^2+(dy-ddy)^2}}=\frac{Qdx+Pdy}{\sqrt{dt^2+dx^2+dy^2}}. \tag{9}$$

この方程式は P, Q そして dt が定量であるときの，この量 $\dfrac{Qdx+Pdy}{\sqrt{dt^2+dx^2+dy^2}}$ の微分を 0 と等しくできる．このことからこの量を微分して次の式を得る.

$$(Qddx+Pddy)\sqrt{dt^2+dx^2+dy^2}=\frac{(Qdx+P)dy(dxddx+dyddy)}{\sqrt{dt^2+dx^2+dy^2}}. \tag{10}$$

この式は変形して次のようになる.

$$\frac{Qddx+Pddy}{Qdx+Pdy}=\frac{dxddx+dyddy}{dt^2+dx^2+dy^2}. \tag{11}$$

オイラーは測地線の接触平面の微分量の比をこの式 (11) に代入して積分することによって題意を満たす曲線を求めている.

1.2　E65 について

変分法のテキスト [1] の第四章では，それまでの章で導入されたオイラー方程式を用いて様々な例題を解いている．例えばそれまでは直交座標上のみで考えていたものを，極座標上や曲面上に応用している．実際の曲面上の変分法の例題を紹介する.

例　IV

11. 凸あるいは凹のある任意の曲面 (Fig.10) においてある端点の間で完全に最小になる線を示すこと.

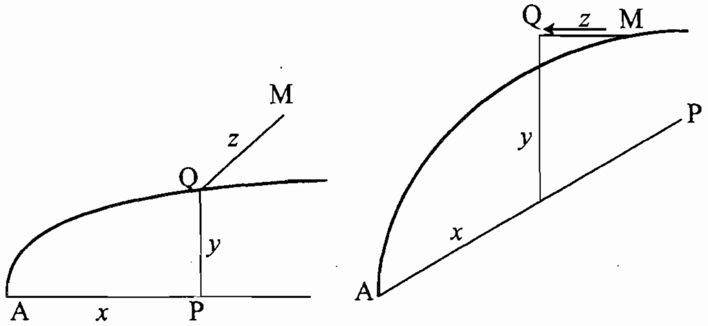

Fig.10

z は x と y の関数だから，その関数は曲面に対する位置の方程式によって与えられて，$dz = Tdx + Vdy$ と置ける T と V は両方とも x と y の任意の関数である．なぜなら $dT = Edx + Fdy$ と置くと，$dV = Fdx + Gdy$ となるような文字 F が両方に共通の微分としてある $Tdx + Vdy$ は定微分式である．

ここでは微分が可能であることと共に T と F の全微分の微分係数を比べている．

$$dT = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy \qquad dV = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}dy$$

そして曲面上の線素を計算し，Z を整理して，オイラー方程式に代入している．

$$線素 = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + (Tdx + Vdy)}$$

となる．
それゆえ $dy = pdx$ と置いたこの式

$$\int dx\sqrt{1 + p^2 + T^2 + 2TVp + V^2p^2}$$

は最小にならなければならない．そして

$$Z = \sqrt{1 + p^2 + T^2 + 2TVp + V^2p^2}$$

だから．全微分をして，

$$dZ = \frac{\begin{cases} +TEdx + TFdy + pdp + VEpdx + VFpdy + TVdp \\ +TFpdx + TGpdy + V^2pdp + VFp^2dx + VGp^2dy \end{cases}}{1 + p^2 + T^2 + 2TVp + V^2p^2}$$

この式の dy と dp の係数を $N - \dfrac{dP}{dx} = 0$ に代入する．

$$\frac{TFdx + VFpdx + TGpdx + VGp^2dx}{1 + p^2 + T^2 + 2TVp + V^2p^2} = d \cdot \frac{p + TV + V^2p}{1 + p^2 + T^2 + 2TVp + V^2p^2}$$

最終的にこの式は，

$$dxddy = \frac{(Tdy - Vdx)(dxdT + dydV)}{1 + T^2 + V^2}$$

となる．この方程式は求める曲面において投影された最短線 AQ に対する差分微分方程式 (aequation differentio-differentialis) である．従ってある 2 点を通って引かれる最短線 AQ を示す．今得た方程式を変化させる．
$dz = Tdx + Vdy$ だから $ddz = dxdT + dydT + Vddy$，従って $dxdT + dydV = ddz - Vddy$ となる．この式の値をして代入して

$$dxddy + T^2dxddy + V^2dxddy = Tdyddz - Vdxddz - TVdyddy + V^2dxddy \qquad (12)$$

従って，

$$ddy : ddz = Tdy - Vdx : dx + Tdz$$

この方程式に dx を掛けて，そして dz に $Tdx+Vdy$ を代入して

$$Tdx^2ddy + Vdxdyddy + Tdz^2ddy = Tdydzddz - Vdxdzddx$$

となる．この両辺に $Tdy^2ddy - Vdxdyddy$ を足すと，

$$Tddy(dx^2+dy^2+dz^2) = (dzddy+dyddy)(Tdy-Vdx)$$

言い換えると，

$$\frac{dyddz+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2} = \frac{Tddy}{Tdy-Vdx} = \frac{Tddz}{dx+Tdz} \tag{13}$$

となる．

また方程式 (12) に dx を掛けて，そして Tdx の代わりに $dz-Vdy$ を書くと，

$$dx^2ddy + dz^2ddy - Vdydzddy = dydzddz - Vdy^2ddz - Vdx^2ddz$$

と整理される．

そして両辺に $dy^2ddy - Vdz^2ddz$ を足すと，

$$\begin{aligned} &ddy(dx^2+dy^2+dz^2) - Vdx(dyddy+dzddz) \\ &= dy(dyddy+dzddz) - Vddz(dx^2+dy^2+dz^2) \end{aligned}$$

となる．従って，

$$\frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2} = \frac{ddy+Vddz}{dy+Vdz} \tag{14}$$

この方程式と式 (13) を繋げて

$$\frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2} = \frac{Tddy}{Tdy-Vdx} = \frac{Tddz}{dx+Tdz} = \frac{ddy+Vddz}{dy+Vdz} \tag{15}$$

となる．

例えば，もし提出された曲面は軸 AP の周りにある形が回転して生じる物体であるならば，$y^2+z^2=$ は x に関数の 2 乗になる．それを X と置く，そして向軸線はこの曲線の切除線に対応する．従って，

$$zdz = XdX - ydy \quad dz = \frac{XdX}{z} - \frac{ydy}{z}$$

となる．そこから，

$$T = \frac{XdX}{zdx} \quad V = -\frac{y}{z}$$

となる．

$$\frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2} = \frac{ddy+Vddz}{dy+Vdz}$$

これは $V=-\frac{y}{z}$ だからこの式に代入すると，

$$\frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2} = \frac{zddy+yddz}{zdy-ydz} \tag{16}$$

となる．これを積分すると，

$$\log\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\log\frac{zdy-ydz}{b} \quad \text{言い換えると} \quad zdy-ydz=b\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

となる．今 $z=\sqrt{X^2-y^2}$ であるから，$dX=vdx$ と置くと，

$$dz=\frac{Xvdx-ydy}{\sqrt{X^2-y^2}} \quad \text{そして} \quad zdy-ydz=\frac{X^2dy-Xyvdx}{\sqrt{X^2-y^2}}$$

$$\text{そして} \quad \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\frac{\sqrt{X^2dx^2-y^2dx^2+X^2dy^2+X^2v^2dx^2-2Xyvdxdy}}{\sqrt{X^2-y^2}}$$

これより，

$$\begin{aligned}&X^4dy^2-2X^3yvdxdy+X^2y^2v^2dx^2\\ &=b^2X^2dx^2-b^2y^2dx^2+b^2X^2dy^2+b^2X^2v^2dx^2-2b^2Xyvdxdy\end{aligned}$$

そして

$$dy^2=\frac{2(b^2-X^2)Xyvdxdy+X^2y^2v^2dx^2-b^2X^2dx^2+b^2y^2dx^2-b^2X^2v^2dx}{X^2(b^2-X^2)}$$

両辺に平方をとって，

$$dy=\frac{yvdx}{X}\pm\frac{bdx\sqrt{(1+v^2)(y^2-x^2)}}{X\sqrt{b^2-X^2}}$$

が生じる．ここで $y=Xt$ と置くと，$dy=Xdt+tvdx$ となり，

$$\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=\frac{bdx\sqrt{1+v^2}}{X\sqrt{b^2-X^2}} \tag{17}$$

となる．この方程式において X と v は x の関数だから，変化量 t と x は互いに分離している．[2)]

このようにオイラー方程式使用後に現れた式を E9 で求めた微分方程式の形に帰着させている．このようにしていることからもオイラーは自身の方程式を確かめていることがわかる．

2 今後の課題

曲面の変分法の問題について考察するきっかけになったのは，ラグランジュへの影響を知りたかったからである．しかしこの時代の曲面がとても限定されたものであり，そしてまたオイラーの理解がまだまだ不十分なこともありなかなかラグランジュまでは到達できていない．今回はラグランジュの “Mecanique Analytigue I,II”(解析力学 1,2) の序文を読んでわかったことを記述しておく．

イタリア人数学者 Guido Ubaldo(1545–1607) の 1577 年の論文 “Liber Mechanicorum”(力学の書物) からはじまってガリレオ，ホイヘンス，デカルト，ニュートン，ベルヌーイ兄弟（ヤコブ，ヨハン，ダニエル），モーペルテュイなど，そして最後にオイラーと順を追って説明をしている．

オイラーについての記述に注目すると，モーペルテュイの論文に対するオイラーの論文 “Harmonie entre les principes generaux de repos et de mouvement de M. de Maupertuis

2) このまま式 (17) の計算を進めれば x と t で表される曲線の方程式になることがわかった時点でオイラーは計算を終えている．

" E197 を文献に上げている.

このようにラグランジュ自身が受けた先代の影響が事細かに書かれており，力学からの影響が大きいという印象を受けた.

オイラーの最初の論文 E1 の題名は，
"Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente"
ある抵抗媒体中での等時曲線の作図.
である．この論文はニコラウス・フスの伝記によればダニエル・ベルヌーイとの間の論争から出来上がったもので，ニュートンのプリンキピアの第二巻が引用されており，内容は抵抗媒体の条件を変えたときの等時曲線の構造について調べている．そこには微分方程式を立てる際に物の運動に由来する式が使われ，そして言葉だけだが最速降下線問題も現れる．この論文は力学著作集に収録されている．他にも内容をすべて見てはいないが変分法に関係がありそうな力学の論文が E3, E6, E8, E12, E13 と浮かび上がってくる．オイラーもこれらの論文中には先代の数学者や彼らの論文を引用して議論をしている．ラグランジュも同じ手法をとったのか，もしくはオイラーの作品を読んでそれらを知った部分もあると思う．まずはオイラーの初期の活動に焦点をあてて，オイラー変分法が力学からどのような影響を受けたのかを解明していきたい.

参考文献

[1] Leonhard Euler: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, Lausannae & Genevae (1744). I cite the reprint in: Leonhard Euler, *Opera omnia*, series I, vols. 24 (= EO I, 24), Basel (1952).

[2] Leonhard Euler: Commentationes analyticae ad calculum variationum pertinentes , *Opera omnia*, series I, vols. 25 (= EO I, 25), Basel (1952).

[3] H.Goldstine: *History of the Calculus of Variations from the Seventeenth Through the Nineteenth Century*, Springer-Verlag, New York (1980).

[4] M.Kline: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, Oxford (1972).

[5] 尾崎　文秋: オイラーの変分法, 津田塾大学数学・計算機科学研究所報, **30**, pp.224–234, (2009).