「2つの素数の差が偶数である素数の組の個数に関するハーディ・リトルウッドの予想」について

高 橋 鋼 一

I. はじめに

数学教育協議会発行の「数学教室」(2006年10月号)に、数教協夏の大会で、数教協のメンバーの国見氏と斉藤氏の両氏が、「任意の正の偶数2kを固定した場合、pと2k+pが両方とも素数となる組が無限にあるのではないか?」という問題提起がなされ、野崎昭弘氏がその事に言及している。その後、野崎氏は「数学セミナー」<素数定理の威力に学ぶ>(2007年11月号)にもこの問題提起にふれているが、数教協の仲間達では「国見-斉藤の予想」(注1)と言っている。しかし、「国見ー斉藤の予想」という予想名は、一般的に通用しているわけではない。国見氏と斉藤氏がハーディ・リトルウッドが予想した同じ問題に、時を隔てて気がついたということにすぎない。数学史上では次のような経過をたどってきた。

1) 1849年に **de Polignac**が双子素数予想の一般化について述べている。
「すべての偶数$2k>0$に対して無限に多くの連続する素数の組(p_n, p_{n+1})が存在し、$2k=p_{n+1}-p_n$となる。」

2) 1922年にG.H.HardyとJ. E. Littlewoodが「SOME PROBLEM OF 'PARTITIO NUMERORUM';Ⅲ:ON THE EXPRESSION OF A NUMBER AS A SUM OF PRIMES」の論文の中にConjectureとして載っている。
この論文の中では、表題以外のたくさんの予想を載せているが、後述の中で双子素数予想の漸近式とGoldbachの予想の漸近式が類似して関連があるので、「Goldbachの予想」について、下に抜粋して載せることにする。

この論考「SOME PROBLEMS OF 'PARTITIO NUMERORUM';Ⅲ」の初めは、Goldbachの予想について、
ディリクレのL－関数:$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$に関してリーマン予想よりも弱い仮定:
「$L(s,\chi)$のすべての非自明な零点$\rho=\beta+i\gamma$について、$\theta<\frac{3}{4}$で、$\beta\leqq\theta$を満たす実数θが存在する。」
を用いて、円周法と関数論的方法から次の漸近式を予想した。

「Conjecture A:

Every large even number n is the sum of two odd primes.The asymptotic formula for the number of representatives is

$$N_2(n)=\sim 2C_2\frac{n}{(\log n)^2}\prod_p\left(\frac{p-1}{p-2}\right) \quad \cdots\cdots ①$$

where p is an odd prime divisor of n and

$$C_2=\prod_{w}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(w-1)^2}\right)$$ 」

このC_2は一般に双子素数定数と言われ、$\prod_{w}^{\infty}$はwがすべての奇素数にわたる無限積を意味する。$N_2(n)$は、2個の素数の和がnとなる表し方の数である。

また、この「'PARTITIO NUMERORUM';Ⅲ」においては、ハーディ・リトルウッドの研究上のすべての仕事は、目新しい研究論文であるかぎり、このリーマン予想よりは弱い仮定に依拠しているという断り書きがある。
「Goldbachの予想」について、ハーディ・リトルウッドによる上述した漸近式が発表される前には、Sylvester, Stäckel, Landau, Brun, Shah, Wlisonなどによる様々な漸近式が提起されましたが、詳細は省略する。その後のこの予想の最良の結果は、Chenの結果によるが、完全な解決には到っていない。ハーディ・リトルウッドは上記論文で、「Goldbachの予想」についての漸近式の推察をした後に、「Other Problem」の中で、「Goldbachの予想」で行った推察方法を推し進めて、

「ConjectureB:

There are infinely many prime pairs

$w,\ w'=w+2k,$

for even 2k . If $P_{2k}(n)$ is the number of pairs less than n, then

$$P_{2k}(n)\sim 2C_2\frac{n}{(\log n)^2}\prod_p\left(\frac{p-1}{p-2}\right) \quad \cdots\cdots ②$$ 」

の漸近式が載せてある。C_2は、双子素数定数で、pは偶数2k(この論文では、偶数をkで表してある。混同を避けるため2kで統一する。)を割り切る奇素数である。そして、次の漸近式がでてくる。②の漸近式でnをxに置き換えると、

$$(\mathrm{i})\ P_2(x) \sim \frac{2C_2x}{(\log x)^2} \qquad (\mathrm{ii})\ P_4(x) \sim \frac{2C_2x}{(\log x)^2} \qquad (\mathrm{iii})\ P_6(x) \sim \frac{4C_2x}{(\log x)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

ただし、$P_2(x)$, $P_4(x)$,$P_6(x)$は、それぞれ素数の組の2つの素数うち小さい方の素数がx以下で、2つの素数のそれぞれの差が2,4,6の素数の組の個数である。定数C_2の値は、

$$C_2 = \prod_{\omega \geqq 3}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(\omega-1)^2}\right) = 0.660168158\cdots\cdots$$ (この値は、Wrenchらによる。)

である。さらに、この論文の中で、xが100,500,1000,2000,3000,4000,5000までのそれぞれの$P_2(x)$,$P_4(x)$,$P_6(x)$を実際に求めて、$P_2(x)$,$P_4(x)$,$P_6(x)$のそれぞれの個数を比較し、(i)と(ii)が漸近的に等しく、その2倍が(iii)に漸近的に等しいことを確かめた表が載っている。

x	100	500	1000	2000	3000	4000	5000
$P_2(x)$	9	24	35	61	81	103	125
$P_4(x)$	9	26	41	63	86	107	121
$P_6(x)$	16	47	73	125	168	201	241

ハーディ・リトルウッドの関数論的方法(サークル・メソッドによる)は強力ではあったが、リーマン予想より弱い仮説を用いているので予想の範囲を出ていない。

3) 1938年にOxford University Pressから、G.H.ハーディ・E.M.ライト著の「An Introduction to the Theory of Numbers」の第22章の(22.20素数の組(双子素数)p, p+2の分布に関する予想)として載っているが、日本語訳の「数論入門」I ,IIが2001年7月に出版されたので、この予想をハーディ・リトルウッドがどのような推定方法で導き出したのか、その抜粋の概略を別紙(次のページ)に載せることにする。

4) アーレンストーフが、2004年にMangold関数を使った新たなゼータ関数

$$T(s) = \sum_{n \geqq 4\text{の偶数}} \frac{\Lambda(n-1)\Lambda(n+1)}{n^s}$$

をつくって、$\mathrm{Re}(s) \geq 1$で、$T(s) - \dfrac{C_2}{s-1}$が正則に解析接続できることを証明しようとし、双子素数予想の解決に向けた論考を発表したが、ゼータ関数の零点に問題があったようで、本人が論考を取り下げた(注2)。

以上、ここまでで簡単に述べた「2つの素数の差が偶数2kの個数についてのハーディ・リトルウッドの予想について」の数学史の筆をひとまずおくことにする。これ以降(別紙の後)の内容は、ハーディ・リトルウッドが辿った方法から離れて、筆者自身による「確率論的アプローチ」の方法で、「2つ素数の差が偶数2kの素数の組の個数について」の解明を試みると同時に、ハーディ・リトルウッドのいくつかの予想を私の方法で検証してみることにする。

(注1:[「国見－斉藤の予想」の確率論的アプローチ](「数学教室」2008年5月号, 高橋鋼一＆野崎昭弘共著)

(注2:「数学セミナー」(2004年10月号、"双子素数問題について";黒川重信著)

(別紙)「数論入門Ⅰ」(ハーディ・ライト著)からの双子素数予想の説明の概略(参考資料)

「双子素数に関する予想」： $P_2(x)\sim\dfrac{2C_2x}{(\log x)^2}$ ……………④

が成り立つ。ただし、$P_2(x)$を$p\leqq x$を満たす素数ペア(双子素数の組 p, p+2)の個数とする。

(説明)：素数をpで表すことにする。

xを任意の大きい正の数とし、$N=\prod_{p\leqq\sqrt{x}}p$とする。N以下で、Nと互いに素である任意の正の整数n(つまり、$\sqrt{x}$を超えない任意の素数pで割り切れないような整数)を「特別な整数」と呼ぶことにする。N以下の特別な整数全体の個数をS(N)で表し，x以下の特別な整数全体の個数をS(x)で表すことにする。エラトステネスの篩の方法より、オイラー関数φ(N)を使うと、

$$S(N)=\phi(N)=N\prod_{p\leqq\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{p}\right)=NB(x) \quad\text{……………⑤}$$

(ただし、$B(x)=\prod_{p\leqq\sqrt{x}}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$とおいた。)

メルテンスの定理により、

$$S(N)=NB(x)\sim N\times\frac{e^{-\gamma}}{\log\sqrt{x}} \quad (\text{ただし、}e^{-\gamma}=0.561494835\cdots\cdot)$$

$$\therefore\frac{S(N)}{N}=B(x)\sim\frac{e^{-\gamma}}{\log\sqrt{x}}=\frac{2e^{-\gamma}}{\log x} \quad\text{……………………⑥}$$

これは、区間($\sqrt{x}$, N)の範囲にある特別な整数の割合であるが、Nを法とする剰余系で考えているので、区間($N-\sqrt{x}$, N)、($2N-\sqrt{x}$, 2N)，($3N-\sqrt{x}$, 3N)……でも、⑥の式が成り立つ。

一方、S(x)については、素数定理より、

$$S(x)=\pi(x)-\pi(\sqrt{x})\sim\frac{x}{\log x} \quad\text{………………………⑦}$$

⑦より、$\dfrac{S(x)}{x}\sim\dfrac{1}{\log x}$ …………………………………⑧

となる。⑥と(⑦)を比較すると、

$$\frac{S(x)}{x}\sim\frac{S(N)}{N}\times\frac{1}{2}e^{\gamma} \quad (\text{ただし、}\gamma\text{はオイラー定数}) \quad\text{……⑨}$$

が成り立つ。$\sqrt{x}$以下の素数を使って篩をかけたのだから、$S(\sqrt{x})=0$である。したがって、区間(1,x)における特別な整数の割合は、区間(1,N)における 特別な整数の割合の約$\dfrac{1}{2}e^{\gamma}$倍になる。

次にn≦Nである特別な整数の組n, n+2の個数を評価する。n, n+2が特別な整数であるためには、$\sqrt{x}$以下のすべての各素数pについて、次の連立合同式

$n\not\equiv0$ and $n+2\not\equiv0 \pmod{p}$ ………………………⑩

⇔ $n\not\equiv0$ and $n+2\not\equiv0 \pmod{N}$ ……………………………⑪

が成立しなければならない。したがって、$\sqrt{x}$以下の各素数pについて、連立合同式⑩を満たす剰余の個数について考えよう。

p=2のとき、

$n\not\equiv0$ and $n+2\not\equiv0$ (mod 2)の解は、n≡1 (mod 2) の一通りである。

p=3のとき、

$n\not\equiv0$ and $n+2\not\equiv0$ (mod 3)の解の個数は、n≡2(mod 3)の一通りである。

p=5のとき、

$n\not\equiv0$ and $n+2\not\equiv0$ (mod 5)の解は、n≡1,2,4の3通りである。

p=7のとき、

$n\not\equiv0$ and $n+2\not\equiv0$ (mod 7)の解は、n≡1,2,3,4,6の5通りである。

…………………………………………………………

以上の結果をまとめると、$3\leqq p\leqq\sqrt{x}$の任意の素数pに対して、

$n\not\equiv0$ and $n+2\not\equiv0$ (modp)の解は、法pの剰余系で、n≡1,2,3,4,…，p-4,p-3,p-1(mod p)の(p-2)通りである(注3)。

(注3:n≡p-2(mod p)は、n+2≡p≡0(mod p)となり、剰余系からp-2と0の2個を除かなければならない。)

したがって、⑪において、Nを法としてのすべての解の個数(⑩を満たすすべての剰余の組の個数でもある。)は、

$$(2-1)\times\prod_{3\leqq p\leqq\sqrt{x}}(p-2)=\frac{1}{2}N\times\prod_{3\leqq p\leqq\sqrt{x}}\left(1-\frac{2}{p}\right)=NB_1(x) \quad\text{……⑫}$$

である(注4) (注4:$B_1(x)=\dfrac{1}{2}\times\prod_{3\leqq p\leqq\sqrt{x}}\left(1-\dfrac{2}{p}\right)$とおいた。)

そして、この⑫が、n≦Nを満たす特別な整数の組n,n+2の全体の個数である。したがって、区間(1,N)における特別な組の割合は$B_1(x)$であり、任意のrN個の引き続く区間においても明らかに同じことが成り立つ。しかしながら、⑨より、より小さい区間(1,x)においては、特別な整数の割合は、より長い区間(1,N)における特別な整数の割合の約$\dfrac{1}{2}e^{\gamma}$倍であった。したがって、区間(1,x)における特別な整数の組n, n+2の割合は、より長い区間(1,N)における割合の約 $\left(\dfrac{1}{2}e^{\gamma}\right)^2$であることが予想され る。(ここでは「予想する」だけで証明することはできない)。ところが、(1,x)における 特別な組とは、篩の方法により区間($\sqrt{x}$,x)における素数の組p,p+2のことである。ゆえに、

$$P_2(x)-P_2(\sqrt{x})\sim\left(\frac{1}{2}e^{\gamma}\right)^2 xB_1(x)=\frac{1}{4}e^{2\gamma}xB_1(x) \quad\text{………⑬}$$

であると予想されるのが当然である。メルテンスの定理より、

$$B(x)\sim\frac{2e^{-\gamma}}{\log x} \iff \frac{1}{2}e^{\gamma}\sim\frac{1}{(\log x)B(x)} \quad\text{………………⑭}$$

であるから、⑭の両辺を2乗して、

$$\frac{1}{4}e^{2\gamma}\sim\frac{1}{(\log x)^2\{B(x)\}^2} \quad\text{…………………⑮}$$

となる。⑮の漸近式の両辺に$B_1(x)$をかけて、

$$\frac{1}{4}e^{2\gamma}B_1(x)\sim\frac{B_1(x)}{(\log x)^2\{B(x)\}^2} \quad\text{…………………⑯}$$

となる。ところが、x→∞のとき、

$$\frac{B_1(x)}{\{B(x)\}^2}=\frac{\frac{1}{2}\prod_{3\leqq p\leqq\sqrt{x}}(1-2/p)}{\prod_{p\leqq\sqrt{x}}(1-1/p)^2}=2\prod_{3\leqq p\leqq\sqrt{x}}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\to 2C_2 \quad\text{……⑰}$$

となる。

$P_2(\sqrt{x})=O(\sqrt{x})$ ……………………………⑱

だから、⑬, ⑯, ⑰, ⑱より、

$$P_2(x)\sim\frac{2C_2x}{(\log x)^2} \quad\text{…………………………⑲}$$

となり、漸近式④の推定が得られた。

Ⅱ.「ハーディ・リトルウッドの予想」における確率論的アプローチについて

筆者にとって、「数論入門」,「PARTITIO NUMERORUM';Ⅲ」に載っているハーディ・リトルウッドの推定方法を掘り下げてみようと考えました。この点について、野崎昭弘氏と私が協同研究した確率論的アプローチとしての論考「数学教室」について後でふれるが、この拙文では「数学教室」の論考と異なる視点から 書いたので、文責は私個人に限ります。

私は、ハーディ・リトルウッドが「数論入門」(前頁別紙)の中で述べたこと(「ここでは、「予想する」だけで証明することはできない。」)という箇所について、もう少し掘り下げて研究してみようと考えました。特に、前頁の式⑮～⑲の式が私のセンスにはなじめず、さらに⑯の式から結論⑲の漸化式:$P_2(x) \sim \dfrac{2C_2 x}{(\log x)^2}$を導いたことは、何か技巧的なものを感じました。もっと、直接、正攻法で研究した方が良いのではないか考え、以下の研究論考を報告します。筆者が試みた「確率論的アプローチの方法」で得られた結果とハーディ・リトルウッドの予想との比較・検証します。次の証明は、筆者が試みた「確率論的アプローチとしての証明」です。

(ハーディ・リトルウッドの予想):「任意の正の偶数2kを選んで固定する。自然数nとn−2k が共に素数となる組(素数ペア)は、確率論的に無限個存在する。」(注5)

(注5:偶数2kは定数だから、$P_{2k}(x)=\#\{(n \mid n$とn+2kは共に素数で、$n\le x\} \sim \#\{n \mid n-2k$とnは共に素数で、$n\le x\}$である。)

[確率論的アプローチとしての証明] xを2kより十分大きな自然数にとる。$1<n\leqq x$を満たす素数nで、かつn−2kも素数となる組の個数の概数を、区間$(\sqrt{x},x]$の範囲内で求める。それを求めるには、エラトステネスの篩の方法より、差が2kの自然数のペアn,n−2kが$\sqrt{x}$以下の任意の素数pで割り切れない組の個数を求めればよい(注6)。

(注6:実は、差が2kの素数のペアn, n−2kが存在する範囲は、区間$(1,\sqrt{x}]$内の任意の素数pを使って篩にかけることより、$\sqrt{x}$以下の素数ペアの個数を計算に入れないで除外しているので、区間$(\sqrt{x},x]$ の範囲で素数ペア(nとn−2kが共に素数)の個数を調べることにする。)

$p\leqq\sqrt{x}$を満たす任意の各素数pについて、連立合同式

$$n\not\equiv 0 \pmod p \text{ and } n-2k\not\equiv 0 \pmod p \qquad \cdots\cdots(1)$$

を解く。(1)の連立合同式を満たす解の個数は、偶数2kが素数pで割り切れるかどうかによって次のように分類して求める。

まず、$\sqrt{x}$以下の各素数pについて、pを2の場合と3以上の素数の場合に分けて調べる。

(Aⅰ)素数p=2のとき、(1)を満たす組n,n−2kは、mod2で考えると、$2\mid 2k$より、$n-2k\not\equiv 0 \pmod 2 \Leftrightarrow n\not\equiv 0$となり、mod 2で考えると$n\equiv 1$の場合だけが解で、素数の組を剰余の組で表すと{1,1−2k}となる。完全剰余系の組で考えると、解は{1,1}のただ1組である。 **(★以後、区間$(\sqrt{x},x]$内の2つの素数からなる組の個数については、一方の剰余nだけの個数で組の個数を計算することにする。)**

(Aⅱ)pが3以上の素数の場合、

(a1) $p \mid k$のとき、(1)の解の個数は、mod pの剰余系で、(p−1)個である。
この場合は、$p \mid 2k$より、$n-2k\not\equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow n\not\equiv 0 \pmod p$となるから、連立合同式$(1)\Leftrightarrow n\not\equiv 0 \pmod p$となり、p個の剰余系から、$n\equiv 0 \pmod p$を除いた(p−1)個の剰余たちが解になる。
したがって、pの剰余系で考えると、解の個数(剰余の組の個数でもある。)は、(p−1)個存在する。

(a2) $p\nmid k$のとき、(1)の解の個数は、mod pの剰余系で、(p−2)個存在する。
なぜなら、2kをpで割った余りをr($r\not\equiv 0 \pmod p$)とすると、$2k\equiv r \pmod p$より、

$$n\not\equiv 0 \pmod p \text{ and } n-2k\not\equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow n\not\equiv 0 \pmod p \text{ and } n-r\not\equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow n\not\equiv 0 \pmod p \text{ and } n\not\equiv r \pmod p$$

となり、$r\not\equiv 0 \pmod p$となるから、mod pの剰余系で考えると、連立合同式の解の個数について、p個からなる剰余系から、$n\equiv 0 \pmod p$ と$n\equiv r \pmod p$の2個の剰余を除いた残りの(p−2)個が、(1)を満たす解の個数となる。

ここで、$\sqrt{x}$以下の任意の各素数pで割り切れない自然数のペアn, n−2kの総個数((1)を満たす)は、$N=\prod_{p\leqq\sqrt{x}} p$ とおくと、mod Nの剰余系で考えた個数になる。つまり、(1)の連立合同式を解くことは、次の連立合同式

$n \not\equiv 0 \pmod N$ and $n-2k \not\equiv 0 \pmod N$ ······························(2)

(2)を解くことと同値である。これは、

「一次の連立合同式の解の個数についての一命題」(以後、「合同式の一命題」と呼ぶことにする)の応用として、

「2以外の任意の異なる素数p, qについて、pおよびqが偶数2kを割り切らないとき、つぎの連立合同式

$$\begin{cases} X \not\equiv 0 \pmod{p} \\ X-2k \not\equiv 0 \pmod{p} \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} X \not\equiv 0 \pmod{q} \\ X-2k \not\equiv 0 \pmod{q} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

を満たす解の個数が、modpqの剰余系(pq個の剰余からなる)の中に、$(p-2)(q-2)$個存在する。」を使うことによって得られる。この命題から、(3)を満たす自然数の組X, X-2kの個数が,modpqで、$(p-2)(q-2)$個存在することがいえる(注7)。

(参考:$p=2$で、qが2以外の素数の場合、(3)の解の個数は、$(2-1)(q-2)=(q-2)$個存在する。)

(注7:次の仮定条件(ア), (イ)

(ア):素数pについての合同式:$X \not\equiv a \pmod p$をみたす解が存在する確率は、余りの一様性を仮定して、およそ$(1-\frac{1}{p})$である。同様に、pが2より大きい素数のとき、連立合同式: $X \not\equiv a \pmod{p}$ and $X \not\equiv b \pmod{p}$　(ただし、$a \not\equiv b \pmod p$)) ······················(4)

を満たす解が存在する確率は、余りの一様性を仮定してmod$p$で考えると、およそ$\frac{p-2}{p}=1-\frac{2}{p}$である。)

(イ):任意の自然数が異なる素数p, qで割り切れるか否かという事象は、互いに独立である。

を使うと、pおよびqが2kを割り切らず、2より大きい異なる素数の場合、(3)を満たす解の個数は、mod M　(ただし、$M=pq$)で考えると、

$$M\left(1-\frac{2}{p}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)=pq\left(1-\frac{2}{p}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)=(p-2)(q-2)\ (\text{個})$$

となり、「合同式の一命題」の結論と一致する。逆に、この命題から、仮定条件(ア), (イ)を成立させる根拠を蓋然的に与えるものと考える。

また、$p=2$で、qが3以上の素数の場合は、(3)を満たす解の個数は、$M(1-1/2)(1-2/q)=2q(1/2)(1-2/q)=(q-2)$(個)となる。)

(2)を満たす自然数の組n, n−2kを、差が2kの特別な整数のペア(簡略して、2k差の特別な整数のペア)と呼ぶことにする。「合同式の一命題」と(A i), (A ii)より、2k差の特別な整数のペアの総数はmod Nで考えて、次のの結果を得る。

(B i): 偶数2kが、2以外の素因数を持つとき、

$$(\text{区間}(\sqrt{x}, N]\text{で求めた}2k\text{差の特別な整数のペアの個数}) = (2-1)\times \prod_{\substack{2<p\leqq\sqrt{x} \\ p\nmid k}} (p-2) \times \prod_{\substack{2<p\leqq\sqrt{x} \\ p\mid k}} (p-1)$$

$$=\Big\{\prod_{\substack{2<p\leqq\sqrt{x} \\ p\nmid k}} (p-2) \times \prod_{\substack{2<p\leqq\sqrt{x} \\ p\mid k}} (p-2)\Big\} \times \prod_{\substack{2<p\leqq\sqrt{x} \\ p\mid k}} \left(\frac{p-1}{p-2}\right) = \prod_{2<p\leqq\sqrt{x}} (p-2) \times \prod_{\substack{2<p\leqq\sqrt{x} \\ p\mid k}} \left(\frac{p-1}{p-2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

(B ii):偶数2kが、2の素因数しか持たないとき(つまり、$2k=2^{\ell}$型で、ℓは1以上の整数とする。)、

$$(\text{区間}(\sqrt{x}, N]\text{で求めた}2k\text{差の特別な整数のペアの個数}) = (2-1)\times \prod_{2<p\leqq\sqrt{x}} (p-2) = \prod_{2<p\leqq\sqrt{x}} (p-2) \cdots\cdots(6)$$

ところで、(5), (6)の2k差の特別な整数のペアn, n−2kの総個数は、区間$(\sqrt{x}, N]$の範囲で求めたペアの個数であって、この2k差の特別な整数のペアの2つの自然数がすべて素数となるわけではない。なぜならば、mod Nで考えられた解の総個数は、2k差の特別な整数のペアの総個数でもあるが、後述するように、Nの方がxよりはるかにorderが大きいので、xを超えた区間(x, N]では、エラトステネスの篩の方法が十分機能しない。しかし、篩の方法から、区間$(\sqrt{x}, x]$で求めた2k差の特別な整数のペアの2つの整数は、両方とも素数になるから、この範囲にある2k差の特別な整数のペアは、2k差の素数ペアである。区間$(\sqrt{x}, N]$, および$(\sqrt{x}, x]$のそれぞれの範囲で求めた2k差の特別な整数のペアの個数を、それぞれ$S_{2k}(N)$、および$S_{2k}(x)$とおくことにする。したがって、区間$(\sqrt{x}, N]$ (区間$(1, x] \subset (1, N]$となることは、後述する。)で考えれば、2k差の特別な整数のペアの総個数は、(5)、または、(6)の個数でどちらも、

$S_{2k}(N)-S_{2k}(\sqrt{x}) \sim S_{2k}(N)$であらわされる。(なぜならば、$S_{2k}(\sqrt{x})$については、$S_{2k}(\sqrt{x}) \leqq \pi(\sqrt{x})$で、$\pi(\sqrt{x})=O(\sqrt{x})$だから、別紙の右欄の⑱の式:$P_2(\sqrt{x})=O(\sqrt{x})$と同様に、$S_{2k}(\sqrt{x})=O(\sqrt{x})$となる。)

(Bⅰ)の場合、kが定数より、xが十分大きいとき、2より大きくかつ$\sqrt{x}$以下の奇素数pでkを割り切れる素因数は有限個だから、(5)の最後の項 $\prod_{\substack{2<p\leq\sqrt{x}\\ p|k}}\left(\frac{p-1}{p-2}\right)$は1より大きいの定数となる。この定数は2kのみに関係するから、E(2k)とおくことにする。(5)と$S_{2k}(\sqrt{x})=O(\sqrt{x})$より、$S_{2k}(N)-S_{2k}(\sqrt{x}) \sim S_{2k}(N)$となる。

したがって、(5)より、

$$S_{2k}(N) \sim \prod_{2<p\leq\sqrt{x}}(p-2)\times\prod_{\substack{2<p\leq\sqrt{x}\\ p|k}}\left(\frac{p-1}{p-2}\right)=E(2k)\times\prod_{2<p\leq\sqrt{x}}(p-2)=E(2k)\times\prod_{2<p\leq\sqrt{x}}p\left(1-\frac{2}{p}\right) \quad\cdots\cdots(7)$$

$$\therefore S_{2k}(N) \sim E(2k)\times\frac{1}{2}\times\prod_{2\leq p\leq\sqrt{x}}p\times\prod_{2<p\leq\sqrt{x}}\left(1-\frac{2}{p}\right) \quad\cdots\cdots(8)$$

$$\therefore S_{2k}(N) \sim E(2k)\times\frac{1}{2}\times N\times\prod_{2<p\leq\sqrt{x}}\left(1-\frac{2}{p}\right)=\frac{E(2k)\cdot N}{2}\times\prod_{2<p\leq\sqrt{x}}\left(1-\frac{2}{p}\right) \quad\cdots\cdots(9)$$

となる。

(Bⅱ)の場合、(6)より

$$S_{2k}(N) \sim \prod_{2<p\leq\sqrt{x}}(p-2)=\prod_{2<p\leq\sqrt{x}}p\left(1-\frac{2}{p}\right)=\frac{1}{2}\times\prod_{2\leq p\leq\sqrt{x}}p\times\prod_{2<p\leq\sqrt{x}}\left(1-\frac{2}{p}\right)$$

$$=\frac{N}{2}\times\prod_{2<p\leq\sqrt{x}}\left(1-\frac{2}{p}\right)=\frac{E(2k)\cdot N}{2}\times\prod_{2<p\leq\sqrt{x}}\left(1-\frac{2}{p}\right)$$ (ただし、この(Bⅱ)では、E(2k)＝1とする。)$\cdots\cdots$(10)

(Bⅰ)および(Bⅱ)のどちらの場合も、区間($\sqrt{x}$, N]で求めた2k差の特別な整数のペアの個数は、(9),(10)より同じ形の式になる。メルテンスの定理の系(注8)(下の(12)の漸近式)より、

$$S_{2k}(N) \sim \frac{E(2k)\cdot N}{2}\times\prod_{2<p\leq\sqrt{x}}\left(1-\frac{2}{p}\right)\sim\frac{E(2k)\cdot N}{2}\times\frac{c(2)}{(\log\sqrt{x})^2}=\frac{E(2k)\cdot N}{2}\times\frac{c(2)}{\left(\frac{1}{2}\log x\right)^2}$$

$$=\frac{2\cdot E(2k)\cdot c(2)}{(\log x)^2}\times N$$ (ただしc(2)は定数で、対数はすべて自然対数である。) $\cdots\cdots$(11)

(注8:「メルテンスの定理の系」(「整数論(解析的整数論入門)」(三井孝美著(近代数学新書、至文堂)33ページ参照))

a＞1とするとき、

$$\prod_{a<p\leq x}\left(1-\frac{a}{p}\right)=\frac{c(a)}{(\log x)^a}\left(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right) \quad\cdots\cdots(12)$$

である。(ただし、c(a)は、aのみに関係する定数である。)

この(12)の式から、

$$\prod_{a<p\leq x}\left(1-\frac{a}{p}\right) \sim \frac{c(a)}{(\log x)^2} \quad\cdots\cdots(13)$$

が得られ、(13)において、a＝2とすると、$\prod_{2<p\leq\sqrt{x}}\left(1-\frac{2}{p}\right) \sim \frac{c(2)}{(\log(\sqrt{x}))^2}=\frac{4c(2)}{(\log x)^2}$ がいえる。

ここで、前ページでに述べた"後述"しなければならないこと:「xとNとの大小関係」を調べる。

まず、2つのChebyshev' functions $\vartheta(x)=\sum_{p\leq x}\log p$、$\phi(x)=\sum_{p^m\leq x}\log p=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)$について、素数定理と同値な式 $\vartheta(x)\sim x$ (証明はセルバーグによる), $\phi(x)\sim x$ が成り立つ。(ただし、1≦xで考える。)

$\Lambda(x)$はMangoldの関数で、

$n=p^m$のとき、$\Lambda(n)=\log p$

$n=1$か、または、nが異なる素因数をもつとき、$\Lambda(n)=0$

で定義される。Chebyshev' functions $\vartheta(x)$, $\phi(x)$を使うと、

$$\log N=\log\left(\prod_{p\leq\sqrt{x}}p\right)=\sum_{p\leq\sqrt{x}}\log p=\vartheta(\sqrt{x})\sim\phi(\sqrt{x})\sim\sqrt{x} \quad\cdots\cdots(14)$$

が成り立つから、xが十分大きな数のとき、(14)から

$(\log N)^2 \sim x, \quad N \sim \exp(\sqrt{x})$ ……(15)

が成立する。また、$N > (\log N)^2$が、$N > 1$で成り立つから、xが十分大のとき、

$N > x$

が成り立つ。この結果から、$(1,x] \subset (1,N]$が成り立っている(後述終わり)。これより、論述を先に進めることにする。

(11)の最右辺の分数式の分子$2 \cdot E(2k) \cdot c(2)$は正の定数より、これを$K(2k)$とおくと、(11)の式は十分大きな数xに対して

$$S_{2k}(N) \sim \frac{K(2k)}{(\log x)^2} N \quad \cdots\cdots(16)$$

となる。(11)は、区間$(\sqrt{x}, N]$の範囲で求めた2k差の特別な整数のペアの個数である。

ここで、区間$(\sqrt{x}, x]$で考えると、どのくらいの2k差の特別な整数のペアが存在するのかという問題に、確率論的にアプローチする。区間$(\sqrt{x}, N]$で求めた2k差の特別な整数のペアのうち、区間$(\sqrt{x}, x]$の範囲で考える2k差の特別な整数のペアは、$\sqrt{x}$以下の素数pで篩にかけられているのだから、2k差の2個の素数の組(素数ペア)となる。したがって、区間$(\sqrt{x}, N]$の範囲で求めた2k差の特別な整数の個数($S_{2k}(N)$)に対する区間$(\sqrt{x}, x]$で考えた2k差の特別な整数の組の個数($S_{2k}(x)$)との比の値(割合)がわかれば、およその2k差の素数ペアの個数を求めることができる。単純に考えれば、その割合は、区間の巾で分けたおよその割合として考えると、$S_{2k}(x):S_{2k}(N) \fallingdotseq (x-\sqrt{x}):(N-\sqrt{x})$となり、比の値は、およそ$\dfrac{x-\sqrt{x}}{N-\sqrt{x}} \sim \dfrac{x}{N}$であると考えられる。しかし、このことは、次の点が考慮されていないので不十分である。その点とは、

〈＊〉:区間$(\sqrt{x}, x]$で考える特別な整数(素数)のペアの分布のあり方が、区間$(\sqrt{x}, N]$で考える特別な整数のペアの分布のあり方と比較して、密なのか、あるいは、疎なのか、それぞれの分布の特徴を考慮しなければならない。つまり、区間$(\sqrt{x}, x]$の範囲に特別な整数のペアが密に集まって分布していれば、その個数は、区間$(\sqrt{x}, N]$の範囲に分布している特別な整数のペアの総数を区間の巾の比に分けた個数よりも多くなる。その反対に、疎(まばらに)に分布していれば、少なくなる。だから、単に$S_{2k}(N)$を区間の比に分けるわけにはいかないと考える。

〈＊〉については、1. はじめにの3)でハーディ・リトルウッドが、素数定理とメルテンスの定理の比較から導き出された漸近式(別紙の中の⑨)の式によると、区間$(\sqrt{x}, x]$の範囲での特別な整数の分布の割合($S(x)/x$)と区間$(\sqrt{x}, N]$の範囲での特別な整数の分布の割合($S(N)/N$)との関係は、

$$\frac{S(x)}{x} \sim \frac{S(N)}{N} \times \frac{1}{2}e^{\gamma} \Leftrightarrow S(x) \sim S(N) \times \frac{x}{N} \times \frac{1}{2}e^{\gamma} \Leftrightarrow \frac{S(x)/x}{S(N)/N} \sim \frac{1}{2}e^{\gamma} \fallingdotseq 0.89048\cdots, \quad \cdots\cdots(17)$$

であった。(17)の最後の漸近式より、区間$(\sqrt{x}, x]$の範囲の分布のあり方は、区間$(\sqrt{x}, N]$の範囲の分布のあり方と比較すると偏りがあり、分布の割合の比の値をみると、1より小さい0.89048…を掛けることから、区間$(\sqrt{x}, N]$の分布のあり方より、疎(まばら)である。この値を疎率と呼ぶことにする。では、区間$(\sqrt{x}, x]$および区間$(\sqrt{x}, N]$で考えるそれぞれの2k差の特別な整数のペアの分布の確率を$\dfrac{S_{2k}(x)}{x}$および$\dfrac{S_{2k}(N)}{N}$とおき、その間にどのような関係があるのだろうか？

この点を確率論的(蓋然的に)に考えを進めるいくつかの式の意味を提示することにする。

(b1):メルテンスの定理と素数定理から、区間$(1, N]$の範囲で特別な整数の中に素数となる整数があるが、xが十分大きいとき、下の式の比の値に分布している。 $x \sim (\log N)^2$より、

$$\frac{\pi(N)}{S(N)} \sim \frac{N/\log N}{(2e^{-\gamma}N)/\log x} = \frac{\log x}{\log N} \times \frac{1}{2}e^{\gamma} \sim \frac{2\log(\log N)}{\log N} \times \frac{1}{2}e^{\gamma}$$

(b2):領域$(\sqrt{x}, x] \times (\sqrt{x}, x]$内にある異なる2つの特別な整数からなる組(2k差以外の組も含む)の総個数は、

$((S(x))^2-S(x))$ (個)である。同様に、領域$(\sqrt{x}, N]\times(\sqrt{x}, N]$内にある異なる2つの特別な整数からなる組(2k差以外の組も含む)の個数は、$(S(N))^2-S(N))$ (個)である。これら2つの領域でのそれぞれの分布は、

$\frac{(S(x))^2-S(x)}{(x-[\sqrt{x}])^2}\sim\frac{(S(x))^2}{x^2}$および$\frac{(S(N))^2-S(N)}{(N-[\sqrt{N}])^2}\sim\frac{(S(N))^2}{N^2}$となる。$\frac{(S(x))^2}{x^2}$と$\frac{(S(N))^2}{N}$の関係は、(17)のはじめの漸近式の両辺を2乗して、

$$\{\frac{S(x)}{x}\}^2\sim\{\frac{S(N)}{N}\}^2\times(\frac{1}{2}e^{\gamma})^2 \quad\cdots\cdots(18)$$

$$\Leftrightarrow\frac{(S(x))^2}{x}\sim\frac{(S(N))^2}{N}\times\frac{x}{N}\times(\frac{1}{2}e^{\gamma})^2 \quad\cdots\cdots(19)$$

$$\Leftrightarrow\frac{S^2(x)-S(x)}{x}\sim\frac{S^2(N)-S(N)}{N}\times\frac{x}{N}\times(\frac{1}{2}e^{\gamma})^2 \quad\cdots\cdots(20)$$

が成り立っている。

この(18)の漸近式は、2つの領域内にあるそれぞれの特別な整数からなるのすべての組の分布の確率(割合)は、疎率の2乗$(e^{\gamma}/2)^2=0.792956\cdots$倍の違いがあるだけである。この疎率の2乗倍は、区間$(\sqrt{x}, N]$での特別な整数の組の分布からみると、区間$(\sqrt{x}, x]$での2つの特別な整数からなる組の分布の疎率×疎率を意味する。

さらに、(18)の左辺は、領域$(\sqrt{x}, x]\times(\sqrt{x}, x]$の範囲にある整数の格子点のうち、2つの特別な整数からなる格子点の分布(割合)を表しているが、それが、(18)の右辺では領域$(\sqrt{x}, N]\times(\sqrt{x}, N]$の範囲にある整数の格子点のうち、2つの特別な整数からなる格子点の分布の確率(割合)に疎率の2乗$(=(\frac{1}{2}e^{\gamma})^2)$を掛けたものに漸近的に等しいことを表している。このことの意味は、十分大きなxに対して、2つの特別な整数がそれぞれ両方とも区間$(\sqrt{x}, x]$の範囲に存在することは、区間$(\sqrt{x}, N]$から考えると、互いに独立にまばらになって存在していることを意味している。だから、疎となる率が2回掛け合わされ、$(\frac{1}{2}e^{\gamma})\times(\frac{1}{2}e^{\gamma})$倍が現れたのである。また、(18)の左辺の式にでてくる$\frac{S(x)}{x}$は、区間$(\sqrt{x}, x]$に存在する整数のうち、特別な整数(素数でもある)となるものの分布の確率(割合)を意味し、$(\frac{S(x)}{x})^2$は、特別な整数のペアを組む場合の分布の確率(割合)になっている。(18)の右辺にでてくる$(\frac{S(N)}{N})^2$も特別な整数のペアを組む場合の分布の確率(割合)になっている。それらが疎率の2乗と関連していることは、疎率は区間に関係し、ペアを組むことに影響されないものと考えられる。

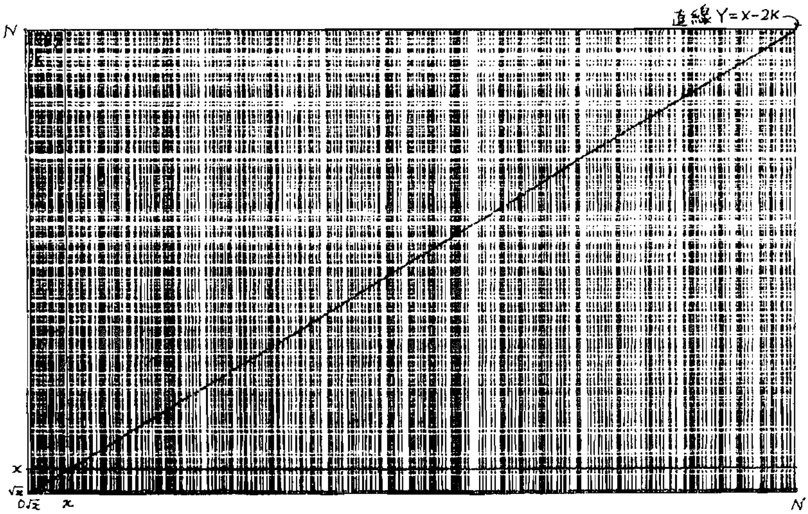
また、(19)および(20)は漸近式としては同一である。(20)の漸近式は、それぞれの領域で異なる2つの特別な整数からなる組について、区間$(\sqrt{x}, x]$で考えた異なる2つの特別な整数からなる組の分布の割合が、区間$(\sqrt{x}, N]$で考えた異なる2つの特別な整数からなる組の分布の割合に、区間の巾の比の値(x/N)と$(\frac{1}{2}e^{\gamma})^2$とを掛けた値に漸近的に等しいことを意味している。

さらに、$\frac{(S(x))^2-S(x)}{x-\sqrt{x}}\sim S(x)\times\frac{S(x)-1}{x}$で、$S(x)$は区間$(\sqrt{x}, x]$の範囲にある特別な整数n(素数でもある)の個数であるが、$\frac{S(x)-1}{x}$は、区間$(\sqrt{x}, x]$の範囲にある整数から、nと異なる特別な整数$(S(x)-1$個ある)を1個(例えば、それをmとする)をat randomに選んだとき、mがn-2kの場合もあれば、そうでない場合もあるが、mを選ぶ確率を表している。

したがって、$S(x)\times\frac{S(x)-1}{x}$は、区間$(\sqrt{x}, x]$の範囲で考えた特別な整数のペア(素数ペアでもあるが、2k差の素数

ペアとはかぎらない。)の個数のうち、平均的なかつ部分的な個数を表している。ここで平均的なかつ部分的なという意味は、割合$\frac{S(x)-1}{x}$は、区間$(\sqrt{x},\ x]$の中からat randomに整数を選んだとき、それがn以外の特別な整数のうちの一つ(例えばm)になるおよその(平均的)割合であるという意味である。部分的というのは偶数2kによってn-2kが特別な整数となる場合があるのかどうかが考慮されていないからである。この平均的確率には、n-2kが特別な整数の仲間であるという保証がなく、n-2k以外の他のすべての特別な整数の総数がS(x)-1個となる場合がふくまれている場合もあるからである。そのことは、(9), (10)の式の中のD(2k)の因子$E(2k)=\prod_{p|k}(\frac{p-1}{p-2})$(この定数は1以上である)が、素数ペアの個数に関係するからである。(下図1参照)

(図1 : x=121, N=2310の場合,特別な整数の組である格子点全体)



(区間(1,2310]の範囲にある特別な整数からなる組(格子点)をパソコンを使ってプリントアウトしたら、格子点の集まりが黒い帯状の縞模様になってしまいました。格子点の総個数は、$(343)^2=117469$個であった。)

つまり、$S(x)\times\frac{S(x)-1}{x}$は、区間$(\sqrt{x},\ x]$の範囲にある特別な2つの整数からなる組(それらは領域$(\sqrt{x},\ x]\times(\sqrt{x},\ x]$で考えると、格子点)の個数を表しているが、それらが直線 : Y=X-2k上にあるかどうかが考慮されていないのである。

区間$(\sqrt{x},x]$の範囲からat randomに特別な整数(それをnとすると、それは素数でもある)を選んで取り出す仕方は、S(x)通りあり,その各々の特別な整数nに対して、X=nの直線上にY座標がn以外の特別な整数(素数でもある)の1個(それをmとする)を取り出して格子点(n,m)をつくる確率(割合)が約$\frac{S(x)-1}{x}$だから、図1のように格子点が、直線Y=X-2k上にあるかどうか考慮されていない。しかし、たまたま、n-2k が特別な整数の場合には、格子点は、素数ペアの格子点になる。ところで、$S(x)\sim\pi(x)$であるから、

$$\frac{(S(x))^2-S(x)}{x}\sim\frac{(\frac{x}{\log x})^2-\frac{x}{\log x}}{x}\sim\frac{x}{(\log x)^2}$$

となり、素数ペアの個数について、変数xによる変動する部分を表していると考えられる。同様に、

$$\frac{S^2(N)-S(N)}{N}\sim\frac{(\frac{2e^{-\gamma}N}{\log x})^2-\frac{2e^{-\gamma}N}{\log x}}{N}\sim\frac{4e^{-2\gamma}N}{(\log x)^2}$$

となり、(16)の漸近式と比較すると、定数倍($(K(2k)\cdot\frac{e^{2\gamma}}{4}$倍)の違いを無視すると$S_{2k}(N)$に一致する。だから、(20)の両辺に$K(2k)\cdot\frac{e^{2\gamma}}{4}=2\cdot E(2k)\cdot c(2)\cdot\frac{e^{2\gamma}}{4}=\frac{e^{2\gamma}}{2}\cdot E(2k)\cdot c(2)$を掛ければ、(20)の漸近式の左辺は漸近的に$S_{2k}(x)$となり、

$$\therefore\ (K(2k)\cdot\frac{e^{2\gamma}}{4})\times\frac{S^2(x)-S(x)}{x}\ \sim\{(K(2k)\cdot\frac{e^{2\gamma}}{4})\times\frac{S^2(N)-S(N)}{N}\}\times\frac{x}{N}\times(\frac{1}{2}e^{\gamma})^2$$

(注:{ }の式は、漸近的に$S_{2k}(N)$と等しくなる。)

$$\therefore\ S_{2k}(x)\sim S_{2k}(N)\times\frac{x}{N}\times(\frac{1}{2}e^{\gamma})^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

が成り立つ。

(図2:x=121, 偶数2k=6,N=2310の場合、2k差の特別な整数の組である格子点全体)

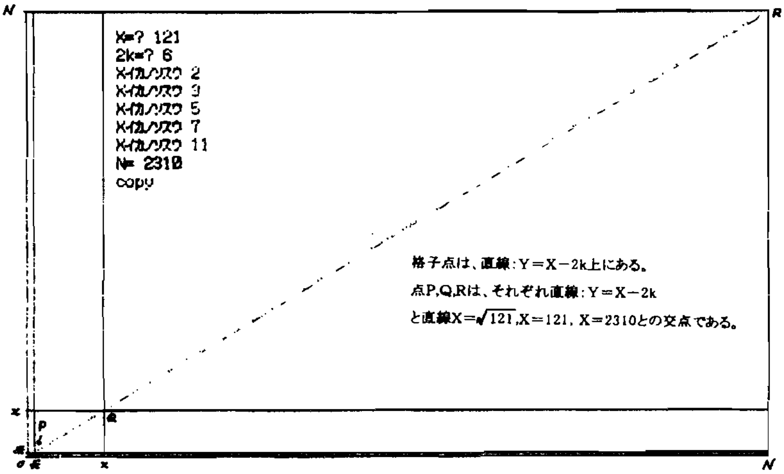


図2において、xを121のとり、Y=X-2k上の格子点を見安くすることにする。再び、領域$(\sqrt{x},\ x]\times(\sqrt{x},\ x]$および領域$(\sqrt{x},\ N]\times(\sqrt{x},\ N]$おいて、特別な整数のペアからなる格子点(n, n-2k)について、座標平面を用いて考えることにする。このことは、2k差の特別な整数からなるペアの組(それは,領域内の格子点である)で考えると、各領域内の格子点が、直線:Y=X−2kを領域内で分けられた各線分PQ, PR上にあり、各線分上にある格子点の個数が線分の比PQ:PR〜x:Nの値に疎率の2乗を掛けたものと関係しているものと考えられる。しかも、直線Y=X−2kのY切片(−2k)が異なれば、線分PQ上にある素数ペア(格子点(n, n-2k)でもある)の個数は、(9), (10)の式の中に出てくる2kが(B i)の場合(2kが2以外の奇素数を因数にもつ場合)は、$E(2k)=\prod_{\substack{2<p\leq\sqrt{x}\\ p|k}}\frac{p-1}{p-2}$倍(この定数は1より大になる)に、2kが(B ii)の場合(2kが2^{ℓ}(ℓは1以上の整数)の場合)は、E(2k)=1倍となり、それぞれの場合に影響されて多かったり、あるいは少なかったりする。

以上のことをふまえると、各線分(PQとPR)上の格子点のそれぞれの個数の分布が、上述した区間の線分どうしの巾の比の値に$(\frac{e^{\gamma}}{2})^2$を掛けた割合に関係している。そして、(b2)の結果をから、疎率$(\frac{1}{2}e^{\gamma})$を掛けるかどうかは、特別な整数どうしには無関係で、区間$(\sqrt{x},\ x]$に属するか、あるいは、区間$(\sqrt{x},\ N]$に属すかどうかに依存する。したがって、ハーディ・リトルウッドが「予想するが証明できない」ということは、(21)の結果式から、つぎのように考えられる。

区間$(\sqrt{x},\ x]$で考えた場合、2k差の特別な整数のペアn, n-2kの分布は、区間$(\sqrt{x},\ N]$で考えた特別な整数のペアの分布からみると、剰余nは$\frac{1}{2}e^{\gamma}$の割合で疎に分布し、さらに、剰余 n−2kが、$\frac{1}{2}e^{\gamma}$の割合で疎に分布していることがいえる。したがって、区間$(\sqrt{x},\ x]$で考える特別な整数のペア(大きい方の素数がx以下)となる分布は、区間$(\sqrt{x},\ N]$の範囲で考えた

特別な整数のペア（大きい方の特別な整数がN以下）の分布と比較すると、nとn−2kの出会い難さが$(\frac{1}{2}e^{\gamma})^2$（疎率の2乗）倍に疎に分布していることになる。このことより、区間$(\sqrt{x}, x]$で考えた特別な整数のペア（素数ペア）が分布する確率（割合）は、

$$\frac{S_{2k}(x)}{x} \sim \frac{S_{2k}(N)}{N} \times (\frac{1}{2}e^{\gamma})^2 \quad \cdots\cdots(22)$$

となる。この式の両辺にxを掛けると、すでに<＊>の(b2)で考察した結果の(21)の漸近式にほかならない。したがって、$S_{2k}(x)$を求めるには、$S_{2k}(N)$に単純に$\frac{x}{N}$を掛けるのではなくて、区間どうしの巾の比の値$\frac{x}{N}$に$(\frac{1}{2}e^{\gamma})^2=0.7929546\cdots$を掛けた割合$\frac{x}{N} \times (\frac{1}{2}e^{\gamma})^2$ を掛けねばならない。(21)，(22)より、

$$S_{2k}(x) \sim S_{2k}(N) \times \frac{x}{N} \times (\frac{1}{2}e^{\gamma})^2 \quad \cdots\cdots(23)$$

となる。このことから、$S_{2k}(x) \sim S_{2k}(x) - S_{2k}(\sqrt{x})$が求められる(注9)。つまり、(23)と(16)より、

$$S_{2k}(x) - S_{2k}(\sqrt{x}) \sim S_{2k}(x) \sim S_{2k}(N) \times \frac{x}{N} \times (\frac{1}{2}e^{\gamma})^2 \sim \frac{K(2k)N}{(\log x)^2} \times \frac{x}{N} \times (\frac{1}{2}e^{\gamma})^2 = \frac{K(2k)x}{(\log x)^2} \times (\frac{1}{2}e^{\gamma})^2 \cdots\cdots(24)$$

となる。ここで、$K(2k) \times (\frac{1}{2}e^{\gamma})^2 = \{2 \times E(2k) \times c(2)\} \times (\frac{1}{2}e^{\gamma})^2 = \frac{1}{2}e^{2\gamma} \times E(2k) \times c(2)$を$D(2k)$とおくことにする。

したがって、区間$(\sqrt{x}, x]$で考える2k差の特別な整数のペア（素数ペアでもある）のおよそ個数は、(24)より、

$$S_{2k}(x) - S_{2k}(\sqrt{x}) \sim \frac{D(2k)x}{(\log x)^2} \quad \cdots\cdots(25)$$

となり、D(2k)は正の定数より、(24),(25)から、

$$\lim_{x\to\infty} S_{2k}(x) = \lim_{x\to\infty}(S_{2k}(x) - S_{2k}(\sqrt{x})) = \lim_{x\to\infty}\frac{D(2k)x}{(\log x)^2} = \infty \quad \cdots\cdots(26)$$

となり、この最後の(26)の式から、$\lim_{x\to\infty} S_{2k}(x) = \infty$ が成立し、区間$(1,\infty)$にある2k差の素数ペアn,n−2kの個数は，確率論的に無限個存在することがいえる(注10)。

（注9：B ii でふれたように、$S_{2k}(\sqrt{x}) = O(\sqrt{x})$が成り立つ。）
（注10：$S_{2k}(x) \sim P_{2k}(x)$（ハーディ・リトルウッドが使用した「2k差の素数ペアの個数を表す記号」 が成立することは、後述する（**命題3**）で証明する。）

（確率論的アプローチとしての証明終）

尚、(25)と（注9）より、次の漸近式：$S_{2k}(x) \sim \frac{D(2k)x}{(\log x)^2}$ $\cdots\cdots(27)$

が成り立つ。(27)の漸近式が、これ以降よく引用することになる。

★上述した「確率論的アプローチとしての証明」が、当初、ハーディ・リトルウッドが予想した漸近式と若干異なるのではないかと思っていました。ところが、この証明方法で検証してみると、ハーディ・リトルウッドが予想した漸近式や定数・・・などと一致していることが計算してわかった。「確率論的アプローチとしての証明方法」が、双子素数定数、$P_{2k}(x)$と$P_2(x)$との漸近的関係式、3組素数予想、Goldbach予想に有効であることを報告をする。

この有効性の根拠は、区間$(\sqrt{x}, N]$の範囲で考えた篩の方法から2k差の特別な整数の組（ペア）の個数を正確に求め、その個数から部分区間$(\sqrt{x}, x]$の範囲で考えた2k差の特別な整数の組（素数ペアでもある）の個数の概数を求めるために、（注8）に載せた「メルテンスの定理の系」(12),(13)でa＝2とおいた漸近式）を使い、$\frac{1}{2}e^{\gamma}$の意味を確率と捉え展開したこと

が、これらの未解決な予想問題への確率論的アプローチとしての証明の糸口に繋がったと考える。以下、ハーディ・リトルウッドの予想の検証も兼ねて、この確率論的アプローチの方法で得られた結果(命題や追記および問題提起 ・・・・・等)を載せることにする。

(命題1):(双子素数定数について) 前頁で、$D(2k)=(\frac{1}{2}e^{2\gamma})\times E(2k)\times c(2)$とおいた。$2k=2$の場合、

$D(2)=(e^{2\gamma}/2)\times E(2)\times c(2)$となり、$E(2)=1$より、$D(2)=(e^{2\gamma}/2)\times c(2)$となる。$D(2)$は、双子素数定数の2倍($2C_2$)と

一致する。(つまり、$\frac{1}{4}e^{2\gamma}\times c(2)=C_2$が成立する。)

(証明) (注8)の「メルテンスの定理の系」((13)の漸近式)で$a=2$とおくと、次の漸近式が得られる。

$$\prod_{2<p\leqq\sqrt{x}}(1-\frac{2}{p})\sim\frac{c(2)}{(\log\sqrt{x})^2}=\frac{4c(2)}{(\log x)^2}$$

$$\therefore\ c(2)\sim(\log(\sqrt{x}))^2\times\prod_{2<p\leqq\sqrt{x}}(1-\frac{2}{p})=\frac{1}{4}(\log x)^2\times\prod_{2<p\leqq\sqrt{x}}(1-\frac{2}{p})\quad\cdots\cdots(28)$$

が成り立つ。まずはじめに試験的に、$x=100,500,1000,5000,10000,100000$の場合、(28)の右辺に代入した各値は、パソコンを使って計算すると、右の表の通りである。

x	㋐:c(2) の近似値	㋑:$\frac{1}{4}e^{2\gamma}\cdot c(2)$の近似値	$\lvert C_2-$㋑$\rvert$
100	0.812188	0.644028	0.016140
500	0.819157	0.649554	0.010613
1000	0.826109	0.655067	0.005101
5000	0.829799	0.657993	0.002175
10000	0.831807	0.658463	0.001705
100000	0.831919	0.659674	0.000494

$x=100000$までの$c(2)$の近似値が0.831919・・・であった。$\frac{1}{4}e^{2\gamma}\cdot c(2)$の近似値は、0.659674・・・となり、双子素数定数$C_2=0.660168158\cdots$と比較すると、約0.000494の誤差があった。実は、(28)の右辺の式を使って、$\frac{1}{4}e^{2\gamma}\cdot c(2)$を計算すると、$C_2$となることがわかった。

その計算は次の通り。メルテンスの定理により、

$$\prod_{p\leqq\sqrt{x}}(1-\frac{1}{p})\sim\frac{e^{-\gamma}}{\log(\sqrt{x})}=\frac{2e^{-\gamma}}{\log x}\quad\Leftrightarrow\frac{1}{2}e^{\gamma}\sim\frac{1}{\prod_{p\leqq\sqrt{x}}(1-\frac{1}{p})\times\log x}\quad\cdots\cdots(29)$$

だから、この両辺を2乗して、

$$(\frac{1}{2}e^{\gamma})^2=\frac{1}{4}e^{2\gamma}\sim\frac{1}{\prod_{p\leqq\sqrt{x}}(1-\frac{1}{p})^2\times(\log x)^2}\quad\cdots\cdots(30)$$

(28),(30)について、それぞれの辺々を掛けると、

$$\frac{1}{4}e^{2\gamma}\cdot c(2)\sim\frac{\frac{1}{4}\times(\log x)^2\times\prod_{2<p\leqq\sqrt{x}}(1-\frac{2}{p})}{\prod_{p\leqq\sqrt{x}}(1-\frac{1}{p})^2\times(\log x)^2}=\frac{\frac{1}{4}\times(\log x)^2\times\prod_{2<p\leqq\sqrt{x}}(1-\frac{2}{p})}{\frac{1}{4}\times\prod_{2<p\leqq\sqrt{x}}(1-\frac{1}{p})^2\times(\log x)^2}=\frac{\prod_{2<p\leqq\sqrt{x}}(1-\frac{2}{p})}{\prod_{2<p\leqq\sqrt{x}}(1-\frac{1}{p})^2}$$

$$=\prod_{2<p\leqq\sqrt{x}}\frac{1-\frac{2}{p}}{(1-\frac{1}{p})^2}=\prod_{2<p\leqq\sqrt{x}}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}=\prod_{2<p\leqq\sqrt{x}}\{\frac{(p-1)^2-1}{(p-1)^2}\}=\prod_{2<p\leqq\sqrt{x}}\{1-\frac{1}{(p-1)^2}\}\quad\cdots\cdots(31)$$

となり、(31)の最後の式について、

$$\lim_{x\to\infty}\prod_{2<p\leqq\sqrt{x}}\{1-\frac{1}{(p-1)^2}\}=C_2\quad\cdots\cdots(32)$$

となる。(31)の漸近式について途中にxの漸近式が出てくるが、極限操作により、(31)のはじめの式は定数で、(32)の右辺も定数だから、$\frac{1}{4}e^{2\gamma}\cdot c(2)=C_2$が成立する。双子素数定数$C_2$が、確率の2乗$(\frac{1}{4}e^{2\gamma})$とc(2)の積で表されるとは意外な発見であった。しかも、この証明は確率論的ではなく、解析的である。

(証明終)

(命題2)：ハーディ・リトルウッドの予想した式(1．はじめにの2)の③の(ｉ)の漸近式)

$$P_2(x)\sim\frac{2C_2x}{(\log x)^2}$$

の右辺について、

$$\frac{2C_2x}{(\log x)^2}\sim\frac{D(2)x}{(\log x)^2}$$

が成り立つ。つまり、

$$P_2(x)\sim S_2(x)$$

が成立する。

(証明)(命題1)の結果：$2C_2=\frac{1}{2}e^{2\gamma}\cdot c(2)=D(2)$と(27)で2k＝2の場合の漸近式より、あきらか。つまり、双子素数予想は成り立つ。

(証明終)

(命題3) 1．はじめにの2)の②のハーディ・リトルウッドの予想した漸近式(ここでは、nをxに替えて表すことにする)

$$P_{2k}(x)\sim2C_2\frac{x}{(\log x)^2}\prod_p\left(\frac{p-1}{p-2}\right)$$ (ただし、pは2kのodd prime divisor)

について、

$$S_{2k}(x)\sim\frac{D(2k)x}{(\log x)^2}$$

と比較すると、

$$S_{2k}(x)\sim P_{2k}(x)$$

が成り立つ。

(証明)：(命題1)より、$D(2k)=\frac{1}{2}e^{2\gamma}\cdot E(2k)\cdot c(2)=\{\frac{1}{2}e^{2\gamma}\cdot c(2)\}\cdot E(2k)=2C_2\cdot\prod_p\left(\frac{p-1}{p-2}\right)$ (ただし、pは2kのodd prime divisor)となるから,(27)の漸近式と比較すると、$S_{2k}(x)\sim P_{2k}(x)$が成り立つ。 (証明終)

(追記1)：(27)の漸近式は、(命題3)の結果より、「2k差の素数ペアについてのハーディ・リトルウッドの予想」した漸近式と一致したことになる。この漸近式がxに具体的な数値を代入して実際の素数ペアの個数と比較すると、どうなっているのか、蛇足ながら、偶数2k＝2,6,10,30の場合で、x＝15万までの2k差の素数ペアの個数について、パソコンを使ってプログラムを組み、検証してみた。結果は以下の通り。

●偶数2k＝2, $D(2k)=D(2)=e^{2\gamma}/2\cdot c(2)=2C_2=1.32032\cdots$の場合、

	x＝1000	x＝10000	……	x＝150000
ⓐ: $P_2(x)$	35	205	……	1701
ⓑ: $\frac{D(2)x}{((\log x))^2}$	27.6701	155.644	……	1394.25
ⓐ÷ⓑ	1.2649	1.31711	……	1.22001
ⓒ: $\frac{S^2(x)-S(x)}{x}$	28.056	150.9	……	1278.36
ⓐ÷ⓒ	1.2475	1.35832		1.33062
ⓐ÷$\{x/(\log x)^2\}$	1.6701	1.73902	……	1.61082

●偶数$2k=6$, $D(2k)=D(6)=e^{2\gamma}/2\cdot E(6)\cdot c(2)=e^{2\gamma}/2\cdot 2\cdot c(2)=4C_2=2.64067\cdots$の場合、

	$x=1000$	$x=10000$	・・・・・・	$x=150000$
ⓐ: $P_6(x)$	74	411	・・・・・・	3388
ⓑ: $\dfrac{D(6)x}{((\log x))^2}$	55.3402	311.289	・・・・・・	2788.5
ⓐ÷ⓑ	1.33718	1.32032	・・・・・・	1.2149901
ⓒ: $\dfrac{S^2(x)-S(x)}{x}$	28.056	150.921	・・・・・・	1278.36
ⓐ÷ⓒ	2.633758	2.72328		2.65028
ⓐ÷$\{x/(\log x)^2\}$	3.53106	3.48653	・・・・・・	3.20839

●偶数$2k=10$, $D(2k)=D(10)=e^{2\gamma}/2\cdot E(10)\cdot c(2)=e^{2\gamma}/2\cdot\frac{4}{3}\cdot c(2)=\frac{8}{3}C_2=1.7604482\cdots$の場合、

	$x=1000$	$x=10000$	・・・・・・	$x=150000$
ⓐ: $P_{10}(x)$	51	270	・・・・・・	2276
ⓑ: $\dfrac{D(10)x}{((\log x))^2}$	36.8935	207.526	・・・・・・	1859
ⓐ÷ⓑ	1.38236	1.30104	・・・・・・	1.22431
ⓒ: $\dfrac{S^2(x)-S(x)}{x}$	28.056	150.921	・・・・・・	1278.36
ⓐ÷ⓒ	1.81779	1.78901		1.78041
ⓐ÷$\{x/(\log x)^2\}$	2.43357	2.29042	・・・・・・	2.15534

●偶数$2k=30$, $D(2k)=D(30)=e^{2\gamma}/2\cdot E(30)\cdot c(2)=\frac{16}{3}C_2=3.5208964\cdots$の場合、

	$x=1000$	$x=10000$	・・・・・・	$x=150000$
ⓐ: $P_{30}(x)$	99	536	・・・・・・	4600
ⓑ: $\dfrac{D(30)x}{((\log x))^2}$	73.7869	415.051	・・・・・・	3718
ⓐ÷ⓑ	1.3417	1.29141	・・・・・・	1.23722
ⓒ: $\dfrac{S^2(x)-S(x)}{x}$	28.056	150.921	・・・・・・	1278.36
ⓐ÷ⓒ	3.52866	3.55152		3.59837
ⓐ÷$\{x/(\log x)^2\}$	4.72399	4.54691	・・・・・・	4.35614

上の表について、偶数$2k=2,6,10,30$の場合、$x=150000$まででいえることは、

(1):ⓐ÷ⓑ$=P_{2k}(150000)\div\dfrac{D(2k)\cdot 150000}{(\log(150000))^2}\fallingdotseq 1.2$という結果であった。$x=150000$までで検証しても、区間$(1,\infty)$のわずかな一部分の有界な区間で調べたに過ぎない。ⓐ÷ⓑが1に近くなるには、xを十分大きな値でなければならないだろうと考える。

(2):ⓒ$\sim\dfrac{x}{(\log x)^2}$である。このことから、ⓐ÷ⓒ$\sim D(2k)$であることがいえる。また、ⓐ÷$\dfrac{x}{(\log x)^2}\sim D(2k)$でもあるが、$x=150000$まででⓐ÷ⓒの方が、ⓐ÷$\dfrac{x}{(\log x)^2}$より速く$D(2k)$に収束するようである。

(追記2):「確率論的アプローチとしての証明」の中で、確率論的と捉えることが可能な箇所は、区間$(\sqrt{x},x]$で考える2k

差の素数ペアの個数は、区間($\sqrt{x}$, N]で考える2k差の特別な整数のペアの個数に各区間の長さの巾の比の値

$\dfrac{x-\sqrt{x}}{N-\sqrt{x}} \sim \dfrac{x}{N}$と(疎率)$^2=(\frac{1}{2}e^{\gamma})^2=(0.89048\cdots)^2=0.7929546\cdots$とを掛けて個数とした箇所である。上述した確率論的アプローチでは、一般に、2つの特別な整数nとn－2kが、素数となるか否かという事象の独立性あるいは従属性を考えに入れないで論が進められたことである。

その理由の背景には、2k差の特別な整数のペアが区間($\sqrt{x}$, x]に密にあるのか、あるいは、疎としてあるのかさえわかれば、その区間にあるペアは、必ず2k差の素数ペアになっていて、その個数の概数がわかるからである。

次に、(注7)で言及した仮定条件(ア),(イ)について述べる。(ア)の確率のとり方と(イ)の各自然数が各素数で割り切れるか、割り切れないかという事象は互いに独立であるという仮定について、この拙稿では(ア),(イ)は、連立合同式に関する「合同式の一定理」の応用に基礎においているので、〈*〉の考察において、あえて用いなかった。(〈*〉の(b2)の(20)(あるいは(19))だけの漸近式で、(26)の結果を示すことができる。) また、「「国見－斉藤の予想」についての確率論的アプローチ」(「数学教室」(2008年5月号. 共著)では、この仮定条件(ア),(イ)を使って示したもので、上述した証明の結果(26)と同じ結果になった。なぜならば、素数定理と、メルテンスの定理およびメルテンスの定理の系を使って素数ペアの個数の概数を計算すると、定数倍の違いしかないから、$P_{2k}(x) \sim \dfrac{(\text{正の定数})\cdot x}{(\log x)^2}$と表されるからである。

つまり、定数倍の違いを無視すれば、$\lim_{x\to\infty} P_{2k}(x)=\infty$の式は得られるのである。

(命題4):($P_4(x)$および$P_6(x)$と$P_2(x)$の漸近的関係式について)

1. はじめにの2)の中で、ハーディ・リトルウッドが予想した$P_2(x)$と$P_4(x)$, $P_6(x)$の漸近的関係について、

(#): $P_2(x) \sim P_4(x)$　　　　(##): $P_6(x) \sim 2\times P_2(x)$

に言及されているが、これは、$D(2k)=(e^{2\gamma}/2)\times E(2k)\times c(2)$の中の因子$E(2k)$に依存している。つまり、はじめの漸近式(#)は、$E(2)=E(4)=1$から導かれる。つまり、$D(2)=D(4)$から成立する。漸近式(##)については、$2k=6\Rightarrow k=3$だから、

$E(6)=\prod_{\substack{2<p\leqq\sqrt{x}\\ p|3}}(\dfrac{p-1}{p-2})=\dfrac{3-1}{3-2}=2$で、$2\times E(2)$となり、$D(6)=2\times D(2)$が成立するから、$P_6(x)\sim 2\times P_2(x)$が成り立つ。さらに、$D(8)=D(2)$, $D(10)=\dfrac{4}{3}\times D(2)$だから、$P_8(x)\sim P_2(x)$, $P_{10}(x)\sim\dfrac{4}{3}\times P_2(x)$が成り立つ。 (証明終)

(命題 5):(一般に、$P_{2k}(x)$と$P_2(x)$の漸近的関係式について)

(1):偶数2kが互いに異なる奇数の素因数$p,q,\cdots,w$をもつとき、$P_{2k}(x)\sim\dfrac{(p-1)(q-1)\cdots(w-1)}{(p-2)(q-2)\cdots(w-2)}\times P_2(x)$ が成り立つ。

(2):偶数$2k=2^{\ell}$(ただし、ℓは1以上の整数)のとき、$P_{2k}(x)\sim P_2(x)$が成り立つ。

(証明):(1)の場合、$D(2k)=e^{2\gamma}/2\cdot E(2k)\cdot c(2)=e^{2\gamma}/2\cdot c(2)\cdot\prod_{\substack{2<p\leqq\sqrt{x}\\ p|k}}\dfrac{p-1}{p-2}=2C_2\times\dfrac{(p-1)(q-1)\cdots(w-1)}{(p-2)(q-2)\cdots(w-2)}$による。

(2)の場合、$D(2k)=e^{2\gamma}/2\cdot E(2k)\cdot c(2)=e^{2\gamma}/2\cdot 1\cdot c(2)=2\cdot C_2$よりあきらか。 (証明終)

この漸近式が実際に成り立つかどうか、旧PC－98シリーズのノート型パソコンを使って、偶数2kが、2,4,6,8,10,・・・・・,26まで、xは100から15万まで調べてみた。その結果は、次の表の通りであった。

ただし、$P_{2k}(x)=\#\{(n,n+2k)\mid n$とn+2kともに素数で、$2<n\leqq x\}$で計算した。

（偶数2k差の素数ペアの個数$P_{2k}(x)$と$P_2(x)$の漸近的関係）

	x＝100	x＝500	x＝1000	x＝2000	x＝3000	x＝4000	x＝5000	x＝1万	x＝10万	x＝15万	$P_2(x)$との関係
$P_2(x)$	8	24	35	61	82	103	126	205	1224	1701	$\sim P_2(x)$
$P_4(x)$	9	27	41	65	87	108	122	203	1216	1687	$\sim P_2(x)$
$P_6(x)$	16	46	74	129	169	202	243	411	2447	3383	$\sim 2 \cdot P_2(x)$
$P_8(x)$	9	24	38	63	87	106	121	208	1260	1732	$\sim P_2(x)$
$P_{10}(x)$	11	33	51	85	115	138	165	270	1624	2276	$\sim (4/3) \cdot P_2(x)$
$P_{12}(x)$	15	47	70	123	164	205	243	404	2421	3383	$\sim 2 \cdot P_2(x)$
$P_{14}(x)$	10	28	48	74	104	128	152	245	1488	2061	$\sim (6/5) \cdot P_2(x)$
$P_{16}(x)$	9	24	39	60	82	100	122	200	1233	1698	$\sim P_2(x)$
$P_{18}(x)$	14	44	74	120	164	203	237	417	2477	3455	$\sim 2 \cdot P_2(x)$
$P_{20}(x)$	10	31	48	86	108	132	158	269	1645	2279	$\sim (4/3) \cdot (P_2(x)$
$P_{22}(x)$	7	26	41	65	89	111	129	226	1351	1873	$\sim (10/9) \cdot P_2(x)$
$P_{24}(x)$	15	47	79	127	171	205	241	404	2475	3455	$\sim 2 \cdot P_2(x)$
$P_{26}(x)$	9	25	42	67	94	117	139	240	1348	1864	$\sim (12/11) \cdot P_2(x)$
$P_{28}(x)$	8	25	41	72	97	125	147	248	1468	2023	$\sim (6/5) \cdot P_2(x)$
$P_{30}(x)$	18	60	99	162	220	271	320	536	3329	4600	$\sim (8/3) \cdot P_2(x)$
$P_{32}(x)$	6	23	37	60	78	95	114	196	1204	1673	$\sim P_2(x)$
$P_{34}(x)$	9	27	44	68	84	105	128	215	1306	1837	$\sim (16/15) \cdot P_2(x)$
$P_{36}(x)$	14	48	76	121	169	204	238	404	2463	3409	$\sim 2 \cdot P_2(x)$

この表は、偶数2kが2以外に互いに異なる素因数$p,q,\cdots,w$をもつとき、

$$P_{2k}(x) \sim \frac{p-1}{p-2} \times \frac{q-1}{q-2} \times \cdots \times \frac{w-1}{w-2} \times P_2(x)$$

の漸近式は上の表とよく合っている。

自然数は神が創ったとクロネッカーは、述べていたが、どうやら神は、偶数$2k=2^{\ell}$（ただし、ℓは自然数）差の素数ペアの個数に対して、すべて等しい最小なまばらさを割りふったようである。（つまり、$x \to \infty$とすると、$P_{2^{\ell}}(x) \to \infty$になるが、その発散の仕方が一番ゆっくりなのである。）

さらに、偶数$2k=2^{\alpha} p^{\beta} q^{\gamma} \cdots w^{\tau}$（ただし、$\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \tau$は任意の自然数）で、$p,q,\cdots\cdots,w$は、2以外の互いに異なる素数の場合の$P_{2k}(x)$の個数と、偶数$2m=2pq\cdots\cdots w$の場合の$P_{2m}(x)$の個数とが漸近的に等しいことがいえる。このことは、素数ペアの分布の仕方が、2kの素因数の2乗以上の累乗に関係なく、ペアを形成していることがわかる。篩の方法が$\sqrt{x}$以下の素数pのみで篩にかけ、pの2乗以上で篩にかけないからなのか、何か謎があるようだ。

（問題提起Ⅰ）：$2k=2^{\alpha} p^{\beta} q^{\gamma} \cdots\cdots w^{\tau}$（ただし、$\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \tau$は任意の自然数）とおく。また、$2m=2pq\cdots\cdots w$とおく。（命題5）より、$2k \neq 2m$にもかかわらず、なぜ$P_{2k}(x) \sim P_{2m}(x)$が成り立つのだろうか？

（問題提起Ⅱ）：Eulerは、$\sum_{p} \frac{1}{p} = \infty$（ただし、pは素数全体にわたる）を証明した。このことから、ユークリッド以来の別な方法で、素数が無限に存在することがわかる。Brunは、双子素数の逆数の無限和が収束することを示した。そして、ShanksとWrench（1974年）およびBrent（1976年）によれば、

$$(\frac{1}{3}+\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{7})+(\frac{1}{11}+\frac{1}{13})+(\frac{1}{17}+\frac{1}{19})+(\frac{1}{29}+\frac{1}{31})+\cdots\cdots\cdots=1.90216025\cdots$$

の結果が得られている。では、2k差の素数の組たちの逆数の無限和は、すべて収束するだろうか？例えば、差が4の素数の組の逆数の無限和 $(\frac{1}{3}+\frac{1}{7})+(\frac{1}{7}+\frac{1}{11})+(\frac{1}{13}+\frac{1}{17})+(\frac{1}{19}+\frac{1}{23})+\cdots\cdots$ は、有限確定値だろうか？

（問題提起Ⅲ）:「Chebyshevの定理:$x\geqq 2$のとき、区間$(x,2x)$の範囲に、少なくとも1個の素数が存在する。」について、この定理を2k差の素数ペアの存在定理に拡張しようとして、次の問題を提起する。

問題「xを十分大きな正の数とする。開区間$(x,f(x))$あるいは開区間$(x^m, f(x))$内にある2個の素数からなる2k差の素数ペアn,n-2kがすくなくとも1組存在するためには、f(x)はどのようなxの関数でなければならないか？

（ただし、$x<f(x)$ あるいは $x^m<f(x)$とする。）」

例えば、xは2以上の数とすると、開区間$(x^2,(x+2)^2)$の範囲にある2個の素数からなる双子素数が、少なくとも1組存在するいえるだろうか？

（命題6）:（3組素数予想について）

区間$(\sqrt{x}, x]$の範囲にある3つの素数の組$q,q-2,q-6$や、別の素数の組$q,q-4,q-6$の個数については、それぞれの連立合同式

$$(あ)\begin{cases} n\not\equiv 0 \pmod N \\ n-2\not\equiv 0 \pmod N \\ n-6\not\equiv 0 \pmod N \end{cases} \quad や \quad (い)\begin{cases} n\not\equiv 0 \pmod N \\ n-4\not\equiv 0 \pmod N \\ n-6\not\equiv 0 \pmod N \end{cases} \quad (ただし、N=\prod_{p\leqq\sqrt{x}} p)$$

の解の個数を求めるには、メルテンスの定理の系を使うと、a＝3の場合に該当し、$\prod_{3<p\leqq\sqrt{x}}(1-\frac{3}{p})\sim\frac{c(3)}{(\log x)^3}$を使って、特別な整数3個からなる組の総数に、$\frac{x}{N}\times(\frac{1}{2}e^{\gamma})^3$を掛ければ、その個数は、$\frac{Cx}{(\log(x))^3}$（ただし、Cは正の定数）型になる。このことについて、(あ)の連立合同式を例にとって説明しよう。

（証明）:連立合同式(あ)を解くことは、$p\leqq\sqrt{x}$を満たす任意の素数pについて、次の連立合同式:(#)

$$(\#)\begin{cases} n\not\equiv 0 \pmod p \\ n-2\not\equiv 0 \pmod p \\ n-6\not\equiv 0 \pmod p \end{cases} \quad (ただし、N=\prod_{p\leqq\sqrt{x}} p\ )$$

を解くことと同値である。各素数pについて、解の個数を計算すると次のようになる。

p＝2のとき、(#)の解は、$n\equiv 1 \pmod 2$の1通りである。(この場合、剰余$n\equiv 2 \pmod 2$,および剰余$n\equiv 4 \pmod 2$は、$n\equiv 0 \pmod 2$の剰余に等しく、除外しなければならず、結局、2個からなる剰余系のうち、$n\equiv 1 \pmod 2$ のみが解になる。したがって、3つの特別な整数の組を剰余で表すと、{1, 1-2, 1-6}となるが、完全剰余系では、{1,1,1}で表される。

p＝3のとき、(#)の解は、$n\equiv 1 \pmod 3$の1通りである。3つの特別な整数の組を剰余で表すと、{1,2,1}である。

p＝5のとき、(#)の解は、$n\equiv 3 \pmod 5$と$n\equiv 4 \pmod 5$の2通りで、3組の組の剰余で表すと、{3,1,2}と{4,2,3}である。

$p\geqq 6$のとき、(#)の解の個数は、$(p-3)$個ある。なぜならば、p個の剰余系から$n\equiv 0,n\equiv 2,n\equiv 6$を除外しなければならないから。したがって、区間$(\sqrt{x}, N]$の範囲で考えた3つの特別な整数{n, n-2,n-6}の組の総数をF(N)とおくと、

$$F(N)=1\times 1\times 2\times\prod_{6\leqq p\leqq\sqrt{x}}(p-3)=\prod_{5\leqq p\leqq\sqrt{x}}p\times\prod_{5\leqq p\leqq\sqrt{x}}(1-\frac{3}{p})=\{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\prod_{2\leqq p\leqq\sqrt{x}}p\}\times\prod_{5\leqq p\leqq\sqrt{x}}(1-\frac{3}{p})$$

$$=\frac{1}{6}\times\prod_{2\leq p\leq\sqrt{x}}p\times\prod_{3<p\leq\sqrt{x}}(1-\frac{3}{p})\ \sim\frac{N}{6}\times\frac{c(3)}{(\log\sqrt{x})^3}=\frac{4N}{3}\times\frac{c(3)}{(\log x)^3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

区間($\sqrt{x}$, x]の範囲に考えた特別な整数の3組の組の個数をF(x)とおくと、区間($\sqrt{x}$, x]にある特別な整数からなる3組の個数の分布の割合(F(x)/x)と、区間($\sqrt{x}$, N]にある特別な整数からなる3組の個数の分布の割合(F(N)/N)との関係は

$$\frac{F(x)}{x}\sim\frac{F(N)}{N}\times(\frac{1}{2}e^{\gamma})^3\ \Leftrightarrow\ F(x)\ \sim F(N)\times\frac{x}{N}\times(\frac{1}{2}e^{\gamma})^3\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

となる。これは、(modN)の剰余系で、組を構成する3個の特別な整数すべてが、疎(特別な整数がまばらな)となる区間($\sqrt{x}$, x]に分布するから、区間($\sqrt{x}$, N]での分布から考えると、疎となる率($\frac{1}{2}e^{\gamma}$)の3乗の出会い難さが現れるからである。(33), (34)より、

$$F(x)\ \sim\frac{4N}{3}\times\frac{c(3)}{(\log x)^3}\times\frac{x}{N}\times(\frac{1}{2}e^{\gamma})^3=\frac{4\cdot(\frac{1}{2}e^{\gamma})^3\cdot c(3)}{3}\times\frac{x}{(\log x)^3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

(35)の式より、

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\infty$$

となる。したがって、3組素数の組の個数は、確率論的に無限にあることがいえる。

(注:区間($\sqrt{x}$, x]の範囲で考えた3つの特別な整数の組(そのうちの最大な素数がx以下)は、篩に掛けられているから、3つの素数からなる組である。) (証明終)

ところで、ハーディとリトルウッドは、xよりも小さい3組素数(3個の素数の組)の個数は、次の式

$$\frac{9}{2}\times\prod_{5\leq p}\frac{p^2(p-3)}{(p-1)^3}\times\int_2^x\frac{dt}{(\log t)^3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

を予想した。式(36)は、次の式

$$\frac{9}{2}\times\prod_{5\leq p}\frac{p^2(p-3)}{(p-1)^3}\times\frac{x}{(\log x)^3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

と漸近的に等しい。(37)の漸近式は、私が得た式(35)と漸近的に一致するのだろうか? 試しに計算してみる。

(検証):(35)の最右辺の中のはじめの分数式の分子の一部の因数($\frac{1}{2}e^{\gamma}$)$^3\cdot$c(3)は、(29)の式の両辺を3乗した漸近式とメルテンスの定理の系(この場合、a=3に該当し、$c(3)\sim\prod_{5\leq p\leq\sqrt{x}}(1-\frac{3}{p})\times(\log\sqrt{x})^3$より)を使うと、

$$(\frac{1}{2}e^{\gamma})^3\cdot c(3)\ \sim\frac{\prod_{5\leq p\leq\sqrt{x}}(1-\frac{3}{p})\times(\log\sqrt{x})^3}{\prod_{2\leq p\leq\sqrt{x}}(1-\frac{1}{p})^3\times(\log x)^3}=\frac{\frac{1}{8}\times\prod_{5\leq p\leq\sqrt{x}}(1-\frac{3}{p})\times(\log x)^3}{\frac{1}{8}\times\frac{8}{27}\times\prod_{5\leq p\leq\sqrt{x}}(1-\frac{1}{p})^3\times(\log x)^3}$$

$$=\frac{27}{8}\times\prod_{5\leq p\leq\sqrt{x}}\frac{(1-\frac{3}{p})}{(1-\frac{1}{p})^3}=\frac{27}{8}\times\prod_{5\leq p\leq\sqrt{x}}\frac{p^2(p-3)}{(p-1)^3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

この(38)の式を(35)の最右辺に代入すると、

$$F(x)\ \sim\frac{4}{3}\times\frac{27}{8}\times\prod_{5\leq p\leq\sqrt{x}}\frac{p^2(p-3)}{(p-1)^3}\times\frac{x}{(\log x)^3}\ \sim\frac{9}{2}\times\prod_{5\leq p}\frac{p^2(p-3)}{(p-1)^3}\times\frac{x}{(\log x)^3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

となる。漸近式(39)の最右辺は、ハーディ・リトルウッドの予想した式(37)と一致した。 (検証終)

さらに、一般的に、k組素数予想も、確率論的に成り立つと考える。

（命題7）：メルテンスの定理の系で、a＝3の場合、漸近式の右辺の分子c(3)について、次の等式が成り立つ。

$$c(3)=\frac{27}{e^{3\gamma}}\times\prod_{5\leq p}\frac{p^2(p-3)}{(p-1)^3}$$

（証明） (38)の式より、$c(3)\sim\frac{27}{8}\times\prod_{5\leq p\leq\sqrt{x}}\frac{p^2(p-1)}{(p-1)^3}\div(\frac{1}{2}e^{\gamma})^3=\frac{27}{e^{3\gamma}}\times\prod_{5\leq p\leq\sqrt{x}}\frac{p^2(p-1)}{(p-1)^3}$が成立する。$x\to\infty$とすると、この漸近式の両辺は定数になるから、漸近記号（～）の換わりに、等号（＝）の記号で結べる等式になる。

（証明終）

（命題8） メルテンスの定理の系：

$$\prod_{a<p\leq\sqrt{x}}(1-\frac{a}{p})\sim\frac{c(a)}{(\log\sqrt{x})^a}=\frac{2^a\times c(a)}{(\log x)^a}\quad（ただし、a>1）$$

の漸近式の右辺の分子の定数c(a)について、

$$c(a)=\frac{\prod_{a<p}(1-\frac{a}{p})}{e^{a\gamma}\times\prod_{2\leq p}(1-\frac{1}{p})^a}=\frac{\prod_{a<p}\frac{p^{a-1}(p-a)}{(p-1)^a}}{e^{a\gamma}\times\prod_{2\leq p\leq a}(1-\frac{1}{p})^a}$$

が成立する。

（証明略） 命題5の証明と同じように計算すれば結果を得る。

（問題提起Ⅳ）：3組素数の逆数の総和は、有限確定値になるか？

$$\Sigma(\frac{1}{p-6}+\frac{1}{p-2}+\frac{1}{p})\quad（ただし、(p-6,p-2,p)はすべての3組素数にわたって動く。）$$

は、収束か、あるいは発散か？

また、上の3組素数と異なる別の3組素数(p-6,p-4,p)のすべての逆数の総和

$\Sigma(\frac{1}{p-6}+\frac{1}{p-4}+\frac{1}{p})$は、有限確定値だろうか？ また、もし、両方の3組素数の逆数の総和が有限確定値だと仮定すると、その値は一致するだろうか？

（命題9）：（Goldbachの予想との関連から）

4より大きい偶数2kについて、2個の素数の和で表す仕方の数を$Q_2(2k)$で表すことにする。$Q_2(2k)$を漸近式で表すと、

$$Q_2(2k)\sim\frac{D(2k)\cdot 2k}{(\log(2k))^2}\quad\cdots\cdots(40)$$

である。

（証明） $p\leq\sqrt{x}$を満たす任意の各素数pについて、(1)の連立合同式

$$n\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)\ \text{and}\ n-2k\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$$
$$\Leftrightarrow\ n\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)\ \text{and}\ 2k-n\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$$

となり、各剰余n, 2k－nについて、n＋(2k－n)＝2k だから、Goldbachの予想に関係していると思われるが、nは2k未満の自然数で考えなければならないので、上述した確率論的アプローチの方法の応用を試みることにする。この場合、nは、2k>nという制限があり、篩に使う素数pは、$\sqrt{x}$以下ではなく、$\sqrt{2k}$以下でなければならない。つまり、Goldbachの予想を連立合同式の言葉で書き表すと、次の連立合同式

「4より大きい任意の偶数2kに対して、$2\leq p\leq\sqrt{2k}$を満たす任意の素数pについて、

$$n\not\equiv 0(\mathrm{mod}p)\ \text{and}\ 2k-n\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}p)\quad\cdots\cdots(41)$$

を満たす解が区間$(\sqrt{2k},2k]$の範囲に少なくとも1個存在する。」

となる。この連立合同式(41)は、つぎの連立合同式と同値である。$N=\prod_{p\leqq\sqrt{2k}} p$とおくと、

連立合同式: $n\not\equiv 0 \pmod N$ and $2k-n\not\equiv 0 \pmod N$となる。この合同式を解くには、確率論的アプローチとしての証明を同じように実行すれば、解の個数は(27)の右辺と類似した漸近式

$$Q_2(2k) \sim \frac{D(2k)\cdot 2k}{(\log(2k))^2} \sim \frac{D(2k)\cdot(2k-\sqrt{2k})}{(\log(2k))^2} \quad \cdots\cdots (42)$$

が得られ、この漸近式(42)が区間($\sqrt{2k}$、2k]の範囲にある素数ペアn, 2k−nのおよその個数となる。

したがって、その個数を小さく見積もって、(42)の右辺を使うと、この式が十分大きな偶数2kに対して1以上になれば、Goldbachの予想の確率論的問題にシフトしたことになる。ところで、

$$\frac{D(2k)\cdot(2k-\sqrt{2k})}{(\log(2k))^2} \geqq 1 \quad \cdots\cdots (43)$$

は、十分大きな偶数2kに対しては成立する。なぜならば、(42)の右辺の式を使って、2k→∞とすると、

$$\left((42)\text{の右辺の式}: \frac{D(2k)\cdot(2k-\sqrt{2k})}{(\log(2k))^2}\right)\to\infty \quad \cdots\cdots (44)^{(\text{注}11)}$$

となるからである。したがって、十分大きな自然数N_0を適当に選ぶと、$2k\geqq N_0$を満たす偶数2kに対して、(43)の不等式が成り立つ。(44)の式の意味は、偶数2kの値が大きくなると、2個の素数の和が2kとなる表し方の数が増加し、2k→∞とすると、その表し方の数が、∞に発散するということを表している。

(証明終)

この(42)の漸近式が、

ハーディ・リトルウッドの[Conjecture A]: $N_2(n) \sim 2\cdot C_2\cdot\frac{n}{(\log(n))^2}\cdot\prod_p\frac{p-1}{p-2} \quad \cdots\cdots (45)$

と一致するのかどうか検証してみた。(ただし、ハーディ・リトルウッドは、ここでは、偶数2kをnとおいている。)

(検証): (42)の漸近式で2k=nとおくと、

$$Q_2(n)\sim\frac{D(n)\cdot n}{(\log(n))^2}=\left\{\frac{e^{2\gamma}}{2}\cdot c(2)\cdot E(n)\right\}\cdot\frac{n}{(\log(n))^2}=\left\{\frac{e^{2\gamma}}{2}\cdot c(2)\right\}\cdot\frac{n}{(\log(n))^2}\cdot E(n)$$

$$=2\cdot C_2\cdot\frac{n}{(\log(n))^2}\cdot\prod_{\substack{2<p\leqq\sqrt{x}\\ p\mid n}}\left(\frac{p-1}{p-2}\right)\sim\frac{2\cdot C_2\cdot n}{(\log(n))^2}\cdot\prod_p\left(\frac{p-1}{p-2}\right)$$ (ただし、pはnのodd prime divisor)

となり、ハーディ・リトルウッドの予想した漸近式(45)と一致した。

(検証終)

(注11:(42)の式の中で、2kをnに置き換えて、n→∞とすると、

$$\lim_{n\to\infty} Q_2(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{D(n)(n-\sqrt{n})}{(\log(n))^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{D(n)n}{(\log(n))^2}=\infty \quad \cdots\cdots (46)$$

となる。なぜならば、D(n)は、ここではnの関数となり、十分大きな偶数n=2kに対して、2kが(B ⅰ),(B ⅱ)のどちらの場合でも、$D(n)=(e^{2\gamma}/2)\times E(n)\times c(2)$となり、偶数n=2kにともなって変化するが、変化する因子はE(n)のみである。

偶数2kが(B ⅰ)の場合、

$$E(n)=\prod_{\substack{2<p\leqq\sqrt{n}\\ p\mid n}}\left(\frac{p-1}{p-2}\right)=\prod_{\substack{2<p\leqq\sqrt{n}\\ p\mid n}}\left(1+\frac{1}{p-2}\right)\geqq 1$$ (ただし、pは、odd prime divisor)

となる。

偶数2kが(B ii)の場合でも、

$E(n)=1$

だから、どちらのばあいでも、$E(n)\geqq 1$となり、$D(n)\geqq (e^{2\gamma}/2)\cdot c(2)$(正の定数)が成り立つから、(46)の式が成立する。)

(**問題提起V**):(43)の不等式を満たす偶数2kの最小値N_0をもとめよ。(つまり、偶数$2k=n$がN_0以上ならば、偶数に関するGoldbachの予想が成り立つことがいえる。)(注12)

(注12:任意の正の十分大きな奇数は、3+(偶数2k)型で表せるから、この偶数2kについて、上述したGoldbachの予想に関する(命題9)を応用すると、「十分大きな数(例えばN_0)をとると、3+N_0以上の任意の奇数は、少なくとも3個の素数の和で表せる。」という命題が成り立つ。この命題は、「奇数に関するGoldbachの予想」の確率論的アプローチとしての証明が得られたことになる。尚、解析的整数論では、ヴィノグラードフが、1936年に「十分大きな奇数について、3個の素数の和で表される」ことは、三角和を使って証明済みである。)

(参考資料)

・「確率論の整数論への応用」(吉田敬之著 Preprintのレジュメ)
(注:確率論の中に載っている「ボレルーカンテリの定理」を用いて、素数どうしの分布が独立であるという仮定の下で、数論の難問に挑戦している。
尚、このPreprintのレジュメは、学生時代に福富節男さんから頂いたもので、このPreprintに触発されて、この拙稿を書くきっかけになりました。)

・「SOME PROBLEM OF 'PARTITIO NUMERORUM';III:ON THE EXPRESSION OF A NUMBER AS A SUM OF PRIMES」(G.H.Hardy&J.E.Littlewood著 1922年)

・「An Introduction to the Theory of Numbers」(G.H.Hardy&E.M.Wright著 Oxford University Press 1936年)
日本語訳で「数論入門I,II」(シュプリンガーフェアラーク東京 2001年7月出版)

・「初等解析的整数論」(池原止戈夫著 河出書房 昭和24年)
(注:素数分布論,合同と剰余,加法的整数論・・・等が載っている。)

・「解析的整数論」(末綱恕一著 岩波 1934年)
(注:リーマンのζ関数,諸々のL-関数が載っている)

・「整数論及び代数学」(末綱恕一著 共立社 1935年)
(注:代数学だけでなく、解析的整数論の内容なども含まれている。)

・「初等整数論講義第2版」(高木貞治著 岩波 昭和49年)
(注:名著である。この拙稿では、合同式に関する定理が参考になった。)

・「素数の世界」(Paulo Ribenboim著 共立出版 1995年)
(注:Hardy&Littlewoodの予想のいくつかが紹介されている。)

・「素数の分布」(内山三郎著 宝文館出版 昭和45年)

・「整数論(解析的整数論入門)」(三井孝美著 至文堂 昭和45年)

・「Additive Number Theory」(Mervyn B.Nathanson著 Springer 1996年)
(注:この本では、Chebyshev's funnctionsとThe Hardy-Littlewood asymptotic formuraの箇所が参考になった。)

・「Introduction to Number Theory」(Hua Loo Keng著 Springer-Verlag 1956年)
(注:この本では、Selberg's Asymptotic Formulaの箇所が参考になった。)

・「整数論入門」(ヴィノグラードフ著 共立全書 昭和39年)

・「素数大百科」(Chris K.Caldwell編著 共立出版 2004年)

・「『国見ー斉藤の予想』の確率論的アプローチ」(高橋鋼一&野崎昭弘共著 「数学教室」2008年5月号、国土社)

・『素数定理の威力に学ぶ』(野崎昭弘著;(数学セミナー,2007年11月号の中に掲載))

尚、鹿野 健氏から昨年秋に送られてきた論考「英国学派の数論(上,下)」(現代数学史研究会,鹿野 健著)は、参考になりました。(感謝)