Schur の表現論の仕事（射影表現３部作） その II

平井　武 (Kyoto)
hirai.takeshi@math.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

I. Schur (= J. Schur) の独自性を最もよく表している射影表現３部作 [**S4**, 1906], [**S10**, 1907], [**S16**, 1911] は，彼のむしろ初期の仕事である．その第３論文は，師 Frobenius の「対称群・交代群の表現の構成・指標の計算」の仕事 [**F60**, 1900], [**F61**, 1901] を（少なくとも方向としては）忠実にフォローしている．（ただし，[**F68**, 1903] の問題は取り扱われていない．これは射影表現の場合には結構難しい問題であって，最近の研究 [**Naz2**, 1997] などがある.）対称群の線形表現については Schur は [**S11**, 1908] において，既約表現のより簡単な構成法を用いて，あらためて論じている．

さて，射影表現では，線形表現の場合に比してより多くの新しいことが現れて，理論が難しくなっている．事実，この第３論文の後，少なくとも半世紀の間は「有限群の射影表現」の研究に本気で取り組む数学者は現れなかった．この方面の初めての本格的な成書 [HoHu, 1992] の序文の冒頭部分の１部を引用すると

> ...... In a beautiful and formidable paper, Schur (1911), he then worked out all the basic details for the symmetric and alternating groups. When our labour on this monograph begun, no other complete treatment of Schur's results existed. Our main approach to the subject is quite similar to his.

本報文では，前年の第１，第２論文についての報告に続き，今回は，対称群 $\mathfrak{S}_n$, 交代群 $\mathfrak{A}_n$ の射影表現を完全に決定した論文 [S16] について報告する．　なお，Schur の表現論に関する論文全てと，今回の報告に関連する参考文献は，報文末尾にリストアップしてある．

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[**S16**] J. Schur, *Über Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* J. für die reine und angewante Mathematik, **139**(1911), 155–250.

１．論 文 の 構 成 ：

全 96 ページは Einleitung（5 頁）と 9 個の Abschnitt（章）に分かれ，各 Abschnitt は題名を持つ．全体で 50 ある節は題名がない．

論文を読んで，研究ノートを作成した際に，理解を助けるために勝手に，この 50 の各節に題名を与えて，目次を作成したが，研究ノート本文は大部なのでこれを紹介することは割愛し，目次を以下に掲げて内容を概観して貰うこととする．

つずいて序文の梗概を載せる．そのあとで，著者のコメントを書く．

２．内容を概観するために，目次一覧を掲げる：

凡例： 各 section へのタイトル付与は平井による．また，§25bis 節，および，§43bis (§42+§43) 節，の設定も平井による．

3．序 文 の 概 要：

① **取り扱う問題**： 序文の冒頭の段落から引用すると，

> In der vorliegenden Arbeit behandle ich die Aufgabe, alle endlichen Gruppen von gebrochenen Substitutionen (Kollineationen) zu bestimmen, die der symmtrischen oder der alternierenden Gruppe mid n Vertauschungsziffern einstufig isomorph sind. ……

（意訳）「一次分数変換の群（現代用語では，射影変換の群）の有限部分群で n 次の対称群，交代群と同型なものを全て決定する問題」を取り扱う．

◎ 当時は「$GL(N, C)$ の有限分群をすべて決定する」という大問題に対し，Klein たちの研究が行き詰まっていたとのことである．本論文で，Schur は $G = \mathfrak{S}_n$ や $G = \mathfrak{A}_n$ と同型な $PGL(N, C)$ の部分群を全て決定している．

この問題を別の見方をすれば，群 G の "忠実な" 射影既約表現 π を全て決定することに当たる．Schur の見方は，表現 π そのものよりも表現 π による像 $\pi(G)$ の方に重点がある．◎

② 一般射影群 $PGL(N, C)$ ではなく，一般線形群 $GL(N, C)$ の場合は，上の問題は G の線形表現を決定することに当たり，これは師 Frobenius がやった [**F60**, 1900], [**F61**, 1901].

③ G の射影表現（スピン表現ともいう）π は G の多価表現とも捉えられる．π が真性多価表現であるとき像 $\pi(\mathfrak{S}_n)$ を $\mathfrak{S}_n^{(g)}$ と書き，π が一価表現（線形表現）に戻せるとき像 $\pi(\mathfrak{S}_n)$ を $\mathfrak{S}_n^{(h)}$ と書く（添字 g, h は gebrochene, homogene の頭文字）．$\mathfrak{A}_n$ に対しても同様．

④ $\mathfrak{S}_n$ の同値でない既約射影表現の個数は，n を次のように分解する分解の個数 v_n に等しい（現代ではこの分解は **shifted Young diagram** として捉えられている）：

(1.) $$n = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m, \qquad \nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_m > 0.$$

その既約射影表現 $\mathfrak{S}_n^{(g)}$（Schur は表現 π をその像 $\pi(\mathfrak{S}_n)$ で表している）の次元は

（次元公式） $$f_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m} = 2^{[\frac{n-m}{2}]} \frac{n!}{\nu_1! \nu_2! \cdots \nu_m!} \prod_{\alpha<\beta} \frac{\nu_\alpha - \nu_\beta}{\nu_\alpha + \nu_\beta}.$$

自明な分解 $n = n$ に対しては，$f_n = 2^{[\frac{n-1}{2}]}$ である．

⑤ 次元 $2^{[\frac{n-1}{2}]}$ の射影表現 $\mathfrak{S}_n^{(g)}$ は特別に興味深い（本文では 'Hauptdarstellung' とよばれている）．その構成法は第 VI 章で与える．

⑥ 交代群 $\mathfrak{A}_n$ では，$n = 6, 7$ が例外的である．例えば，

$$|\mathfrak{A}_n^{(g)}| = 2 \cdot \frac{n!}{2} \ (n \neq 6, 7), \quad |\mathfrak{A}_n^{(g)}| = 3 \cdot \frac{n!}{2} \ (n = 6), \quad |\mathfrak{A}_n^{(g)}| = 6 \cdot \frac{n!}{2} \ (n = 7).$$

⑦ $\mathfrak{S}_n$ の**表現群**は，$n \geq 4$ のときに，$\mathfrak{T}_n, \mathfrak{T}'_n$ の 2 つがある．$n = 6$ のときだけ，この 2 つは同型になる．

$\mathfrak{A}_n$ の表現群は，$n \geq 4$ のときには，$\mathfrak{B}_n$ の 1 つだけである．$n \neq 6,7$ とすると，それは，$\mathfrak{T}_n, \mathfrak{T}'_n$ のいずれでもよいが，そこにおける $\mathfrak{A}_n$ の原像全体であり，位数は $|\mathfrak{B}_n| = 2 \cdot \dfrac{n!}{2}$ $(n \neq 6,7)$.

他方，$n = 6,7$ は例外で，$|\mathfrak{B}_n| = 6 \cdot \dfrac{n!}{2}$.

$\mathfrak{S}_n$，$\mathfrak{A}_n$ の射影表現の決定には，E. H. Moore による「$\mathfrak{S}_n$，$\mathfrak{A}_n$ の abstrakte endliche Gruppe としての特徴付け (*)」を用いる．

(*) **注：** 現代風に言えば，生成元系と基本関係式系を与えて群を定義してある．

$\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{A}_n$ の射影表現の指標の計算は複雑であるが，新しい対称関数（現在 Schur 関数とよばれている）の導入によって成し遂げられた．

4．著者（平井）のコメント：

Schur の問題意識，または研究の動機：

Schur の定義に依ると，有限群 $\mathfrak{H}$ の**射影表現**とは，$\mathfrak{H}$ の元 h に一次分数変換の元を対応させる表現である．現代風に言えば，$\mathfrak{H}$ から $PGL(N,C)$ の中への準同型である．これをより詳しくいうと，

$$\pi : \mathfrak{H} \ni h \to \pi(h) \in GL(N,C),$$
$$\pi(g)\pi(g) = \lambda_{g,h}\,\pi(hg) \quad (h,g \in \mathfrak{H},\ \lambda_{g,h} \in C^{\times}).$$

となる対応 π のことである．Schur はこの問題を取り扱う動機として，

（1）「群 $PGL(N,C)$ の有限部分群の分類問題」

を挙げており，その部分群が $\mathfrak{S}_n$ または $\mathfrak{A}_n$ となる場合をとくに取り上げて研究した，のである．

しかし，彼が創始した射影表現の理論は，重要で幅広く現在も多くの局面で発展中である（最近の論文の一部のリストを報文末尾に，Appendix のうちの "**現代**" という項目で付加したので参照されたし）．

以下ではどのような場面で射影表現が自然に現れてくるかを見てみよう．

射影表現が自然に現れてくる場所：

射影表現（またはスピン表現）は数学的に見て，次のような場合にも自然に現れてくる．

（2）リー群の普遍被覆群の線形表現の場合：

リー群 G の普遍被覆群 $\widetilde{G}$ を考えると，これは幾何学的な意味でも自然なものである．$\widetilde{G}$ の線形表現 Π をとると G の切断 $\varphi : G \to \widetilde{G}$ をとり，

$$\pi(g) := \Pi(\varphi(g)) \quad (g \in G),$$

により，G の射影表現を得る．例えば，$G = SO(3)$ の普遍被覆群は $\widetilde{G} = SU(2)$ である．

◎ 素粒子論において，1924 年 Pauli が電子に対して，spin quantum number とい

う不変量の存在を示したが，これは「電子が3次元ユークリッド空間に住んでいて，回転群 $SO(3)$-不変な物理法則によって支配されている」ことを否定して，

「電子が $SU(2)$ の働く実4次元空間にいて，$SU(2)$-不変な物理法則によって支配されている」ことを意味する．（**注：** spinor の理論は 1913 年 E. Cartan が発見した）

◎ Weyl はコンパクト半単純リー群 $SO(n)$ の普遍被覆群 $Spin(n)$ の既約表現とその指標の計算を 名著 "*Classical Groups*"（1939 年初版）で詳しく論じた．

他方，有限群の射影表現については，Schur 以後眠ったままだった．

（3） algebra（多元環）に群が働いている場合：

algebra $\mathcal{A}$ に群 G が同型写像として働いているとする．$\mathcal{A}$ をベクトル空間 V 上に線形に表現して，$\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(V)$ となっているとする．$g \in G$ に対する $\mathcal{A}$ の同型が $GL(V)$ の元 $\pi(g)$ により

$$g(Y) = \pi(g) Y \pi(g)^{-1} \quad (Y \in \mathcal{A})$$

の形で実現されているとする．この $\pi(g)$ を *intertwining operator* とよぶ．$\pi(g)$ はスカラー倍を除いて決まるので，$G \ni g \to \pi(g) \in GL(V)$ は G の射影表現である．

（4） 群 K に群 H が働いている場合：

これは（3）の場合の特別なものと思えるが，特に重要である．K の既約表現 ρ をとる．H は ρ を次のように変換する： $h \in H$ に対し，

$$({}^{h}\rho)(k) := \rho(h^{-1}kh) \quad (k \in K).$$

ρ の同値類を $[\rho]$ とかくとき，$[\rho]$ の G における stationary subgroup を $G = H([\rho])$ とおく：

$$G = H([\rho]) = \{g \in H \; ; \; {}^{g}\rho \cong \rho\}.$$

$g \in G$ には，${}^{g}\rho$ と ρ との同値を与える intertwining operator $\pi(g)$ が対応する：

$${}^{g}\rho(k) = \rho(g^{-1}kg) = \pi(g)^{-1}\rho(k)\pi(g) \quad (k \in K).$$

すると，$G \ni g \to \pi(g)$ は G の射影表現である．

なお，この場合を（3）の枠内で解釈しようとすると，多元環 $\mathcal{A}$ を K の群環 $\boldsymbol{C}[K]$，もしくは，K が局所コンパクトな場合には $L^1(K)$ にとればよい．

私の知る有名な具体例を1つ挙げる（詳細は割愛する)：

例 (A. Weil) (cf. [Wei])**.**

$K = H_{2n}$: $2n$-次元の Heisenberg group,

$G = Sp(2n, \boldsymbol{R})$, ρ:="H_{2n} の無限次元既約ユニタリ表現"

得られた $G = Sp(2n, \boldsymbol{R})$ のスピン表現は2価の表現であり，Metaplectic group $Mp(2n, \boldsymbol{R})$ の1価の表現（線形表現）となる．これを **Weil 表現**とよぶ．

（5） 群 K のユニタリ表現 ρ に群 H が働いている場合：

ρ の intertwining operators 全体を $\mathcal{I}(\rho)$ と書く．これは群になるが，その中心はスカラー作用素全体 $\mathcal{Z} := \{\lambda I \; ; \; \lambda \in \boldsymbol{C}^{\times}\}$ を含む．ここに，I は恒等作用素．上の（4）の状況のうち，必要不可欠なもののみ残すと，次のようになる．

••• H から $\mathcal{I}(\rho)$ の中への写像 Ψ が存在して，

$$\Psi(h_1)\Psi(h_2) = \kappa_{h_1,h_2}\Psi(h_1h_2) \qquad (h_1, h_2 \in H,\ \exists\, \kappa_{h_1,h_2} \in \boldsymbol{C}^{\times}),$$

を満たす（従って，Ψ は mod $\mathcal{Z}$ では，H から $\mathcal{I}(\rho)/\mathcal{Z}$ の中への同型である）．•••

この状況下では当然，写像 $H \ni h \to \Psi(h)$ は H の射影表現である．

こうした状況が自然に発生するのが（３），（４）などの場合である．

5．著者（平井）たちの最近の仕事と [S16]=[Sch3] との深い関係：

著者たちの最近の仕事 [HHH1], [HHH2] は Schur のこの仕事の延長線上にある．

群としては，複素鏡映群 $G(m,p,n)$, $p|m$, $4 \le n \le \infty$, をとる．$n < \infty$ の場合には，$G(m,p,n)$ の射影既約表現とその指標を求める．$n = \infty$, $G(m,p,\infty) := \lim_{n\to\infty} G(m,p,n)$ の場合には，有限型射影因子表現とその指標を求める．

Schur のこの仕事 [Sch3] は我々の研究を導き，また具体的な面でも参考になるところが多く，裨益されること大である．

射影表現３部作

[**Sch1**] J. Schur, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* J. für die reine und angewante Mathematik, **127**(1904), 20–50 (全集での論文番号は **4** なので，[**S4**] とも引用する)

[**Sch2**] J. Schur, *Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* ibid., **132**(1907), 85–137 ([**S10**]).

[**Sch3**] J. Schur, *Über Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* ibid., **139**(1911), 155–250 ([**S16**])

引　用　文　献：

[**平井１**] 群の表現の指標について（経験よりの管見），第 12 回数学史シンポジュウム，津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**23**(2002), pp.84-94.

[**平井２**] 対称群の指標に関する Frobenius, Schur の仕事，ibid., **24**(2003), pp.53-58.

[**平井３**] Schur の学位論文および対称群の表現，ibid., **25**(2004), pp.123-131.

[**平井４**] Frobenius による「群の指標と表現」の研究，ibid., **26**(2005), pp.222-240.

[**平井５**] Frobenius による「群の指標と表現」の研究（その２），ibid., **27**(2006), pp.168-182.

[**平井６**] Frobenius による「群の指標と表現」の研究（その３），ibid., **28**(2007), pp.290-318.

[**平井７**] Frobenius による「群の指標と表現」の研究（その４），ibid., **29**(2008), pp.168-182.

[**平井８**] Schur の表現論の仕事（射影表現３部作）　その I, ibid., **30**(2009), pp.104-132.

[**平井９**] 数学者から数学者へ／フロベニウス,『数学セミナー』2009, 1 月号, pp.6-7.

[**平井１０**] 数学者から数学者へ／シューア,『数学セミナー』2009, 2 月号, pp.6-7.

シュアーの表現論関連の論文：　全集第 I 巻

[**S1**] J. Schur, *Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen* (Inaugural-Dissertation), 1901, Berlin, Reprinted in *Gesammelte Abhandlungen,* Band I, pp.1–71.

[**S4**] J. Schur, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* J. für die reine und angewante Mathematik, **127**(1904), 20–50.

[**S6**] J. Schur, *Über eine Klasse von endlichen Gruppen linearer Substitutionen,* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1905, Physikalisch-Mathematische Klasse, 77–91.

[**S7**] J. Schur, *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere,* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1905, Physikalisch-Mathematische Klasse, 406–432.

[**S9**] J. Schur, *Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen lineare Substitutionen*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1906, Physikalisch-Mathematische Klasse, 164–184.

the following [F75], [F76] are taken from Collected Works of Frobenius:

[**F75**] (with Frobenius) *Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 186–208(1906).

[**F76**] (with Frobenius) *Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 209–217(1906).

[**S10**] J. Schur, *Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. für die reine und angewante Mathematik, **132**(1907), 85–137.

[**S11**] J. Schur, *Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1908, Physikalisch-Mathematische Klasse, 664–678.

[**S14**] J. Schur, *Beiträge zur Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen*, American Mathematical Society Transactions, **10**(1909), 159–175.

[**S16**] J. Schur, *Über Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. für die reine und angewante Mathematik, **139**(1911), 155–255.

[**S17**] J. Schur, *Über Gruppen periodischer linearer Substitutionen*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1911, Physikalisch-Mathematische Klasse, 619–627.

[**S18**] J. Schur, *Über Gruppen linearer Substitutionen mit Koeffizienten aus einem algebraischen Zahlkörper*, Math. Annalen, **71**(1911), 355–367.

（注： [S4], [S10], [S16] は上記の射影表現三部作 [Sch1], [Sch2], [Sch3] と同じである）

全集第 II 巻

[**S43**] J. Schur, *Über eine fundamentale Eigenschaft der Invarianten einer allgemeinen binären Form* (mit A. Ostrowski), ????

[**S51**] J. Schur, *Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie I. Mitteilung*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1924, 189-208.

[**S52**] J. Schur, *Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie II. Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch lineare homogene Substitutionen*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1924, 297-321.

[**S53**] J. Schur, *Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie III. Vereinfachung des Integralkalküls, Realitätsfragen*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1924, 346-355.

全集第 III 巻

[**S58**] J. Schur, *Über die reellen Kollineationsgruppen, die der symmetrischen oder der alternierenden Gruppe isomorph sind*, ???Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 19??, ???-???.

[**S59**] J. Schur, *Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1927, 58-75.

[**S62**] J. Schur, *Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1928, 100-124.

[**S68**] J. Schur, *Zum Irreduzibilitätsbegriff in der Gruppen linearer homogener Substitutionen* (mit R. Brauer), ???Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 19??, ???-???.

[**S73**] J. Schur, *Zur Theorie der einfache transitiven Permutationsgruppen*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1933, Physikalisch-Mathematische Klasse, 598–623.

••• Appendix: 関連する論文のリスト •••

線形表現と指標の創始時代：

[**B1**] W. Burnside, *On the reduction of a group of homogeneous linear substitutions of finite order*, Acta Math., **28**(1904), 369-387.

[**B2**] W. Burnside, *On the representation of a group of finite order as an irreducible group of linear substitutions and the direct establishment of the relations between the group-characteristics*, Proceedings London Math. Soc. (2), **1**(1904), 117-123.

[**F53**] *Über Gruppencharaktere*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 985–1021(1896).

[**F54**] *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1343–1382(1896).

[**F56**] *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 944–1015(1897).

[**F59**] *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen II*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 482–500(1899).

[**F60**] *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 516–534(1900).

[**F61**] *Über die Charaktere der alternirenden Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 303–315(1901).

[**F68**] *Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 328–358(1903).

[**Mo2**] Theodor Molien, *Eine Bemerkung zur Theorie der homogenen Substitutionensgruppe*, Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft Universität Jurje (Dorpat) [or, Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft], **11**(1897), 259-274.

ワイルの半単純リー群の表現と指標の理論：

[**W1**] H. Weyl, *Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen (Aus einem schreiben an Herrn I. Schur)*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1924, 338-345.

[**W2**] H. Weyl, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I–III*, Mathematische Zeitschrift, **23**(1925), 271-301; **24**(1926), 328-376; **24**(1926), 377-395.

現代： 有限または無限の，対称群・交代群・複素鏡映群の射影表現：

[**DaMo**] J.W. Davies and A.O. Morris, *The Schur multiplier of the generalized symmetric group*, J. London Math. Soc., **(2) 8**(1974), 615-620.

[**HHH1**] T. Hirai, E. Hirai and A. Hora, Towards projective representations and spin characters of finite and infinite complex reflection groups, *Proceedings of the fourth German-Japanes Symposium, Infinite Dimensional Harmonic Analysis, IV*, World Scientific, 2009, pp.112-128.

[**HHH2**] T. Hirai, E. Hirai and A. Hora, Projective representations and spin characters of complex reflection groups $G(m,p,n)$ and $G(m,p,\infty)$, I, to appear.

[**HoHu**] P.N. Hoffman and J.F. Humphreys, *Projective representations of the symmetric group*, Oxford University Press, 1992.

[**IhYo**] S. Ihara and T. Yokonuma, *On the second cohomology groups (Shur multipliers) of finite reflection groups*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Ser. 1, **IX**(1965), 155-171.

[**Kar**] G. Karpilovsky, *The Schur multiplier*, London Math. Monographs, New Ser. **2**, Oxford University Press, 1987.

[**Kle**] A. Kleshchev, *Linear and projective representations of symmetric groups,* Cambridge Tracts in Mathmatics, **163**, 2005.

[**Mor**] A.O. Morris, *The spin representation of the symmetric group*, Proc. London Math. Soc., **(3) 12**(1962), 55-76.

[**Naz1**] M. Nazarov, *Projective representations of the infinite symmetric group*, Advances Soviet Math., **9**(1992), 115-130.

[**Naz2**] M. Nazarov, Young's symmetrizers for projective representations of the symmetric group, *Adv. Math.*, **127**(1997), 190-257.

[**Rea**] E.W. Read, *On the Schur multipliers of the finite imprimitive unitary reflexion groups $G(m,p,n)$*, J. London Math. Soc., **(2)**, **13**(1976), 150-154.

[**Wei**] A. Weil, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta Math., **111**(1964), 143-211.