算術幾何平均について

宍川 幸隆

ϑ関数の定義

$\mathrm{Im}\,\tau>0$ なる $\tau\in\mathbb{C}$ を一つ定める．v を複素変数，

$$(1)\quad \begin{cases} z=\exp(\pi i v) \\ q=\exp(\pi i \tau) \end{cases}$$

として，v についての整関数 $\Theta(v)$ を

$$(2)\quad \Theta(v)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n-1)} z^{2n}$$

と定める．更に

$$(3)\quad \begin{cases} \vartheta_1(v|\tau)=\exp(-\pi i v)\,\Theta(v-\frac{1}{2}) \\ \vartheta_2(v|\tau)=-i\exp(-\pi i v)\,\Theta(v) \\ \vartheta_3(v|\tau)=-i\exp(-\pi i\frac{\tau}{4})\,\Theta(v+\frac{\tau}{2}) \\ \vartheta_0(v|\tau)=-i\exp(-\pi i\frac{\tau}{4})\,\Theta(v-\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}) \end{cases}$$

と定義し，これらをϑ関数と呼ぶ．

$\vartheta_1,\vartheta_3,\vartheta_0$ を ϑ_2 で表せば

$$(4)\quad \boxed{\begin{aligned} \vartheta_1(v|\tau)&=\vartheta_2(v-\tfrac{1}{2}|\tau) \\ \vartheta_3(v|\tau)&=\varepsilon^{-1}\vartheta_2(v+\tfrac{\tau}{2}|\tau) \\ \vartheta_0(v|\tau)&=-i\varepsilon^{-1}\vartheta_2(v-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\tau}{2}|\tau) \end{aligned}}$$

となる．但し，

$$(5)\quad \boxed{\varepsilon=\exp(-\pi i(v+\tfrac{\tau}{4}))}$$

とする．

ϑ関数の諸性質

(2)と(3)から，ϑ関数をzの無限級数に展開すれば

$$
(6)\quad \boxed{\begin{aligned}
\vartheta_1(v|\tau) &= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} z^{2n-1}\\
\vartheta_2(v|\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} z^{2n-1}\\
\vartheta_3(v|\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^{2n}\\
\vartheta_0(v|\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} z^{2n}
\end{aligned}}
$$

となる．$\vartheta_i(v|\tau)\,(i=1,2,3,0)$において変数$v$を

$$v+\frac{1}{2},\quad v+\frac{\tau}{2},\quad v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},\quad v+1,\quad v+\tau,\quad v+1+\tau$$

に置き換えると，次の表の公式を得る；但し，(5)，

$$(7)\quad \boxed{\delta = \exp(-\pi i(2v+\tau))}$$

とする．

(8)

	$v+\frac{1}{2}$	$v+\frac{\tau}{2}$	$v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$	$v+1$	$v+\tau$	$v+1+\tau$
ϑ_1	ϑ_2	$i\varepsilon\vartheta_0$	$\varepsilon\vartheta_3$	$-\vartheta_1$	$-\delta\vartheta_1$	$\delta\vartheta_1$
ϑ_2	$-\vartheta_1$	$\varepsilon\vartheta_3$	$-i\varepsilon\vartheta_0$	$-\vartheta_2$	$\delta\vartheta_2$	$-\delta\vartheta_2$
ϑ_3	ϑ_0	$\varepsilon\vartheta_2$	$i\varepsilon\vartheta_1$	ϑ_3	$\delta\vartheta_3$	$\delta\vartheta_3$
ϑ_0	ϑ_3	$i\varepsilon\vartheta_1$	$\varepsilon\vartheta_2$	ϑ_0	$-\delta\vartheta_0$	$-\delta\vartheta_0$

また，ϑ_iは次のような無限積表示を持つ：

$$
(9)\quad \boxed{\begin{aligned}
\vartheta_1(v|\tau) &= -iq^{\frac{1}{4}}(z-z^{-1})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}z^2)(1-q^{2n}z^{-2})\\
\vartheta_2(v|\tau) &= q^{\frac{1}{4}}(z+z^{-1})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2})\\
\vartheta_3(v|\tau) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})\\
\vartheta_0(v|\tau) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})
\end{aligned}}
$$

また公式(9)で$v=0\ (z=1)$とおくと

$$(10)\quad \boxed{\begin{aligned}&\vartheta_1(0|\tau)=0\\&\vartheta_2(0|\tau)=2q^{\frac{1}{4}}Q_0Q_1^2\\&\vartheta_3(0|\tau)=Q_0Q_2^2\\&\vartheta_0(0|\tau)=Q_0Q_3^2\end{aligned}}$$

となる。但し

$$(11)\quad \boxed{\begin{aligned}&Q_0=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}),\quad Q_1=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})\\&Q_2=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}),\quad Q_3=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})\end{aligned}}$$

である。またGaussが与えた公式として

$$(12)\quad F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$$

とおくとき

$$(13)\quad \begin{cases}Q_0=F(q^2)\\Q_1=F(q^4)/F(q^2)\\Q_2=F(q^2)^2/(F(q)F(q^4))\\Q_3=F(q)/F(q^2)\end{cases}$$

と表される。以上を用いて、次の定理が証明される：

<u>定理1</u>

$$(14)\quad \boxed{\vartheta_3(2v|2\tau)=\frac{\vartheta_3^2(v|\tau)+\vartheta_0^2(v|\tau)}{2\vartheta_3(0|2\tau)}}$$

<u>系(Gauss)</u>　(14)で$v=0$とおくと

$$(15)\quad \boxed{2\vartheta_3^2(0|2\tau)=\vartheta_3^2(0|\tau)+\vartheta_0^2(0|\tau)}$$

//

ϑ関数の変換公式

定理2

(16)
$$\boxed{\begin{aligned}\vartheta_1(v|\tau+1)&=e^{\frac{i\pi}{4}}\vartheta_1(v|\tau)\\ \vartheta_2(v|\tau+1)&=e^{\frac{i\pi}{4}}\vartheta_2(v|\tau)\\ \vartheta_3(v|\tau+1)&=\vartheta_0(v|\tau)\\ \vartheta_0(v|\tau+1)&=\vartheta_3(v|\tau)\end{aligned}}$$

(17)
$$\boxed{\begin{aligned}\vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\middle|\frac{-1}{\tau}\right)&=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\tau}{i}}\,e^{\frac{i\pi}{\tau}v^2}\vartheta_1(v|\tau)\\ \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}\middle|\frac{-1}{\tau}\right)&=\sqrt{\frac{\tau}{i}}\,e^{\frac{i\pi}{\tau}v^2}\vartheta_0(v|\tau)\\ \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}\middle|\frac{-1}{\tau}\right)&=\sqrt{\frac{\tau}{i}}\,e^{\frac{i\pi}{\tau}v^2}\vartheta_3(v|\tau)\\ \vartheta_0\left(\frac{v}{\tau}\middle|\frac{-1}{\tau}\right)&=\sqrt{\frac{\tau}{i}}\,e^{\frac{i\pi}{\tau}v^2}\vartheta_2(v|\tau)\end{aligned}}$$

//

~~補母数~~と算術幾何平均

$a>0,\ b>0$に対して

(18)
$$\begin{cases} a_1=\dfrac{a+b}{2}, & a_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}, \quad \cdots\cdots, \quad a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}, \cdots\cdots \\ b_1=\sqrt{ab}, & b_2=\sqrt{a_1b_1}, \quad \cdots\cdots, \quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}, \cdots\cdots\end{cases}$$

を作ると

$$0<b_1<b_2<\cdots\cdots<b_n<\cdots\cdots<a_n<\cdots\cdots<a_2<a_1$$

であり，かつ

(19) $$a_n-b_n<(a_{n-1}-b_{n-1})/2 \qquad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

故

(20) $$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=M(a,b)$$

が定まる．これをaとbとの算術幾何平均という．(20)の収束は極めて速い．次の公式は自明である：

(21) $$M(ac,bc)=M(a,b)c$$

$M(a,b)$とϑ関数との関係は，次の補題から導かれる：

<u>補題</u>

(22) $\quad \vartheta_3^2(0|2\tau)=\frac{1}{2}(\vartheta_3^2(0|\tau)+\vartheta_0^2(0|\tau))$

(23) $\quad \vartheta_0^2(0|2\tau)=\vartheta_3(0|\tau)\vartheta_0(0|\tau)$ //

(22)は定理1，系(14)式である．

(23)は(10)，(12)，(13)から従う．

いま与えられた2つの正数a,bに対して

(24) $\quad a=\mu\vartheta_3^2(0|\tau),\quad b=\mu\vartheta_0^2(0|\tau)$

となるようにτ($\mathrm{Im}\,\tau>0$)を採れたとする．i.e.,

$$\frac{b}{a}=\frac{\vartheta_0^2(0|\tau)}{\vartheta_3^2(0|\tau)}\Rightarrow k'(\tau)=k'$$

に採ったとすれば，上の補題によって

(25) $\quad a_n=\mu\vartheta_3^2(0|2^n\tau),\quad b_n=\mu\vartheta_0^2(0|2^n\tau)\quad (n=1,2,\cdots)$

ここで$n\longrightarrow\infty$とすれば $q(2^n\tau)=\exp(2^n\pi i\tau)\longrightarrow 0\ [\because \mathrm{Im}\,\tau>0]$

故，(10)，(11)から

$$\lim_{n\to\infty}\vartheta_3^2(0|2^n\tau)=1,\quad \lim_{n\to\infty}\vartheta_0^2(0|2^n\tau)=1$$

となり，したがって

(26) $\quad M(a,b)=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\mu=\frac{a}{\vartheta_3^2(0|\tau)}$

となる．以上から，次の定理が証明された：

<u>定理3</u>　$\mathrm{Im}\,\tau>0$なる$\tau\in\mathbb{C}$に対して

$$k'=k'(\tau)=\frac{\vartheta_0^2(0|\tau)}{\vartheta_3^2(0|\tau)},\quad K=K(\tau)=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0|\tau)$$

とおくと，

(27) $\quad \boxed{M(1,k'(\tau))=\frac{\pi}{2K}=\frac{1}{\vartheta_3^2(0|\tau)}}$ //

楕円関数論に依れば

$$K=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

である。但し,

$$k=\sqrt{\frac{\vartheta_2^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)}}=k(\tau)$$

であって, ϑ 関数論に依れば

(28) $\quad k^2+k'^2=1$

が成り立つ。$k=k(\tau)$ を母数(modulus), $k'=k'(\tau)$ を補母数という。Gaussは補母数 $k'=k'(\tau)$ を与えて, これから τ を定めるのに, 次の定理を用いた:

定理4 $\quad k'=k'(\tau)$ を与えるとき

(29) $$\boxed{\tau=i\frac{M(1,k')}{M(1,k)}}$$

および

(30) $$\boxed{\tau=1+i\frac{M(1,k')}{M(-ik,k')}}$$

が成り立つ。 //

定理4は ϑ 関数の変換公式(定理2)と定理3によって示される。

例 $\quad k'(\tau)=\sqrt{2}$ のとき, $k^2=-1$ で, $k=i$ とすると(30)から

$\tau=1+i\dfrac{M(1,\sqrt{2})}{M(1,\sqrt{2})}=1+i$ である。よって $K=\omega=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ に対して

$M(1,\sqrt{2})=\dfrac{\pi}{2\omega}$ である。また, このとき確かに $k(\tau)=i$ である。 //

定理4によって, 2つの正数 a,b に対して, $\dfrac{b}{a}=k'(\tau)$, $\mathrm{Im}(\tau)>0$ なる τ が定まる。よって(24)なる τ が採れるから, 定理3により

$$M(a,b)=aM\left(1,\frac{b}{a}\right)=aM(1,k'(\tau))=\frac{a\pi}{2\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}},$$

但し, $k=\sqrt{1-\dfrac{\vartheta_0^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)}}=\sqrt{\dfrac{\vartheta_2^4(0|\tau)}{\vartheta_3^4(0|\tau)}}$ である。

例　$r>0$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$a=r$，$b=r\cos\theta$ のとき，
$\frac{b}{a}=\cos\theta=k'(\tau)$ かつ $\mathrm{Im}(\tau)>0$ なるτは，

$$k=\sqrt{1-k'^2(\tau)}=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sin\theta$$

により，定理4から，$\tau=i\dfrac{M(1,\cos\theta)}{M(1,\sin\theta)}$ である．よって定理3により

$$M(r,r\cos\theta)=\frac{r\pi}{2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\sin^2\theta x^2)}}}$$

である．そして，$\lim\limits_{\theta\to 0}\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\sin^2\theta x^2)}}=\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\pi}{2}$
は $\lim\limits_{\theta\to 0}M(r,r\cos\theta)=r$ に合致している！　//

[参考文献]

[1]　河田敬義，ガウスの楕円関数論，
上智大学数学講究録 No.24

[2]　A.フルヴィッツ/R.クーラント著，
足立恒雄/小松啓一 訳，
楕円関数論，シュプリンガー・フェアラーク東京

[3]　梅村浩，楕円関数論，東京大学出版会

おわりに

近世数学史談に依れば，ガウスは，第一部超幾何級数，第二部算術幾何平均及び modular function，第三部楕円函数を総括する大著述を計画していた様ですが，現代の視点から，その様なものを著したものとして，参考文献[3]が存在していると思います．