ガウスと測地学

植　村　栄　治　(大東文化大学)

2010年10月10日

1　測地学の歴史

測地学とは, 地球の形と大きさを調べる学問である. その歴史は, 紀元前3世紀のエラトステネス (前275年 - 前194年) による地球の大きさの測定に始まるとされる. 彼はアレキサンドリアとシエネ (現在のアスワン) における太陽高度の差異から, 地球を球としたときの半径を

6300km

と見積もった (注1). この値は現在の測定値 (短半径約6357km. 長半径約6378km) にかなり近いと言える.

3角測量を用いて子午線の長さを測る測量は, 1615年にオランダのヴィレブロルト・スネル (Willebrord Snell. 1580年 - 1626年) により初めて行われた. この測量結果には数パーセント程度の誤差があったとされる. その後, 1669年にフランスのジャン・ピカール (Jean-Felix Picard. 1620年 - 1682年) が本格的な三角測量を行い, 緯度1度に相当する子午線弧長を0.3%程度の精度で測定した.

この頃になると, 地球は完全な球でないという考えが現れた. ニュートン (Isaac Newton. 1642年 - 1727年) は, 地球は自転による遠心力のために赤道方向に膨らんだ回転楕円体（楕円をその軸の周りに回転させたときにできる形）であると考え, 地球の全体が密度一定の液体なら, その

扁平率は230分の1

と予想した.

また, オランダのクリスティアーン・ホイヘンス (Christiaan Huygens. 1629年 - 1695年) は, ニュートン同様, 地球の形は赤道方向に膨らんだ回転楕円体 (扁球) であるとし, 地球の質量がすべてその中心に集まっているなら

扁平率は578分の1

と予想した (実際は約298分の1).

これに対し, ジョヴァンニ・ドメニコ・カッシーニ (Giovanni Domenico Cassini. 1625年 - 1712年. パリ天文台初代台長) は, ニュートンたちとは逆に, 地球は北極ー南極方向に伸びた回転楕円体 (長球) であると主張した. また, その子ジャック・カッシーニ（Jacques Cassini. 1677年 - 1756年) は, フランスの北端と南端にあって経度が同じダンケルクとペルピニャンの間の測量を1713年に行い, その結果を"De la grandeur et de la figure de la terre"『地球の大きさと形状』(1720) に取りまと

めて, 地球は長球だと主張した.

両方の考えのどちらが正しいかを決めるには, 等しい緯度差分の経線を低緯度と高緯度とで測量して比較すればよい (低緯度の方が長ければ扁球). 子午線の測量を行えば, 地球の膨らんでいる方向が分かるとともに, 地球の周囲の長さも判明する.

フランス科学アカデミーは, 1735年から1740年にかけて, 赤道直下のペルー (現在のエクアドル) 及び北欧のラップランドで子午線弧長の測量を実施し, その結果, 地球は赤道方向に膨らんだ扁球であることを確認した. なお, ジャック・カッシーニの測量については, ニコラ・ルイ・ド・ラカーユ (Nicolas-Louis de Lacaille. 1713年 - 1762年) が1739年から1741年にかけて行った再測量により, 不正確だったことが確認された.

1792年から1798年にかけて, メートルの基準を決めるために, ダンケルクからバルセローナまでの測量がジャン=バティスト・ジョゼフ・ドランブル (Jean-Baptiste Joseph Delambre. 1749年 - 1822年) らにより行われた. なお, ガウスはこの測量結果に基づき, 1799年に,

地球の扁平率を　187分の1

と計算している (後述).

(注1) シエネの位置はほぼ北回帰線上にあるため, 夏至の日には太陽の光が井戸の底まで届く. エラトステネスは、このことを伝え聞いて地球の大きさを計算できることに気付いたと言われている.

【参考】　緯度について

緯度には, ①地理緯度 (地理的緯度, 測地緯度), ②地心緯度, ③天文緯度の３種類がある. 地理緯度とは「或る地点における回転楕円面に接する平面と地軸との成す角」を指す. 地心緯度とは「地心から見て地軸となす角の余角」のことである. また, 「天文緯度」とは「鉛直線と地軸に平行な直線のなす角の余角」である. 地球は赤道方向にふくらんだ回転楕円体であるため, 地心緯度は, ０度と９０度を除いて, 地理緯度よりわずかに小さい. 地球内部の質量が均一であれば鉛直線の延長は地心を通り, 地心緯度と天文緯度は一致するはずだが, 実際には付近に山があるなどして重力が変化するので地心緯度と天文緯度は必ずしも一致しない. 或る地点で測量を行えばその地点の天文緯度は分かるが, 地理緯度や地心緯度は直ちに求まらない. なお, 緯度と異なり, 経度の測量には, 通常, 正確な時間測定が不可欠である.

2　その後の地球楕円体

その後, フリードリヒ・ヴィルヘルム・ベッセル (Friedrich Wilhelm Bessel. 1784年 - 1846年) は, 1841年に地球の形として

長半径を 6,377,397.155m,　扁平率を 299.152813 分の 1

とする楕円体を提唱した (注 2). これはベッセル楕円体と呼ばれ, 東アジアでは近年まで測量・測位の基礎となる座標系 (準拠楕円体) として採用されていた.

また, 1866 年にはイギリスのアレキサンダー・ロス・クラーク (Alexander Ross Clarke. 1828 年 - 1914 年) が,

長半径を 6,378,249.145m,　扁平率を 293.465 分の 1

とする楕円体を提唱した. これはクラーク楕円体と呼ばれ, 北米やアフリカで採用された.

その他, ヨーロッパや南米では, 1909 年頃に提唱された,

長半径を 6,378,388m,　扁平率を 297 分の 1

とする国際楕円体が採用された.

以上のように, 地球楕円体として地域ごとに異なるものが採用されていたため, 全地球で統一的な緯度経度を与えることはできなかった. しかし, 20 世紀後半になると人工衛星の周期の解析等からより精確な測定が可能になり, IUGG(注 3) は, 1980 年に GRS80 (GRS は Geodetic Reference System の略) と呼ばれる楕円体を決定した. その楕円体の

長半径は 6378137m,　扁平率は 298.257222101 分の 1

である.

1984 年にはアメリカ国防省により WGS84 (WGS は World Geodetic System の略) と呼ばれる楕円体が決定され, 米国は現在でもこれを使用している. WGS84 楕円体は, GRS80 楕円体と比べて長半径は同じで, 短半径が約 0.1mm 長いに過ぎず (扁平率の逆数は 0.000001462 だけ大きい), GRS80 楕円体との実用上の差異はないとされる.

日本では, 2002 年 4 月 1 日にベッセル楕円体から GRS80 楕円体に準拠楕円体が変更され, 法制面においては「日本測地系」(Tokyo Datum. 旧日本測地系) から「世界測地系」(The Japanese Geodetic Datum 2000) と呼ばれる新たな測地系に移行した (注 4). これにより, 東京付近では, 経度が約 −12 秒, 緯度が約 +12 秒の変化 (距離に換算すると, 北西方向への約 450m のずれ) を生じた.

(注 2) Friedrich Wilhelm Bessel, *Über einen Fehler in der Berechnung der franzözischen Gradmessung und seinen Einfluß auf die Bestimmung der Figur der Erde*, Astronomische Nachrichten, Bd.19, Nr.438, 1841, S.97(116).
(注 3) IUGG は, International Union of Geodesy and Geophysics(国際測地学・地球物理学連合) の略. 測地学と地球物理学に関する非営利の国際的な学術団体であり, 国際科学会議 (ICSU) の加盟団体の 1 つ.

(注 4) 現在の測量法によれば, 地理学的経緯度は, 以下の3つの要件を満たす扁平な回転楕円体を想定した「世界測地系」に従って測定することを要する (同法11条2項3項).

①その長半径及び扁平率が、地理学的経緯度の測定に関する国際的な決定に基づき政令で定める値であるものであること

②その中心が、地球の重心と一致するものであること

③その短軸が、地球の自転軸と一致するものであること

そして, ①を受けて, 測量法施行令3条は, 次のように長半径と扁平率を定めている.

(1) 長半径　六百三十七万八千百三十七メートル

(2) 扁平率　二百九十八・二五七二二二一〇一分の一

3　ガウスと測地学のかかわり（その1）—— 1802年頃まで

測地学に関するガウスの活動が刊行物に初めて登場するのは, 1799年のことである. フランツ・クサーファー・フォン・ツァッハ (Franz Xaver von Zach. 1754年 - 1832年) が編集していた「一般地理学日誌」(Allgemeine Geographische Ephemeriden) の第4号 (1799年10月)378頁に掲載されたガウスの1799年8月24日付のツァッハ宛て書簡によれば, ガウスはダンケルクとバルセローナの間の弧長測量 (緯度測量) の結果に基づいて, 地球の扁平率を187分の1, 子午線の4分の1の長さ (北極から赤道までの距離) を2565006 Moduln と算定している (全集8巻136頁).

この弧長測量は, 前述のように, ドランブルらがメートルの基準を決めるために行ったものであり, ダンケルク, パリ (パンテオン), エヴォー, カルカソンヌ, バルセローナの5都市 (これらは同一子午線上にある) の緯度及び相互間の距離を測定した.

ツァッハはこの測量の成果を一般地理学日誌7月号で紹介した模様だが, その際にパンテオンとエヴォーの間の数値として示された「76545.74」は「76145.74」の誤りである旨をガウスが上記の1799年8月24日付の書簡で指摘し, ツァッハも脚注でその指摘の正しさを認めた.

なお, この書簡の中で, ガウスは計算に際して「私は, あなたに証明を与えた我が方法を適用して楕円を決定した」旨を述べている. この「我が方法」が最小自乗法を指すことは明らかである. この証明につき, ツァッハは脚注で「これについては次の機会に」とのみ記しているが, 結局, そのままになってしまった. ガウスがツァッハに書き送ったと思われる最小自乗法の証明がもし誌上に掲載されていれば, 後年, ルジャンドル (Adrien-Marie Legendre. 1752年 - 1833年) による先取権の主張はなかったであろう.

また, 1799年には, ウェストファーレン地方の測量を軍事目的で行っていたプロイセンの von Lecoq 大佐 (Karl Ludwig Edler von Lecoq. 1753年 - 1829年) が, ガウスに対し, 書簡のやり取りを通して, 星の観測データからミンデンの経度を計算することを依頼したり, 方位角の計算について意見や助言を求めたりしている

(【2】16～18 頁).

19 世紀初め頃にはフランスやプロイセンが自国の領土の精確な測量に関心を持つようになり，最新の器械や技術を用いた大規模かつ精確な測量が各地で企画・実施されるようになった．例えば，ツァッハはプロイセン国王からプロイセンが新たに獲得した領土の測量を要請されていたが，その測量は少なくともイギリス及びフランスの最新の測量に匹敵するレベルであることが求められていた．また，Gotha の大公はその測量と連結する広範な緯度測量を計画しており，ツァッハはその計画に従って約 20km の基線の測量を実施する構想を持っていた模様である．そのほかにも多くの人によって様々な測量が企画・実施されており，ガウスは次に見るように 1805 年頃までしばしば種々の形でそれらに関与した．

4　ガウスと測地学のかかわり（その２）—— 1803 年頃から 1805 年頃まで

ガウスは，この頃，ツァッハから譲られた六分儀等を使用して，独自にブラウンシュヴァイク周辺の測量を行っていた模様である。ガウスがハインリヒ・ヴィルヘルム・マトイス・オルバース (Heinrich Wilhelm Matthäus Olbers. 1758 年 - 1840 年) に送った 1803 年 8 月 8 日付の書簡によれば、この頃既にガウスはブラウンシュヴァイク公国全体を 1 つの 3 角網で覆って測量するというプランを頭の中で描いていた (【2】22 頁).

ツァッハは，Gotha にある Seeberg 天文台の長を 1798 年から 1806 年まで務め，著名な天文家や測量家と多くの交流があったが，1803 年頃には (恐らくプロイセン国王の依頼に関連して)Gotha 周辺の測量を精力的に手掛けていた．ガウスも，ツァッハを通じてあるいは独自にそれらの人々と知り合い、測量に関する実務的な経験を積む機会を得た．例えば，以下のような出来事があった (【2】23～28 頁)。

① 1803 年頃にガウスは，ブラウンシュヴァイクとその周辺で緯度と経度の決定を行っていたフォン・エンデ (Ferdinand Adolf von Ende. 1760 年 - 1817 年. Württemberg の司法大臣) と知り合った．ツァッハは以前にエンデに精密なクロノメーター (高精度の時計) を贈ったことがあり，それはその後ゴータ公の所有物になっていた．ガウスはそのクロノメーターを用いて太陽の観察や時間測定を行った．1803 年 8 月にツァッハは Brocken に居て火薬信号を使用した経度決定を行っていたが，その際，ガウスと Ende にはブラウンシュヴァイク，ヘルムシュタット及び Wolfenbüttel における作業が委ねられていた．

② 1803 年 8 月末にはガウスと Ende はツァッハに合流し，さらに Gotha まで同行して，ウイーンから来た Johann Tobias Bürg 教授 (1766 年 - 1835 年) と共に Seeberg の基線測量に参加した．その後，ガウスは 3 ヶ月ほど Seeberg 天文台に滞在した．

③ 1803 年 12 月にはガウスはツァッハとともにブラウンシュヴァイクに戻って，天文台に適した場所の探索を行ったが，結局，天文台の建設にまでは至らなかった．

④ 1803 年春には観測家ハーディング (Karl Ludwig Harding. 1765 年 - 1834 年) が Seeberg 天文台に来ていた．彼はゲッチンゲンの新しい天文台の子午線を確定しようという提案を携えていた．このときにガウスとハーディングは初めて知り合っ

たと考えられる．ハーディングは後にゲッチンゲン天文台の監督権をガウスと共に与えられたとされる．
⑤ 1804年にガウスは，ハノーヴァーから約35km離れた小温泉地Rehburgに保養中のオルバースを訪ね，二人で短期間のうちにハノーヴァー，Brocken及びミンデン間の測量を行っている．なお，この際，RehburgからBrockenの山頂が見えたことはツァッハの関心を引いた．ツァッハは，1805年春のBrockenにおける火薬信号測量に際してRehburgの位置決定を引き受けるようガウスに依頼したが，この測量は結局実現しなかったようである．
⑥ Lecoqが1797年～1802年にウェストファーレンの3角測量を行った際に，von Müffling少尉[男爵](Friedrich Karl Ferdinand von Müffling. 1775年 - 1851年)という人物が参加していた．Müfflingは，ツァッハらによる1803年のSeebergの基線測量にも参加したが，その後，ツァッハの提案に従ってチューリンゲン全体を旅行し，経線儀を用いて，多くの地点で教会の塔などとの角度を測定した．ガウスはその結果を基にして詳細な計算を行い，Brockenからフランスまでの多数の地点の位置を高い精度で決定した．
⑦ フランスが占領していたドイツ国内の地域において測量を指揮していたフランスのEpailly大佐は，1805年にブラウンシュヴァイクにも来たが，ガウスはその測量器械を見て，特に最新の「Troughtonの子午環」が気に入ったと伝えられている。Epailly大佐がまとめた測量報告書は，後にガウスも入手し，ガウス自身の後年のハノーヴァー測量に一定程度役に立ったとされる．

以上のように，ガウスはツァッハらの測量作業に参加するなどして実地の経験を積んでいるが，しばしば，自分が開発した計算方法を適用して諸地点の経度・緯度の計算を行い，従来の地図の不正確さを示したりしていることが注目される．このような測量の経験があったからこそ1820年代のハノーヴァー王国の測量を引き受けることが可能だったと言えよう．

5　ガウスと測地学のかかわり（その3）—— 1806年頃以降

1807年にゲッチンゲンに天文台長として着任して以降は，ガウスは測量や測地学と余り縁がなかった．しかし，1808年から1年間ガウスの指導を受けてデンマークに帰国したシューマッハ(Christian Heinrich Schumacher. 1780年 - 1850年)が1816年にハノーヴァー公国内の測量実施をガウスに打診してきた．シューマッハは既に着手していたデンマーク領内での測量成果をさらに南方に伸ばしてハノーヴァー公国の測量と連結させようという構想を持っていた．その実現のためにガウスの力に期待したわけである．

ハノーヴァー公国内の測量は，ガウスがハノーヴァー政府から命じられた形で，1818年にその調査作業が始まり，本格的な測量は1822年からとりあえず1825年まで行われた．その後はガウス自身は測量に参加しなかったものの助手たちが引き継ぎ，同公国内の測量は1841年まで続いた．結局，ガウスは約25年の長きにわ

たってハノーヴァー公国内の測量の企画や実施に関与したことになる.

6　測地学に関するガウスの論文

測地学に関するガウスの論稿 (草稿・メモ類・書簡を含む) は多いが, 論文の形で生前に刊行されたものは数個に過ぎない. その中で理論的な面で最も注目されるのは, 1843年と1846年に発表された,

「高等測地学の対象に関する研究」(第1論文及び第2論文)

である【3】. この論文において, ガウスは, 楕円体である地球の表面上の点の緯度・経度を測量データに基づいていかに精確に決定するかという問題を考察した.

測地学において実際上しばしば必要となるのは, 既に緯度・経度の分かっている場所から或る地点までの方位角と距離を測定してその地点の緯度・経度を計算することである. この問題は, 球面上であれば, 比較的容易な計算で解くことができる. 第1論文ではそのための計算式を数通り示しているが, ガウスが推奨する精度の高い「第4の方法」は次の通りである.

$$\tan s = \cos T \tan r$$

$$\tan \lambda = \frac{\tan T \sin s}{\cos(S - s)}$$

$$\tan t = \sin T \sin r \tan(S - s)$$

$$\sin \tau = \sin T \tan \frac{1}{2} r \sin s$$

$$\sin \sigma = \tan T \tan \frac{1}{2} \lambda \cos(S - s)$$

$$S' = S - s - \sigma$$

$$T' = T - t - \tau$$

ここで, S は始点の緯度, T は始点から見た終点の方位角 (真南を0とし時計回りに測る), r は始点から終点までの長さ (球の中心からの角度で表す) であり, 以上は既知である. そして求めるものは, 終点における方位角 T', 終点の緯度 S', 及び始点と終点の経度差 λ である (s, t, τ, σ はそれぞれ1番目, 3番目, 4番目, 5番目の式の右辺で定まる量).

次に, 地球のような楕円体面上で同じ問題を考えた場合, 楕円体面上の点を適当な球面上に写した後に上記の計算を行い, そこで得られた緯度・経度を楕円体面上の緯度・経度に換算すれば答えが得られる. しかし, それでは計算が煩雑になり精度も落ちるので, できれば楕円体上で直接計算できる式がほしい. これを扱ったのが第2論文であり, ガウスは次のような解法を示している.

$$\text{(I)} \qquad l = \frac{hr \sin T}{a \cos B} \left(1 - \frac{(1 - 10\,e\,e \sin^2 B) \cos^2 \varphi}{24k^4} \cdot bb + \frac{1}{24} tt\right)$$

$$(\mathrm{II})\qquad b=\frac{r\,k^3}{a\,\cos^2\varphi}\cdot\cos T\left\{1-\frac{1}{24\,k^4}(2+ee-(8\,ee-14\,e^4)\sin^2 B\right.$$

$$\left.-9\,e^4\sin^4 B)\,b\,b+\frac{k^4}{12\,a\,a\,\cos^2\varphi}\cdot r\,r+\frac{1}{8}\,t\,t\right\}$$

$$(\mathrm{III})\qquad t=\frac{r\,k\,\tan B\sin T}{a}\left(1+\frac{5\,ee+(4\,ee-14e^4)\sin^2 B+5\,e^4\sin^4 B}{24\,k^2}\cdot b\,b\right.$$

$$\left.+\frac{k^4}{12\,a\,a\,\cos^2\varphi}\cdot r\,r+\frac{1}{24}\,t\,t\right)$$

ここで, a は楕円体の長軸の半分 (= 赤道の半径), $e(=\sin\varphi)$ は楕円の離心率である．また, 楕円体上の始点と終点の緯度を $B+\frac{1}{2}b$ 及び $B-\frac{1}{2}b$ で表し, 経度差を l, 始点と終点の間の測地線の長さ (測定単位は任意) を r, 始点及び終点におけるそれぞれの方位角を $T+\frac{1}{2}t$ 及び $T-\frac{1}{2}t\pm 180°$ とする．h は球面上の大円を座標の横軸とした場合の横座標を示す量であり, k は $\sqrt{1-ee\sin^2 B}$ を表す.

さらにガウスは, 別解として, 解の近似的な数値が分かっている場合の簡便な計算方式を紹介している．この近似計算を数回繰り返して有効数字が変化しなくなればそれが最終的な答えになる。その計算例として, Brocken と Inselsberg 間の計算が示されている。すなわち, 楕円体の計算のとき, Brocken の緯度は

$$51°48'1''9294$$

であり, Brocken と Inselberg の間の辺の (Brocken における) 方位角は

$$5°42'21''7699$$

であり, その辺の長さ (トワーズ表示) の対数 (小数第 7 位まで) は, 4.7353929 である．ガウスは, これらの数字を基にして上記の計算方式にあてはめて計算すれば, 次のような最終結果が得られることを示している.

Inselsbergの緯度　　$50°51'8''9444$

Inselsbergから Brocken へ向かう辺の方位角　　$185°35'21''1815$

Inselsbergと Brocken の間の経度差　　$0°8'58''7002$

7　測地学に関するガウスのその他の論稿

ガウスは測地学に関する多くの論文・草稿・メモ類・書簡等を残しており, それらはガウス全集の第 4 巻の一部と第 9 巻の全部にわたって収録されている．学術的な論文として生前に発表されたのは, 上記の 2 論文の他に 2 〜 3 を数えるにとどまるが, その中で有名なのは 1828 年に雑誌 Vandenhoeck & Ruprecht に掲載された「ラムスデン式天頂儀での観測によるゲッチンゲン及びアルトナの天文台間の緯度差の決定」(Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona durch Beobachtungen am Ramsdenschen Zenithsector)という論文である (全集第9巻5-58頁).

この論文でガウスは, 天文観測の結果に基づいて, 緯度の精確な算定を行った. その際ガウスは, 地球の形状として, フィンランドの天文学者 Henrik Johan Walbeck(1793年 - 1822年) が世界各地の測量結果に基づいて1819年に算出した,

扁平率　302.78分の1

子午線全長の360分の1　57009.758トワーズ

を使用した (同論文の第20節). 但し, この論文の最終部分の印刷に間に合ったとして, ガウスは, 彼自身の方式に基づき私講師の Eduard J. C. Schmidt に計算させた結果を同論文の追補として掲載している. それによれば,

扁平率　298.39分の1

子午線全長の360分の1　57010.35トワーズ

となっている. この扁平率は現在国際的に採用されているGRS80の「298.257222101分の1」に極めて近い.

8　測量器械についてのガウスの貢献

ガウスは測量の実施やその結果の数理的処理のみならず, 測量器械にも関心を示した。特に, ガウスによるヘリオトロープ (回光器, 回照器) の発明は有名である. ヘリオトロープとは測量の目標点において太陽光を観測点に向けて反射させる装置である. 三角測量の目標とした教会堂のガラスに日光が反射していることにヒントを得てガウスが1820年頃に考案したとされる. ヘリオトロープの反射光は40km程度までは容易に届き、気象条件がよければ60～70kmまで到達するが, 太陽光を利用するので昼間の晴れたときしか使用できない。なお, 19世紀後半の米国カリフォルニア州では山頂から300km先まで届いたという記録がある.

9　結語

1．ガウスはシューマッハの依頼を受けて1821年から1825年にかけてハノーヴァー公国の測量作業に従事するが, その背後には, 1803年から1805年にかけてツァッハらとともに実際の測量作業に従事した体験があった.

2．ガウスがシューマッハのために与えた懸賞問題 (本研究所報30号308頁参照) は1827年の有名な「曲面に関する一般的研究」の出発点になった問題であるが, ガウスは測量と地図製作からこの問題を意識するようになったと思われる.

3．測地学においてもガウスの厳密かつ実証的な思考方法は遺憾なく発揮され, 地球の扁平率の算出, ジオイド (平均海面に近い重力の等ポテンシャル面) の観念, 地球の内部構造と重力が測量に及ぼす影響等について今日でも遜色のない考察を行っている.

4．測地学にとってガウスは近代的かつ厳密な測地学の創始者として重要な地位を占めるが，数学者ガウスにとっても測地学は彼の有名な曲面論の端緒を与えるなど重要な意義を有している．

参考文献

【1】ガウス全集：Carl Friedrich Gauss, *Werke*, Bde 1-12, 1863-1929.
【2】A. Galle, *Über die geodätischen Arbeiten von Gauss*, *Werke*, Bd. XI-2, Abhandlung 1, 1924.
【3】Gauss, *Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodaesie*, *Werke*, Erste Abhandlung, Bd. IV, 259-303, 1843, Zweite Abhandlung, Bd. IV, 301-340,1846.
【4】Wolfgang Torge, *Geschichte der Geodäsie in Deutschland*, 2007.

参考ウェブサイトについて

近年，ガウスの著書，論文，書簡集の多くがウェブサイトで参照あるいはダウンロードできるようになってきた．それらのサイトのURLは，ドイツ語版Wikipediaの「Carl Friedrich Gauss」の項目

http://de.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

で参照できる．