「ルネサンス遠近法は、数学史に必要か？」

中央大学文学部兼任講師　三富照久　teruhisa31@yahoo.co.jp

概要）イタリア・ルネサンスにおける遠近法（線的遠近法）は、射影幾何学の形成における現実的な起源としてデザルグやパスカルらに、本質的な影響を与えたとされる。　例えば１次元複素平面のコンパクト化としてのリーマン球面は、球面の１点として「無限遠点」が現実化・視覚化されているが、空間に「無限遠点」を加えるという発想はまさに１７世紀のデザルグに端を発している。　デザルグ自身も「遠近法」の本を書いているが、遠近法における平行線の交点としての「消失点」が、絵画における遠近法からその幾何学構造を研究する過程で「無限遠点」に変わっていったと思われる。　つまり結果的には、遠近法がなければ射影幾何学も生まれなかった可能も考えられるのである。　この論説では、遠近法とデザルグの発想の関係を数学的に考察し、数学史におけるルネサンス遠近法の必然性について考究する。

§1　遠近法の誕生

いわゆる絵画における遠近法の誕生は、アルベルティにおける「絵画論」（１４３５年ラテン語出版、１９３６年にトスカーナ語に翻訳）からであるとされる。注１）　レオン・バッティスタ・アルベルティは、フィレンツェの名門銀行家に生まれ、パドヴァとボローニャの大学で高等教育（ラテン語）を受け、その後ローマ教皇庁のエリートとして、ローマの都市計画にも関与して有名な「建築論」も著している当時の有名な人文学者であり、「万能人」であった。注２）　「絵画論」の目的は、「絵画」を大学における自由学芸（整数論・幾何学・音楽・天文学・文法学・論理学・修辞学など）と同等な「学問」の地位に高めることであって、エウクレイデスの「原論」における幾何学を援用した遠近法は、それを実現するための方法でもあった。　しかし、あくまでアルベルティの「絵画論」はイタリア・ルネサンスにおける人文学の書の体裁をとっているため、説明の為のくわしい図などは一切なく、細部においてはやや不明確な表現となっている。　遠近法のくわしい技法は、ピエロ・デラ・フランチェスカの「絵画の遠近法技法」（１４７０年頃）や、その後のアルブレヒト・デューラーによる「定規とコンパスによる測定術教則」（１５２５年）などによって工房における画家・職人たちにもわかるように、図式を含むテキストとして広まっていった。注３）　ピエロ・デラ・フランチェスカは数学者としても有名で、「算術論」や「５つの正多面体論」などの著作もあり、「数学大全」や「神聖比例論」を著したルカ・パチョリは、このピエロ・デラ・フランチェスカの弟子にあたる。注４）

アルベルティの絵画の定義は明確であって、それは射影幾何学における背景写像を思わせるものである。それを比較してみよう。

（定義Ａ）絵画とは、眼を頂点とし対象（３次元）を底辺とする視線錐体の画面（２次元）による断面である。注５）　図１を参照。

ここで、眼を頂点とする視覚錐体の概念の歴史は古く、エウクレイデスの「オプティカ」（「光学」ではなく「視学」）にまでさかのぼる。注６）　１２世紀ルネサンス以降、エウクレイデスの「オプティカ」はギリシア語またはアラビア語からラテン語に翻訳されてきた。注７）

次に背景写像は射影幾何学における基本的な概念であって、背景写像の合成が射影変換と言われる。

（定義Ｈ）３次元空間における異なる２つの平面上の図形が、平面外の点Ｏからの射影で対応しているとき２つの図形は、背景対応していると言い、この写像を背景写像と言う。図２を参照。

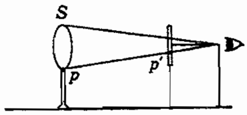


図１、砂田利一「現代幾何学への道」
岩波、２０１０年

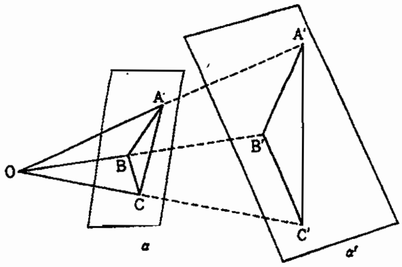


図２、小松醇郎「いろいろな幾何学」
岩波新書、１９７７年

絵画の場合は、眼の位置（視点）を固定して遠近法を適用するわけであるが、対象（３次元）を見る視点というのは実際には無限にあるわけで、それらの関係を数学的に分析してゆけば、射影幾何学的な発想が生まれるのは自然であると思われる。　しかしながら当時の幾何学としてはエウクレイデスの「原論」が主なものであり、射影幾何学的な発想を他人に説得できる形に「証明」しようとすれば、まだエウクレイデスの技法しかなく、直感的なわかっていてもそれを、証明をともなう数学の形にするには、まだまだ数学技法が成熟していなかったと思われる。

注１）山本義隆「１６世紀文化革命１」みすず、２００７、とくに　第１章「芸術家にはじまる」。
注２）「万能人」としてはレオナルド・ダ・ヴィンチも有名であるが、レオナルドはアルベルティのように高等教育を受けているわけではなく、基本的に工房における有能な職人であるが、アルベルティの理想とした学問と同等の絵画を、実際に実現してみせた画家（芸術家としての）と言えよう。
注３）１５世紀後半からいわゆる活版印刷による精密な図像表現、印刷数の増大が始まる。
注４）ルカ・パチョリはアルベルティの援助もあり中世大学で始めて数学専門の教授として教えた。
注５）これは著者による意味的な意訳である。
注６）「エウクレイデス全集、第４巻」、岩波、２０１０年の高橋憲一氏による「オプティカ」の解説。この本には、「デドメナ（解析論）」「オプティカ（視学）」「カトプトリカ（反射視学）」の翻訳、解説が収められている。「デドメナ」の翻訳・解説は、斎藤憲氏による。
注７）伊東俊太郎氏の「１２世紀ルネサンス」、講談社学術文庫、２００６年や、「近代科学の源流」、中公文庫、２００７年、など。

§2　エウクレイデスの影響

エウクレイデスの「原論」や「オプティカ」なしには、遠近法の理論的構成は可能ではなかったと思われる。　アルベルティ「絵画論」では、点、直線、面、円、などについて「原論」に対応した説明が、与えられている。　例えば、「点とは記号であって、それ以上分割出来ないものである。」、「線とは点の、互いに繋がって整列したものである。」、「直線は或る一点から他の一点に真っ直ぐに引かれたものである。」、「面とは、ある立体の或る外側の部分である。」、「円（円周）とは一つの曲線からなり、中心からの長さは相等しい。」・・・など。注８）
また、「眼の中の角度が鋭くなるにつれて、見られる量は小さく見える。」とも述べているが、これは「オプティカ」の第４の要請（公準）に他ならない。　「オプティカ」は、眼からどのように外界が見えるか？をテーマとして、眼から直線的に視射線が延びて、視覚のピラミッド（角錐）が出来ることを前提（要請）としており、その意味ではまだ「光学」ではなく「視学」と呼ぶ方がふさわしい。その理論は、「原論」の幾何学を用いて証明されており、古代ギリシアにおける証明をともなう「数理科学」の誕生とさえ言える。　後世において、「視学」から「光学」への変化は、視射線の始点が眼から他の光源に移ることを可能にする議論の形成による所が大きい。注９）
　また画家にとっての幾何学の必要性について「画家はすべての自由学芸に通じていることが望ましいが、なにはさておき幾何学を知ることが求められる。」と述べている。　この理念は、レオナルド・ダ・ヴィ

ンチの遺稿「絵画論」の中でも「どんな研究においても、諸種の数学的な証明を経由しない研究は、真の学問とは呼び得ない。」と、強調されて述べられている。注１０）　１４世紀までに、いくつかの「原論」のラテン語訳の写本があったそうであるから、アルベルティは「原論」をある程度理解した上で、数学的技法としての遠近法の理論を構成したと思われる。

注８）「アルベルティ絵画論」三輪福松、中央公論美術出版、１９６７年
注９）高橋憲一氏は、「オプティカ」の解説において、「光学」の誕生を１６世紀のフランチェスコ・マウロリコの「透明体および光線の屈折について」であるとしている。
注１０）裾分一弘「レオナルド・ダ・ヴィンチの「絵画論」攷」、中央公論美術出版、１９７７年

§3　遠近法の構成

アルベルティ～フランチェスカらの遠近法の数学構造をさぐり、デザルグとの関係を比較考究する。
まずアルベルティは、画面の中の地平線上の真ん中に「中心点」を設定した。（後に「消失点」と言われる）　そして、地上における平行線は、画面の中ではこの「中心点」で交わるとした。図３参照。
人間の視覚にとっては、遠くのものが小さく見えるという方が自然であって、エウクレイデス「原論」における図形の形象は、イデア的に理想化されている、とも見られる。注１１）
問題は、絵画の対象と画面上の対象の数学的関係であって、ここにルネサンス人の好んだ数学比例関係が、現れてくるのである。　そもそも、未だデカルトなどの代数解析の生まれていない時代であって、数学とはエウクレイデスのような、幾何学的「比例関係」の学問であるということである。　建築や絵画のなかに、そのような比例関係を見出すことが、「調和のある美しさ」の表現であると考えられていたのである。
さて、では「遠近法」の比例関係はどうなっているかと言うと、図４のようになっている。　この関係をレオナルド・ダ・ヴィンチは、２つのピラミッドという言い方をしている。

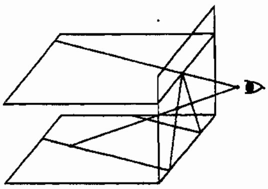


図３　砂田、前出

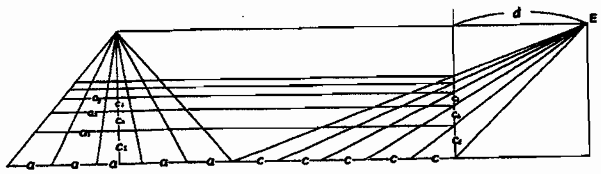


図４　辻茂「遠近法の発見」現代企画室、１９９６年

図４で、C_1、C_2、C_3、・・・の長さの数列が、等比数列（幾何比例）になっていれば、ルネサンス人は狂喜したであろうが、実際にはそうはなっていない。注１２）　この事実はアルベルティもフランチェスカ、も発見している。　しかしながら、C_1、C_2，C_3，・・における、射影幾何学で基本的な概念である「複比（比調和比）」を考えると、それらは背景写像において不変であることを証明したのが、まさにデザルグの論文「円錐曲線の概要について」１６３９年、であった。注１３）
しかし、この事は「絵画」の制作とは直接関係なく、対象と絵画の関係は、フランチェスカやデューラーらによって、遠近法の精密な数学的適用方法として確立していった。
「絵画」が、数学的比例関係により理論化される「遠近法」」よって、単なる職人技術ではなく「真の学問」（vera scientia）になった、ということを、フランチェスカもダ・ヴィンチも明言している。　これこそが、アルベルティの意図するところであった。

注１１）数学者の砂田利一氏も、「ユークリッドの幾何学は人間の存在から離れた「客観」としての空間を主題とし、射影幾何学は空間を見る人間の立場に立って、それを「主観的」に把握することから出発する。」と述べている。　前出「現代幾何学への道」より。
注１２）　$X_n = C_n / C_{n+1}$とおくと、漸化式　$X_{n+1} = (3X_n - 1) / (X_n + 1)$　をみたす。

前出、砂田「現代幾何学への道」より。

注１３）原題は「円錐と平面の交わりについての理論の草案」、この完全な英訳および数学的解説は、
「The geometrical work of Girard Desargues」J.V.Field, J.J.Gray, Springer-Verlag,1987
にある。

§4 デザルグの発想

遠近法による絵画の画面では、平行線は地平線上で交わることになる。　では中心点（消失点）は、無限遠点と見なせるであろうか？　絵画の場合は、それは自明ではない。　なぜなら中心点は、画面におけるイエス・キリストの顔にあったり、教会の祭壇にあったりするからである。　「絵画論」を書いたアルベルティ自身も、「絵画」と「数学」の違いを強調して次のように述べている。

「私は数学者としてではなく、画家としてこれらのことを書いていることを承知していただきたい。
数学者は、彼らの理解力だけで、あらゆる事物から切り離して物の形体を測る。われわれは、対象が眼に見える通りに配置されてあるのを望むので、世にいう通り、もっと人間臭いミネルヴァ（感覚的叡智）をもちいよう。・・・・」

ルネサンス人が好んだ数学的比例関係は、１６世紀から１７世紀にかけて、ミケランジェロ、ベルニーニ、など、建築や人体を含む彫刻にも適用されて、拡大してゆく。　デザルグ自身も「遠近法」の本を書いているが、「絵画の遠近法」から、その数学理論をとりだして再構築したのが、デザルグと言えよう。

デザルグの発想は、まず遠近法の画面上で起こっていることを、数学的に認めることである。

（発想Ｄ１）　すべての直線の平行線は、（両端を限りなく延ばすと）無限遠点で交わる。

（発想Ｄ２）　どの直線も、（両端を限りなく延ばすと）無限遠点で交わり「円」と見なせる。

この「仮定」から出発すると、円錐曲線（楕円・放物線・双曲線）は、すべて「円」と射影的に同じ曲線と見なすことができる。　（発想Ｄ１）（発想Ｄ２）の無限遠点の集まり（遠近法の画面での地平線に対応）を直線とみなすと、上の「円」が、無限遠直線と交わらないと「楕円」となり、無限遠直線と交わるとき「方物線」となり、無限遠直線を２点で横切るとき「双曲線」となる。図５参照。

パスカルも「円錐曲線論試論」１６４０年、において、デザルグ氏の「円錐曲線の概要について」のアイデアにもとずいて、「アポロニウスなどの円錐曲線の定理をすべて導く」という雄大な構想を、１６歳のときに発表しているが、それの厳密な理解・証明となると、当時のエウクレイデスの幾何学だけでは相当に難しい、というのが率直な感想である。（実際にパスカルは証明をともなった著作を発表していない。）

射影幾何学の実際の構築は、１９世紀に忘れられていたデザルグの本を発見し研究したポンスレによってなされ、「図形の射影的性質の研究」、１８２２年、として出版された。（この頃になると、解析幾何学、微分積分学など色々な数学上の道具が、すでに開発されていた。）

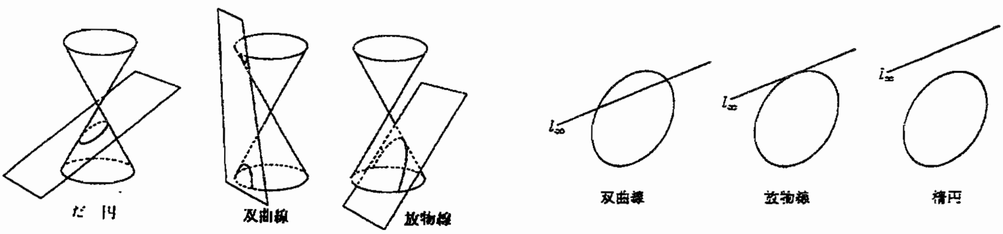
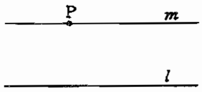


図５　津田文夫「射影幾何」共立、１９８１、及び、前出、小松「いろいろな幾何学」より

§5　デザルグの発想とエウクレイデスの幾何学

デザルグの発想における、「直線を（無限遠点まで）限りなく延ばす」という数学的概念は、実はエウクレイデスには、積極的にはないものである。　エウクレイデス「原論」における対象は、多角形、円、角錐、円柱、など有限な図形であって、「直線」はそれらの図形の「辺」をなすものでしかないからである。　したがって必要なら長くとるが、「無限に延ばす」必要性がないのである。　有名な平行線公準も、よく知られているのは、プレイフェルの形であって、もともとの「原論」の公準（要請）は、三角形の一つの成立条件として書かれている。図６、図７参照。

（平行線の公理）　直線 l 外の一点 P を通り，l に平行な直線はただ一本ある



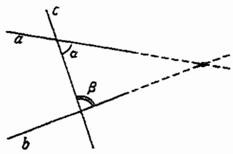


図６　プレイフェルの公準
佐々木元太郎「ユークリッド幾何」
培風館、１９７９年

図７　エウクレイデスの公準
同左、なお「エウクレイデス全集第１巻」
岩波、２００８年、も参照。

遠近法を適用した絵画の画面は、数学的にはエウクレウデス的な有限な図形の集まりでしかない。だからエウクレイデスの幾何学が適用できるのである。　しかし消失点（中心点）を、現実の「無限遠点」の対応した点と考えることによって、デザルグの幾何学が構築可能になるのである。　この「ルネサンス遠近法」における平行線の交点としての消失点を、「無限遠点の実現」と見ることこそ、デザルグの発想を可能にした原点であると、私には思えるのである。　では、いかにしてそれが可能になったのか？　代数解析の基礎付けをしたデカルトは、「幾何学」で無限遠点を考えることはなかったが、「物質の本性はその（３次元的な）延長である」として、「私の自然学は、幾何学」であると主張し、いくらでも大きいものが考えられるという数学的意味で「宇宙は無際限である。」であると述べている。　すでにケプラー～ガリレオらによって、アリストテレス的な地球を中心とする「閉じた宇宙」の観念は、すでに崩壊しつつあった時代である。（ケプラーも「無限遠点」を考えたと言われている）　一方で、ルネサンス遠近法の制作技術は、より精密になっていき、ドイツ（神聖ローマ帝国）に遠近法を広めたデューラーなどによって、技術における数学的表現をともなった「測定」ということが、非常に重要な概念になりつつあった。　デカルトは、自分の「自然学」の正当化に、「我思う、我在り」を第１原理とする新しい「形而上学」を構築しなければならなかった。　それは、アリストテレスの「自然学」がやはりアリストテレスの「形而上学」によって基礎づけられているからである。（「形而上学」の原義は、メタ・フィジカ、つまりフィジカ（自然学）の原理を考察する学問なのである、現代的にいえば「科学基礎論」ということになる。この点で「形而上学」という訳語は、その意味を正確に伝えていない、と思われる。　また基本的にアリストテレスは、「自然学」に数学が適用出来ない、と考えている）　デザルグは、そのような形而上学の変革を考えるような重荷からは、自由であったようである。　デザルグは次のように述べている。

「正直に言うと私は物理学や幾何学を研究する趣味は持ち合わせていない。　ただそれらが生活の改善や便宜に、健康の維持に、ある種の芸術の完成などと、直接にある種の知識に達する手段として役立つなら別である。・・・芸術のかなりの部分は幾何学に基礎をおいている。・・・」

ここではデザルグは、学者というより「測定」を重んじる「技術者」の伝統に従っているように見える。

注１４）　　アルベルティより始まった絵画の遠近法は、「絵画」を「学問」の位置に高めたが、それは下村寅太郎氏や山本義隆氏が指摘するように、高い学問性を持った「高級職人」の登場を可能にした。

「形而上学」などは、デカルトのように裕福な家系に生まれて、ラテン語による高等教育（大学）を受け

なければ学ぶことは出来ないが、「測定」による建築・絵画・地図・兵器などの開発は、工房などを経て独力でも研究できる環境が、形成されて来たからである。(その原因としては、高級職人によって非ラテン語で書かれた、精密な図像表現を含むテキスト類の、印刷・普及ということが挙げられる。) 注15)
デザルグは、そのような独力で数学を研究した「高級職人」であるとも言える。(ピエロ・デラ・フランチェスカも独力で数学を研究したところは似ている) そして新しい発想はデカルト同様、古い幾何学の「学問性」にこだわらない、「自由性」によって獲得されたと言えよう。

注14) モーリス・クライン「数学文化史」中山茂、訳、1956年
注15) 前出、山本義隆「16世紀文化革命1」みすず、2007年
下村寅太郎「ルネサンス研究」みすず、1989年

§6 数学史における「ルネサンス遠近法」

以上の考察で見たように、デザルグの発想は「ルネサンス遠近法」の数学的構造を分析・研究することによって生まれたことは、明白であるとしてよい、と思う。 つまり射影幾何学は、「ルネサンス遠近法」を直接的な起源としているのである。 では、数学史において、「ルネサンス遠近法」を語ることは、必要であろうか? 何のために?
数学史の本によっては、「遠近法」に触れてある場合もあるし、そうでない場合もある。
「数学史」モノグラフ、科学振興新社、1967年、は学生・教師でも気軽に読める小冊子であるが、遠近法、射影幾何学についての要を得た簡単な記述がある。その理由としては、著者が有名な幾何学者である矢野健太郎氏だからであろうか。 ヴィクター・カッツの「数学の歴史」は、非常な大著であるがデザルグの研究内容についての、わかりやすい数学的解説がある。 カッツは、非常に多くの数学史の文献を、歴史学的には中立の立場から、(つまり良心的な教養ある数学者として) 公平に記述している。 カッツの狙いは、あくまで現代数学を含めた数学一般にたいする、興味を持たせ理解を深め考えさせる、良き数学入門としての数学教育にある、と思う。(それは、歴史学である「科学史」としての数学史とは異なる)
それだけで良いだろうか?
逆に、現代的な射影幾何学の学習にとっては、公理的な出発点から学習する方が、理論の習得、新しい定理の製造には適している。 数学科の射影幾何の授業においては、「ルネサンス遠近法」に言及する義務は求められていない。 では、もともと数学史は必要ないのであろうか? あるいはカッツのように、それは数学入門としての、数学教育にとってのみ意義があるのであろうか?
たとえばEuclid空間という言葉があるが、現代的な理解では、(内積の入った) 3次元の直交座標空間である。(例えば、岩波「数学辞典」より) しかしエウクレイデス「原論」の世界では、前に指摘した様に、対象は有限な図形であって、しかも17世紀代数解析から始まった、座標は全く考えられていないのである。注16) 数学史を歴史学とした場合、上の事はおかしいのであるが、あまり問題として取り上げられることは少ない。 その理由としては、現代において「数学」と「数学史」は一応別の学問 (個別科学として) であって、いわば「Euclid空間」は、単に「数学」の一つの用語として使われているに過ぎない、という前提があるからである。 とくに日本においては、19世紀後半に「科学」を最初から「分科の学」として輸入してきた、という伝統がある。 村上陽一郎氏は、日本においては、科学はsciences であって science ではなかった、と皮肉っている。注17) 下村寅太郎氏は、精神史的考察としての「無限論の形成と構造」1979年、において、「一般的にギリシア数学においては、無限概念はきわめて自覚的に回避されている。・・端的に言って、空間そのものが問題とされていない。」と述べ、ルネサンス遠近法の意義について、「遠近法において初めて個々の物を超え、これを統一している普遍的包括的な空間が形成せられた。」と、主張している。 カントールから始まる集合を基礎構造とした、現代数学の巨大な構築の流れも、下村寅太郎氏の言うような「精神史」の一断面でしかないのかもしれない。 そのように、数学を「人間精神」の発現と考えたとき、初めてルネサンス遠近法が数学史に必要であることが、真に実感されるのではないか、と私には思えるのである。

注16) 三富照久「エウクレイデス「原論」は、Euclid幾何学か?」数学教育学会、2009年
注17) 村上陽一郎「日本近代科学の歩み」三省堂、1977年