デデキントの学位論文*

赤堀庸子†

1 序

デデキント（Julius Wilhelm Richard Dedekind,1831-1916 ）の学位論文『オイラー積分について』(1852) [1] は率直にいってあまり有名なものとは言い難い。実際、二次文献の著者たちも学位論文は彼の才能がまだ発現されたものではないという判断を下している。それに加えてデデキント自身が学位論文執筆当時の自分はまだ未熟であった旨の発言をしている。

こうした評価は確かに一理ある。しかし、デデキントの数学思想の形成過程、あるいは１９世紀ドイツの数学思想について、何か情報を引き出すために読むならば、この論文を一瞥してみることもまったく無駄ではないだろう。当時の背景を深く知るためには、こうした「非主要文献」の扱いも時には必要であると思われる。

2 準備

まずはじめに論文の体裁をみておこう。テーマはあるオイラー積分の計算である。具体的には、

$$B(b,1-b)=\frac{\pi}{\sin b\pi}$$

（ $B(b,1-b)=\Gamma(b)\Gamma(1-b)$ より上記の式はガンマ関数の相補公式となる。）を何通りもの仕方で証明するというものである。全部で２６ページにわたるこの論文には章はなく、１２節構成である。各節には見出しもなく、また定理や補題の明示もされておらず、全体の流れ（序、問題提起、先人の結果、自らの結果）がかなり読みとりにくい印象である。また注もなく、文献指示もされていない。

ランダウ (Edmund Landau,1877-1938) はデデキントの伝記において、この論文を「自立性を十分に備えた業績ではあるが、後の偉大な学識が現れたものではない」と評した。([4],S.52.) デデキントの研究家デュガックも、この論文をざっと検討した上で、ランダウの評価を受け入れている。([2],pp,16–19.) また、もっと最近になって出たフェレイロスの研究でも、学位論文は occasional work であり、後の彼の才能が発現したものではない、と述べられている。([3],p,82.) これらの評価も無理からぬことである。デデキント自身の証言によれば、当時のゲッティンゲン大学の講義は中等教育の教員になるには十分な水準ではあったが、より進んだ内容の講義はなく、教授資格講演までの２年間、必死に勉強したとのことである。([5],S.81–83.) また、教授資格講演の後、ディリクレ（Gustav Peter Lejeune Dirichlet,1805-1859）との公私にわたる親交によって、「全く別人になった」と語っていることからも、学位論文を提出した後、本質的な進歩を遂げたことがわかる。

*津田塾大学数学史シンポジウム．2010.10.10.
†erkym@mui.biglobe.ne.jp

しかし、こうした時期の著作をみることは、当時の背景を知るためにはかえって好都合であろう。また、ガウス（Carl Friedrich Gauss,1777-1855）がこの論文を好意的に評価しているという事実もある。少々この論文のところで立ち止まるのも無駄ではないだろう。

3 瞥見

以下では本文を三つの部分に分け、内容１（導入），２（先人の結果），３（自らの結果）といった見出しをつけたが、これはすべて筆者（赤堀）自身の判断によるものである。

3.1 内容１（導入）

3.1.1 序

解析における間接的演算（逆演算）の導入が数学の発展に寄与する、ということが述べられる。まず、数の場合、減法、除法、累乗計算などの逆演算が数の概念の拡大に寄与することが述べられる。それと同様な事情が高等解析にもある、とデデキントは言う。微分演算は関数の理論を発展させたが、関数の概念が拡大することはない。積分によって、初等関数では表されないような関数が得られ、それらこそが関数概念の拡大に寄与するのである。こうした積分研究の一環として、オイラー積分をテーマとする旨が述べられる。

3.1.2 導入（１～３節）

１～２節においては、まず第１種オイラー積分（ベータ関数）、第２種オイラー積分（ガンマ関数）の導入がなされる。

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

$$\Gamma(\mu)=\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx$$

そしてよく知られている諸公式が紹介される。

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

（そのほかガンマ関数に関する公式など。）

次に $B(a,b)$ に関する漸化式が述べられ、 $0<r<1,$(r は分数) のとき、 $B(r,1-r)$ の計算をすることが重要であると問題提起される。

３節では、後の部分の準備として、いくつかの関係式が紹介される。まず、適当な変数変換により

$$B=B(b,1-b)=\int_0^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^b\frac{dx}{x}=\int_0^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1-b}\frac{dx}{x}=\int_0^\infty\frac{x^{b-1}}{x+1}dx=\int_0^\infty\frac{x^{-b}}{x+1}dx$$

であることが述べられる。次に、

$$\varphi(b)=\int_0^\infty\frac{1-x^\mu}{1-x^\nu}x^{b-1}dx$$

が定義され、この関数の性質（最小値など）が述べられる。特に、$\mu=1,\nu=2$ のとき $B=\varphi(b)$ となり、これは $b=\frac{1}{2}$ のときに最小値 π をとることが示される。このあたりの結果は、9節以降の記述で使われる。

3.1.3 第１証明（４節）

まず若干の変数変換が行われる。

$$B==\int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{x+1}dx=n\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{x^n+1}dx$$

この結果を部分分数分解して計算している。部分分数分解は複素数にわたるうえ、無限積分の議論もなされているが、複素積分についてこの時点でなにか特別な説明が行われている、ということはない。(対数関数の多価性についての言及がないのも違和感がある。）とりあえず、本節の最後において、証明されるべき結果

$$B=\frac{\pi}{\sin b\pi}$$

が初めて述べられる。

3.2 内容２（先人の結果）

3.2.1 第２証明（５節）

本節では

$$B=\int_0^\infty \frac{x^{b-1}+x^{-b}}{x+1}dx$$

の積分が計算される。(上記が成り立つことについては３節で証明済み。）$\dfrac{1}{x+1}$ の無限級数展開、項別積分を経ることで、b の級数がえられる. これを $\dfrac{1}{\sin u}$ の級数展開と比較することにより、$B=\dfrac{\pi}{\sin b\pi}$ がえられる。これはシュレーミルヒ (Oskar Schlömilch,1823-1901) の証明であることが記されているが、具体的な文献名（書名）は挙がっていない。おそらく変数は実数の範囲なのであろうが、はっきりした記述がない。

3.2.2 第３証明（６～８節）

次の証明はコーシー（Augustin-Louis Cauchy,1789-1857）によるもので、複素積分を応用したものである。

まず６～７節において、複素積分の基礎が語られ、コーシーの積分公式に相当するものが導かれる。７節の結果により、８節では

$$f(z)=\frac{(-zi)^{\mu-1}}{z^2+1}(0<\mu<2), F(z)=(z-i)f(z)$$

としたとき、

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{(-xi)^{\mu-1}}{x^2+1}dx=2\pi iF(i)$$

であることが示される。ここから

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2\sin(\mu\pi/2)}$$

が導かれ、これは ($\mu = 2b$ とすると)

$$\int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{x+1}dx = \frac{\pi}{\sin b\pi}$$

と一致する。

その後若干の厳密性に関する補充がある。

ここでの説明はコーシーの論文にそったものと思われるが、記述が古いことに驚かされる。(たとえば、線積分は座標軸に平行なものしか考えられていない。そして、コーシーの積分定理にあたるものは、「積分の順序交換可能性」と表現されているのである。このような状況とその意義に関しては、たとえば [6] を参照。) 当時リーマン (Georg Friedrich Bernhard Riemann,1826-1866) の学位論文がすでに出ているはずであるが、それが読まれているような状況でもないようである。

3.2.3 第4証明（9節冒頭）

ガウスの超幾何級数を用いた証明について言及される。ここでは論文のタイトルがあげられるのみで、全容を述べることは不可能である、とされている。(式による具体的な説明はなく、該当する節番号等が指示されていることもない。) ここでガウスの論文 ([7]) にそって証明の要点をみておこう。

まず $\sin nt$ は超幾何級数によって表現できる。

$$\sin nt = \sin F(n/2+1/2, -n/2+1/2, 3/2, (\sin t)^2)$$

これを超幾何級数とガンマ関数との関係式

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1) = \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}$$

によって変形することで、$\sin z\pi$ ($t = \pi/2, n = 2z$ とおく) とガンマ関数との間の関係式

$$\Pi(-z)\Pi(z-1) = \frac{\pi}{\sin z\pi}$$

を求めることができる。($\Pi(z) = \Gamma(z+1)$) (なお、途中で $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ が使われている。)

ガウスの論文にはオイラー積分の完全な理論が含まれているとデデキントは述べている。おそらくはガウスの論文の偉大さ故に、気軽に要約をすることを控えたのであろうか。

3.3 内容３（自らの結果）

3.3.1 第５証明（９～１１節）

ここでデデキント自身のオリジナルな証明が述べられる。微分方程式を利用するものである。まず、B の２乗（二重積分）が計算され、そこから関係式（微分方程式）

$$B\int BBdb = \frac{dB}{db}$$

さらに

$$BB = \frac{1}{B}\frac{ddB}{db^2} - \frac{1}{BB}\left(\frac{dB}{db}\right)^2$$

が導かれる。ここからはもっぱら初等的な計算によって、(第３節の結果、すなわち $B(b)$ ($0 < b < 1$) の最小値は $B(1/2) = \pi$ であることも使いながら) B の値が求められていく。

ちなみに、９～１０節の結果を整理、改良したものが、クレレ誌に投稿されている。([8])

全体として微分、積分の計算を駆使して解を求めたという印象で、微分方程式の新しい方法を開拓したというわけではない。

１１節では結論が再記されている。

3.3.2 補足（１２節）

補足としていくつかの積分の結果が述べられる。一番最後で

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^n}{(x-1)(x+c)}dx$$

の結果が述べられる。この積分について、ミンディング (Ernst Ferd Minding,1806-1885) 編集の「積分表集成」には誤りがみられるとデデキントは述べている。

3.4 評価

数学史家の評価と異なり、ガウスはこの論文を高く評価し、著者はこの分野をよく知っているばかりでなく、将来業績をあげるに足る自立性を有していると述べた。ガウスがこうした好意的な評価をすることは珍しい。数学史家デュガックは、この点について、デデキントがすでにガウス（やウェーバー (Wilhelm Eduard Weber,1804-1891)）によい印象をもたれていたからではないかと指摘している。

そもそもデデキントは 1850 年にゲッティンゲンに入学しているので、本論文は入学後２年で書かれたレポートのようなものとも考えられる。そうした点を考慮すれば、「ほかの学生と比べればよく勉強している」という水準であったのだと考えられるだろう。

とはいえ、現代の我々からは、この論文はとりわけ形式的に物足りない点があるように思われる。全体の流れも分かりにくいし、先人の研究の言及の仕方も読みとりにくい。オリジナルな貢献の部分も、新しい方法を開拓するというほどではないようである。(こちらの理解が足りないだけかもしれないが。) また、複素関数論の当時の理解の古さにも驚かされた。リーマンの関数論における仕事がすぐかたわらに控えていたにも関わらず、大学における一般的な複素関数論の理解はこうした状況だったということなのであろうか。当時の数学界で普通に知られていたことはどのようなものであったか、もっと知ることが必要であろう。[1]

4 その後の展開

２年後の教授資格講演 ([9]) では、数式を使った高度な議論は後退し、序にあたる部分を豊かにしたものが披露される。特に間接的演算による数概念の拡大に関して丁寧な説明がなされる。(こ

[1] １９世紀当時、ドイツの大学等で著名であった教育者（やその数学思想）は、現在ではあまり知られていないことが多い。本論文の第５節に出てきたシュレーミルヒなども当時は教科書の著者として有名であった。

の講演は後年の「数とは何か」でも引用されているものである。）関数論の分野について特記することといえば、私講師時代にリーマンのアーベル関数の講義に参加したことがあげられる。デデキントの関数論の仕事自体は、楕円関数論、代数関数論と限られたものであるが、その取り組みは彼の数学思想全体に深い関連があるとみられている。たとえばイデアルの着想において、リーマンの関数論が影響を与えていることは数学史家の指摘しているところである。

この学位論文は確かに高い水準のものではないかもしれないが、後の時代へのごくごく小さな芽をいくつか見い出せるものである、といってよいだろう。

参考文献

[1] R.Dedekind,“Über die Elemente der Thorie der Eulerschen Integrale”, Gesammelte mathematische Werke I,S.1–26.

[2] Pierre Dugac, “Richard Dedekind et les fondements des mathématiques”(Vrin,1976)

[3] José Ferreirós,“Labyrinth of Thought:a history of set theory and its role in modern mathematics”(Birkhäuser,1999)

[4] E.Landau,“Richard Dedekind”,Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissen schaften zu Göttingen,Geschäftliche Mitteilungen,S.50–70.

[5] W.Lorey,“Das Studium der Mathematik an den deutscen Universitaten seit Anfang des 19.Jahrhunderts ”(Leipzig-Berlin,1916)

[6] 長岡亮介,“複素関数論の誕生（発見と論証の方法としての代数的形式主義）”，現代数学の歩み３,pp.36–52.(日本評論社,1990)

[7] C.F.Gauss,“Disquisitiones generales circa seriem infinitam,Pars prior”,Werke 3, S.123–162.

[8] R.Dedekind,“Über ein Eulersches Integral”, Gesammelte mathematische Werke I,S.27–31.

[9] R.Dedekind,“Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik ”, Gesammelte mathematische Werke III,S.428–438.