フレーゲ算術について

早稲田大学理工学術院数学科
足立恒雄

初めに

19 世紀に起こった算術化運動というのは、数学を現象世界から独立させ、数学を自立した学問体系として位置付けるための運動と理解される。

複素数を実数の順序対として把握したのはハミルトンである。これによって複素数は実数に還元できたとみなせる。この方法を敷衍して、整数を自然数の順序対、また有理数を整数の順序対として把握されるようになった。これによって正負の有理数は自然数に還元されたのである。

ところで、実数をどう把握するかだが、実数は量の比であるとする（ニュートンにまで遡れる）思想は、明らかに現象世界を背景にしている上、実数が量の比なら、実数同士の積は何と解釈するのかという面倒な問題に直面する。実数の概念を量とか、直線といった直観に頼って説明する方式を数学内部における基礎付けへと転換したのは 19 世紀数学の金字塔の一つだが、それはメレーおよびカントル、デデキント、ワイアシュトラスによって実現されたのであった。

なお、彼らは有理数体から実数体を構成するという方式を打ち立てたのだが、「実数体とは連続な順序体のことである」という実数体の公理的特徴付けは高木貞治（[7]）が最初であったと思われる。

これは言うまでもないことだが、実数論が確立し、ワイアシュトラスがイプシロン・デルタ論法を導入したからといって、実数論が算術（自然数論）に完全に還元されたという評価からは程遠いということはその後の歴史を見れば明らかではあるが、19 世紀末の段階では「数学の完全なる厳密化が実現した」と 1900 年の ICM においてポアンカレが高らかに宣言し、全数学

界がそれを宣っていたのであった。

このようにして数学を自立させる運動が一通り終わり、その算術をどう基礎付けるかが最後の難題として残った。自然数を事物の個数の抽象化として位置付ける限り、(ジョン・スチュアート・ミルの主張する) 算術的真理は事物の実際の計算によって裏付けられているという経験主義に大なり小なり依存していることになる。そういうわけで、自然数をどう厳密に基礎付けるかは数学の独立性にとって最終的な局面として捉えられるのである。

本稿では、現代における自然数論 (算術) の基礎付けの元となったフレーゲ、デデキント、ペアノの業績を紹介する。これまで数学の世界では、ややもすると無視されてきたフレーゲの業績の重要性に鑑み、特にフレーゲの算術については詳しく言及することにする。

1 フレーゲ (1848-1925)

1.1 フレーゲの生涯

算術の基礎付けについてはデデキントの著作『数とは何か』([2]) があまりにも有名であり、一方フレーゲは長い間注目されずに来たのだが、算術の基礎について著作を発表した順序で言えば、フレーゲが一番最初であるためまずフレーゲについて論じよう。参考のため、関連する三人の著作の最初のものを一覧しておく。

1884	フレーゲ	『算術の基礎』
1888	デデキント	『数とは何か』
1889	ペアノ	『算術の諸原理』

フレーゲは幾何学者アッベの弟子で、アッベはリーマンの弟子だからフレーゲはリーマンの孫弟子に当たる。元来は幾何学の出身で学位も取ったが、生来の哲学的傾向に従って数学と哲学の交錯する分野へ転進した。勤務

したのはイェーナ大学だが、員外教授として生涯を過ごし、正教授となることはなかった。開講のためには聴講者が 3 名以上必要なため、記号論理学の講義に関心のあったカルナップは聴講者を探すために奔走していたという。講義内容は自らの創始になる概念記法（現代の述語論理体系）によって、一様収束性と普通の収束との違いを述べるなど、技術的な内容がほとんどで哲学的な話題に亘ることはなかったという。

フレーゲの生涯に関しては野本和幸 [18] を参考文献として挙げておく。野本氏はフレーゲ研究の日本における第一人者だが、どの本でだったか、一般受けしそうな、次のようなことを書いているので紹介しておこう：

「だれにでも愛する人がいるものである」という主張と「任意の数にはそれより大きい数が存在する」という主張とは論理的に同一の構造、すなわち

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

を持っているということを見た最初の人がゴットローブ・フレーゲである。

実際フレーゲは∃（存在記号）や∀（任意記号）が複合的に組み合わさった、いわゆる述語論理を研究し、現在ではアリストテレス以来とも評価される業績を上げた。しかし、この研究は元来は論理学を目的としたのではなく、数学における推論を徹底的に厳密化し、少数の基本的規則へ還元することを目的としていた。さらにこの還元が完全であることを確認するためには日常言語に頼るだけではだめで、推論過程を完全に記号化する必要があると考えていた。

しかしながら、彼の記号法が奇妙奇天烈と見られたことが原因とされてもいるが、数理哲学という分野はまだ夜明け以前の時代にあったため、その哲学的内容の深さが理解されることなく、数学界からも哲学界からもまったく無視されてしまったというのが実情であろう。

概念記法と呼ばれるフレーゲの記号法は平面における図式であって、現在も主流である線型的な表現とは異なっていて、慣れぬ者の目には異様に映る。しかしながら、流れ図とかツリーといった表現法が普段に使われる現代

の目で改まって見直すと、決して異様な表現ではなかったことがわかるだろう。

フレーゲを忘却のかなたに追いやるのを救ったのはバートランド・ラッセルである。ラッセルは Principles of Mathematics(1903:[8]) をほぼ書き上げた時点でペアノを通じてフレーゲを知った。自分の仕事（と等価以上の研究）がすでにフレーゲによって成されていたことを知ったのだが、一方いわゆるラッセルのパラドクスに気付き、フレーゲに質問の手紙を書くことになる。簡単に言えば、ある性質 P の外延、すなわち P を満たす対象 x の全体、がいつでも集合を成すとすれば、矛盾が生じるというのである。フレーゲは『算術の基本法則』の第 2 巻の印刷を終えたところであったが、大いに驚き、呆然自失といった態であった。あわてて修正案を書き加えた「後書き」は次のように書き出される：

> 学問的著述に従事する者にとって、一つの仕事が完成した後になって、自分の建造物の基礎の一つが揺らぐということほど、好ましくないことはほとんどないであろう。

実際には、フレーゲ自身も指摘しているように外延、あるいはクラス、あるいは集合という概念を用いてきた（たとえばデデキントやカントルなどを筆頭とする）すべての人の研究の基礎に疑惑が生じたのであるが、論証の隅々まで厳密な推論に還元することを目論んできたフレーゲにとっては痛手はとりわけ著しかったようである。たとえば、神学にのめり込んでいたカントルなどはパラドクスの発生を集合論の深遠さを示す新たなる神秘と前向きに受け止めていたらしい。しかし、フレーゲにはそうした感性はなかった。その後矛盾の回避に打ち込んだが、隣人たちにはその姿は暗鬱なものとして映っていたようである。こうしたこともあって、フレーゲには悲運の人というイメージが付きまとっている。

晩年には幾何学を数学の基礎に据える思想を抱いていたというが、幾何学は空間直観に基づく総合判断であるというフレーゲの元来の思想からすれ

ば、これは「転向」とも呼ばれるべき痛ましい逸話である。

記号論理学や集合論の公理化、そしてこれらを結合した形式化が進展していく過程において、算術の基礎付けに取り組んだ数学者として名前が引用されることはあっても、それはその失敗とともに語られるのを常とした。その一例だが、ヒルベルトはハイデルベルグ講演（1904 年にハイデルベルグで開かれた ICM における講演）において次のように述べている：

> いわゆる伝統的論理学によって、算術における諸法則の基礎付けを得ようとしたのはフレーゲである。整数という概念の基本性質や、数学的帰納法の意味を明らかにした点は彼の功績である。しかしながら、一つの概念（集合）は、（何らの制限も受けない意味での）任意の対象物について、それがその概念にあてはまるかどうかが決定されるかぎり定義され、その存在が認められるものであるとする原則を彼が行きがかり採用してしまったため、たとえばあらゆる集合の集合という概念にまつわる、例の集合論の逆理へと彼の道は通じることになる。これは伝統的論理学の考え方や研究方法が、集合論の規定するような厳密な諸条件に拮抗するだけの力がないことを示すものと思われる。（『論理学および算術の基礎付けについて』：[9]）

恐らくは、このままであれば、フレーゲはペアノ、ラッセル、ホワイトヘッドに先立って述語論理を独自に開拓していたが、算術の基礎付けに失敗した、後世に直接的な影響を及ぼすことの少なかった人物として言及されるにとどまったに違いない。それが 1955 年に『算術の基礎』が英訳されたことがきっかけとなって、フレーゲは分析哲学、論理哲学の祖であるという認識が広まり出し、直接原典に当たる研究者が続出するようになった。そして 1970 年代にはフレーゲルネッサンスと呼ばれる活況が生み出されるに至ったのである。

ラッセルは数学基礎論の歴史アンソロジー [14] を編したヘイエノールトに宛てて、フレーゲをまじめに読んだのは自分が最初であったとし、さらに

次のように書いた（野本 [18] による）：

> 彼のライフワークが完成しようとしており、彼の仕事の大部分は能力において彼に無限に劣る人々のせいで無視され続けてきて、彼の主著の第二巻がまさに出版されようとしている、その折も折に彼の根本的想定が誤っているということがわかったとき、彼は個人的な失望といういかなる感情も押さえ込んで、知的な歓びをもって応答してくれたのです。

さらに 1980 年代に入るとライト（C. wright）を始めとする人たちによってフレーゲによる算術の基礎付けが見直されるに至ったのである。以下では、フレーゲの哲学的な側面は筆者の関心事ではないので（言い方を変えれば、筆者の手に負いかねるので）言及を避け、もっぱら算術の基礎付けを現代風の記号によって紹介しようと思う（詳細は、ブーロスの論文（[16] に収録)、田端 [17] を参照されたい)。

1.2　フレーゲの主要著作

1879　『概念記法　算術の式言語を模造した純粋思考のための式言語』（BS:『フレーゲ著作集 1』：勁草書房）

命題論理と述語論理の公理的体系化がなされた。現在では「論理学の革命」と評価されるフレーゲの業績である。

1884　『算術の基礎　数概念に関する論理数学的探究』（GLA ：『フレーゲ著作集 2』：勁草書房）

概念記法を使わずに自然言語で記述されている。ここで自然数の系列の基礎理論が展開された。

1893/1903 『算術の基本法則 概念記法的に導出された』(GGA I/II :『フレーゲ著作集３』: 勁草書房)

『算術の基礎』で述べた数に関する基本法則の証明を概念記法を用いて与えている。第１巻が売れなかったため第 II 巻は自費出版となった。実数論と量の理論が論じられている。量と数を截然と区別する思想に基づいているが、同時代の数概念に関する思潮から見るとやや時代遅れの印象がある。

1.3 なぜ算術は論理に還元されるのか

人間の理性的活動は論理に基づいているという理由で、算術も論理に還元できるはずだと考えたと言えば今風、あるいは通俗的には理解が容易だが、フレーゲ自身は『算術の形式理論について』(1885:『フレーゲ著作集』[4] 第１巻) 他で概ね次のように説明している:

> 幾何学は外界の存在である空間的形象にかかわるものであるから、論理に還元できるものではなく、固有の公理を必要とする。一つの公理の反対の公理を設定しても矛盾に陥ることがないのはその証拠となるものである。しかし算術はそうではない。
>
> 算術は事物の固有の性質を扱うものではないから、事物の性質とは完全に独立であるべきであり、したがって同じことが礎石（基礎となる規則）にも当てはまらなくてはならない。そういった礎石は純粋に論理的な本性を持たなくてはならない。
>
> それゆえ、たとえば数学者が多用する「集合」(Menge) という表現は事物の集積を連想されるので避け、論理学で普通に用いられる「概念」で置き換えるのである。

幾何学は、カントの主張通りアプリオリで総合的な学問だが、算術はアプリオリという意味では同じであっても分析的な学問であるという点で異なるというのがフレーゲの考えであった。たとえばある物を示して、これは何色かと問えば、要求している答は明確に決まっているが、数はこれと違う。たとえばトランプを数枚見せて、この数は何かと問うても意味は不明である。すなわち数は事物の性質ではないのである、とフレーゲは考える。

次は『算術の基礎』のあとがきの冒頭である：

> 私は本書において、算術の法則が分析判断であり、したがってアプリオリだということを確からしくしたと主張しても良かろうと思う。かくして、算術は単に論理学の発展した姿に過ぎず、各々の算術命題は、派生的ではあるが、論理の法則であることになる。算術の物理的科学への応用とは、論理をして観察事実に向かわせることであり、計算するとは演繹することである。数の法則が外的世界に適用可能であるかどうかついて実地に検証する必要性はないだろう。なぜなら、外的世界、すなわち空間全体とその中には、概念も、概念の性質も、数もまったく存在しないからである。したがって、数の法則は、本来、外的な事物には適用が可能ではない。すなわち数の法則は自然法則ではない。とはいえ、数の法則は外的世界の事物について有効な判断には適用可能である。つまりそれは自然法則の法則である。数の法則が主張するのは、自然現象の間の関係ではなく、判断の間の関係であり、そしてその判断の中には自然法則も含まれるのである。（『算術の基礎』第 87 節）

文中「確からしくした」と曖昧な表現をしているのは、『算術の基礎』が自然言語（この場合はドイツ語）で書かれているからである。主張を絶対的に厳密に証明するためには彼の創始になる「概念記法」に依らねばならないということを言いたいのである。

「計算するとは演繹することである」というのは如何にも論理主義者フレーゲの面目躍如たるものがある。さらに「数の法則は、本来、外的事物には適用が可能ではない。すなわち数の法則は自然法則ではない」というのはジェームズ・ミルの主張する「数の法則は事物の個数計算によって真理性が担保されている」という経験主義に対峙するフレーゲの基本的姿勢を表明したものである。

1.4 フレーゲ算術の実質的構造

先に述べたように、1980 年代に入って、フレーゲの算術の見直しが始まった。以下では GLA（『算術の基礎』）に従ってフレーゲ算術の実際を紹介する。GGA（『算術の基本法則』）に従わない理由は後述する。

GLA では実質的には 2 階述語論理が前提されている。a, b, x, y 等は対象をわたる変数とし、大文字の変数 F, G, X, Y 等は概念（述語）、性質をわたる変数、φ, ψ 等は 2 変数の関係をわたる変数とする。

対象 $\sharp F$ を次で導入する。($\sharp F$ を「概念 F に属する数」と読む。したがって次の「基数原理」は「概念 F と G が等数的であるとき、かつそのときに限り、概念 F に属する数と概念 G に属する数が等しい」と読まれる。)

（基数原理） $$\sharp F = \sharp G \Leftrightarrow F \approx G$$

ここに $F \approx G$ は F と G が等数的、すなわち F を満たす対象と G を満たす対象が 1 対 1 に対応することを意味する：

$$\exists\varphi(\forall x[Fx \to \exists y(Gy \land \varphi xy)] \land \forall y[Gy \to \exists x(Fx \land \varphi xy)]$$
$$\land\forall x\forall x'\forall y\forall y'[\varphi xy \land \varphi x'y' \to (x = x' \leftrightarrow y = y')])$$

定義　（0 の定義）　$0 = \sharp[x \ : \ x \neq x]$

定義　（親子関係）　$mPn \Leftrightarrow$

$$\exists F \exists y(Fy \wedge (\sharp F = n) \wedge (\sharp[x \ : \ Fx \wedge (x \neq y)] = m))$$

定義　（先祖子孫関係） $xP^*y \Leftrightarrow$

$$\forall F(\forall a \forall b([(a = x \vee Fa) \wedge aPb] \rightarrow Fb) \rightarrow Fy)$$

先祖子孫関係は、後述のデデキントの単純無限集合（数系列）の定義と比肩される巧妙なアイデアである。

以上の定義から次が従う（証明は容易なので省略する）：

1. $\sharp F = 0 \leftrightarrow \forall x \neg Fx$
2. $mPn \wedge mPk \rightarrow n = k$　また $mPn \wedge kPn \rightarrow m = k$

　そこで次のように定義する：

$$n = k' \leftrightarrow kPn$$

　このとき次が従う：

3. $\forall x \neg(xP0)$
4. $mPn \rightarrow mP^*n$
5. $kP^*m \wedge mP^*n \rightarrow kP^*n$
6. $mP^*n \rightarrow \exists k[kPn \wedge (mP^*k \vee (k = m))]$
7. $0P^*n \rightarrow \neg(nP^*n)$

定義　（大小関係、数（有限基数））

$$x < y \Leftrightarrow xP^*y, \qquad x \leq y \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y),$$

$$\text{Num}\ n \Leftrightarrow 0 \leq n$$

これらの定義に基づくと次の結果が得られる：

1. $\text{Num}\ n \wedge mPn \rightarrow \forall x(x \leq m \leftrightarrow x \leq n \wedge x \neq n)$
2. $mPn \rightarrow (\text{Num}\ m \leftrightarrow \text{Num}\ n)$
3. $0P\sharp[x\ :\ x \leq 0]$
4. $\text{Num}\ n \rightarrow nP\sharp[x\ :\ x \leq n]$　故に $n' = \sharp[x\ :\ x \leq n]$
5. $\text{Num}\ n \rightarrow \neg(nPn)$
6. **（無限基数の存在）** 有限ではない基数が存在する。
7. **(数学的帰納法の原理)**

$$\forall F[F0 \wedge \forall x(\text{Num}\ x \wedge Fx \rightarrow Fx')$$
$$\rightarrow \forall x(\text{Num}\ x \rightarrow Fx)]$$

1.5　注釈

1. フレーゲは最初に数の明示的な定義として次を与える：

$$\sharp F = n+1 \Longleftrightarrow \exists x(Fx) \wedge \sharp[y\ :\ Fy \wedge (y \neq x)] = n$$

要するに、要素を一つ取り去れば n 個になるとき、$n+1$ 個であると定義するのである。しかし、この定義では数の相等性 $m = n$ が証明できないとして退ける：

もし概念 F に属する数 a が属し、かつ同時に数 b が属するならば、$a = b$ でなければならないことを証明し得ない。したがって、「概念 F に属する唯一の数」という表現は正当化しえず、そのため、数の相等性を証明するのはそもそも不可能となろう。

どうして「正当化し得ない」のか明確に根拠を述べているとは言えないが、次のように言いたいのであろう：

$a = b$ を証明するためには要素を一つ取り去って $a - 1 = b - 1$ を証明しなければならない。この降下を「続けて行って」では体系内で認められた証明にはならない。

2. 数学的帰納法の原理の証明：$Fx \wedge \mathrm{Num}\ x$ を改めて Fx と記すと、数学的帰納法の原理は

$$\forall F[F0 \wedge \forall x(Fx \to Fx') \to \forall x Fx]$$

となる。そこで

$$F0 \wedge \forall x(Fx \to Fx') \qquad \cdots (*)$$

と仮定する。次に $\mathrm{Num}\ x$ とすると、数の定義により、

$$0P^*x \vee x = 0$$

である。$x = 0$ なら $F0$ はすでに仮定されている。そこで $0P^*x$ とする。P^* の定義によって

$$\forall y\{(y = 0 \vee Fy) \to Fy'\} \to Fx$$

が常に成り立つ。しかるに前件は仮定 $(*)$ の中に含まれているから Fx が成り立つ。

3. 無限基数の存在だが、GLA では次のように書かれている：

> 「有限基数」という概念に帰属する基数は一つの無限基数である。それをたとえば ∞_1 によって表示しよう。もしこの基数が有限基数であるとしたら、それは自然な数列において自己自身に後続しえないだろう。ところが ∞_1 は自己自身に後続するということが示せるのである。(第 84 節)

4. 実際 $\sharp[x : \mathrm{Num}\ x]$ は自分自身を直後の数として持つので、有限の数ではない。実際、$F = [x : \mathrm{Num}\ x]$, $G = [x : \mathrm{Num}\ x,\ x \neq 0]$ と置けば $\sharp F = \sharp G (=: \infty_1)$ だが、親子関係の定義によって $\infty_1 P \infty_1$ が成り立つので、∞_1 は有限基数ではない。

5. 集合 $\{0,\ 1,\ 2, ..., \aleph_0\}$ を対象領域とすればフレーゲ算術のモデルとなる。

1.6 元のフレーゲ算術から生じる矛盾

フレーゲは基数原理では基数が明示的に定義されていないので、「ジュリアス・シーザー」(概念「x はジュリアス・シーザーである」) が数かどうかをどのようにして決定するのかと自問自答する。そのため基数の明示的表現として「概念 F の外延」$'\epsilon F(\epsilon)$ を導入する必要があると考える。GLA では外延についてはあまり深く追求されていないが、GGA になると外延の考察が基本となっている。

第 V 基本規則 $'\epsilon F(\epsilon) = {}'\alpha G(\alpha) \to \forall x(F(x) \leftrightarrow G(x))$

この規則を素朴集合論の立場で解釈すれば矛盾を齎すことは、カントルの定理「冪集合 $P(X)$ から X への単射は存在しない」から明らかである。実際、すべての集合の集まり V が集合を成しているとしよう。概念 F から F を満足する要素の集合 $S(F)$ が定まる。$S(F)$ は V の部分集合、すなわち V の冪集合 $P(V)$ の要素である。さて $S(F)$ に F の外延 $'\epsilon F(\epsilon)$ を対応させる写像を考えると、外延の実態が何であれ、対象、すなわち V の要素になっているのであろう ($'\epsilon F(\epsilon) \in V$) から、第 V 基本規則は、その写像が単射であることを主張している。すなわち $P(V)$ から V への単射が存在することになるが、これはカントルの定理 ($|X| < |P(X)|$) に矛盾するのである。

以上で、フレーゲ算術の解説を終わる。そもそも集合を論理学の概念とは認めないフレーゲの元来の立場からすると概念の外延を考えるのは一貫性がないという見方もできる。しかし「集合（類、系）とは何か」を説明したりせず、記号論理的に扱われるので、問題がないとも言えるかもしれない。

また、修正されたフレーゲ算術によって算術の論理化が成就したと見るか、見ないかは論者によって分かれるところである。

2　デデキント（1831-1916）

集合論の勃興は数学におけるコペルニクス的転回点となったが、その運動を主導したのはカントルとデデキントであった。無限基数、無限順序数を導入したカントルの業績の革命性は論を待たないが、その集合論を古典的な数学に応用し、また数学の新たなる基礎付けの道具とした功績は主としてデデキントに帰属する。

先行的には群の研究が既にあったけれども、集合概念を群ばかりではなく、イデアル、体といった陽の形で大々的に数学に使ったのはデデキントの功績である。さらに 1872 年には有理数体の切断による実数体の構成を与え、集合概念の活用に新たな道を開いた。しかしながら、このような形の使用法では、集合の和や共通部分などの、いわゆる集合演算が本質的に現れるわけではない。本格的な集合演算が登場するのは『数とは何か』（1887：[2]）である。この著作は後のツェルメロによる集合論の公理化（[10]:1908）に道を開く重要な仕事である。その内容は現在でも読むに値し、また現代数学の基礎を学んだ人間にはちょっとした努力で読み通すことができる希に見る著作である。現在、河野伊三郎氏による翻訳 [2] は絶版になっているが、淵野昌氏による新訳が近く出版されると聞いているので、詳細はそちらにお任せしよう。

ここではデデキントが Keferstein へ宛てた手紙 [3](1890) に基づいて簡単な紹介をすることにする。まったくの無理解を示す書評を書いた Keferstein に対して、書簡を送り、『数とは何か』を書いた経緯を懇切丁寧に説明しているので、デデキントの著作の意図と意義を知る上で好都合である。

1. (研究の目的) 自然数の体系 $\mathbb{N}$ においてお互いに独立で他の命題がす

べて従うような基本的な命題群はどんなものかを分析することから研究を始めた。

2. (写像の概念) 自然数 n とその次の数 n' の関係でつながっているので $\mathbb{N}$ は数系列と呼ぶべきシステムを成している。このことから n に n' を対応させる写像 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ という考えに導かれた。
3. (デデキント無限の定義) $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ は単射ではあるが、全射ではない。これは $\mathbb{N}$ が無限集合ということを意味している。
4. (最初の数 1 の持つ性質) $1 = x'$ となる x は存在しない。しかも 1 はそういう性質を持つ唯一の数である。
5. (最大の難関は何だったか) 以上の性質が $\mathbb{N}$ を特徴付けるというのにはまだ遠い。自然数以外にも余計な要素が入っている可能性が除外できないからである。ここが最も苦労したところであり、克服には長い内省の時間を要したのである。たとえば、$n \in \mathbb{N}$ となるのは 1 に φ を何回か施して n に到達できるときである、などという表現では厄介な循環論法に陥るに過ぎない。
6. (数系列の本質) このようにして私は連鎖 (Kette) の考えに到達したのである。一般に S を無限集合とし、$\varphi : S \to S$ を全射ではない単射とするとき $1 \notin \varphi(S)$ なる要素 $1 \in S$ を一つ取る。K $(\subset S)$ が

$$1 \in K, \qquad \forall x(x \in K \Rightarrow x' \in K)$$

なる性質を持つとき連鎖を成すと言う。そしてこのような (S 内の) すべての連鎖 K の共通部分を単純無限集合と呼ぶ。
7. (無限集合の存在証明) 次に問題になるのは、そのような体系が本当に存在するかである。66 項、72 項でその証明が与えられる。
8. (数学的帰納法) この後に、すべての自然数に対して成り立つ命題を証明できるかということ、すなわち数学的帰納法の成立が問題になるが、これも連鎖の性質から導くことができる。
9. (回帰性定理) 最後に、数の間の演算を定義できるか？　これも 126

項で解決される。

2.1 注釈

1. デデキントは126項で回帰性定理（漸化式から自然数で定義された写像が定まることを保証する定理）を証明し、加法・乗法の演算が「すべての自然数に対して」定義できることを証明している。ランダウは『解析学の基礎』([12]:1929) の序文で「次々に定義していけるだけではダメだ」ということを気が付くに至る過程を縷々述べているが、デデキントはすでに40年前にこの問題を解決していたことになる。
2. デデキントは71項で、数系列 $(\mathbb{N},\ \varphi,\ 1)$ の持つ基本的性質として次の四つの命題を抽出している：
   (a) $\varphi(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$
   (b) $1 \notin \varphi(\mathbb{N})$
   (c) φ は単射である。
   (d) $\mathbb{N}$ は φ に関する単純無限集合である。
3. 上記の第4項は、$\mathbb{N}$ は
$$1 \in \mathbb{N}, \quad \forall x(x \in \mathbb{N} \to x' \in \mathbb{N})$$
   を満たす最小の集合であることを主張しているので、言い換えれば数学的帰納法の原理である。これらが現在、ペアノの公理系と呼ばれている基本命題系の原型であることは間違いない上、こうした基本命題系（とりわけ数学的帰納法の原理）を抽出したのはデデキントの功績であることを考慮すれば、デデキントの公理系と読むのが筋である。せめて**デデキント＝ペアノの公理系**（Dedekind-Peano Postulates）と呼ぶべきではなかろうか。
4. なお、代数系などの公理系は汎用性を特徴としているが、一方ユークリッド幾何学などの公理系は範疇性（categoricity）を備えたもので

あるから一応概念的には別物と考える方が適切であろう。前者を英語では axioms（公理）と呼び、後者を postulates（公準）と呼び分ける流儀が最近顕著になってきたように見受けられる。

5. 言うまでもないことだが、ここで範疇的とは、素朴な意味で集合論を使って同型性が証明できることを言っているのであって、現代の集合論における厳密に定義された範疇性とは意味が異なることを注意しておきたい。
6. すべての連鎖の共通部分集合をもって自然数の体系（の例）とするという考え方はフレーゲの数系列の定義と並ぶ天才的アイデアであろう。最小性をこうした形で捉えるのはデデキントに始まる。
7. デデキントは自然数の体系が範疇的であること（同型を除いて一意に定まること）を証明し、次のように述べる：

   > 要素の特殊な性質を度外視して、順序付ける写像によって付けられた関係だけを取り上げ、これらの要素を自然数、或いは単に数と呼ぶ。要素から他のどんな内包も捨象したことを考慮すれば、数は人間精神の自由な創造だと言っても正当化される。(73 項)

8. Zermelo の集合論を公理化する論文 [10] では無限集合の存在は公理とされ、一般的な単射 φ の代わりに、$\varphi(x) = \{x\}$ という特別な写像が使われている：すなわち

   $$0 \in Z, \quad \forall x(x \in Z \to \{x\} \in Z)$$

   を満たす Z の存在が公理として採用される。
9. 「捨象する（抽象化する）」ということは同値類を考えることと言い換えられるだろう。実際デデキントは 134 項で「単純無限集合は一つの類を成す」ことを注意し、数論のどんな定理も個々の数系列の特殊な性質には依存しないのだと強調している。つまり、単純無限集合のなす同型類を数系列と名付けるというのがデデキントの考え方の現代的

な表現であることになるだろう。

10. デデキントは、単純無限集合が同型を除いて一意に定まるという結果を得て、自分の求めた自然数の特徴付けの探究が完成したものと確信できたのであろう。そういう意味で範疇性はデデキントにとって重要な結果であった。

11. デデキントは第 14 節で有限基数について詳細に論じている。すなわち、$Z_n = \{x \mid x \leq n\}$ と定義し、任意の有限集合 T はいずれかの Z_n と対等となることを示し、この n を集合 T の個数と呼んでいる。この節で、X が無限集合であるためには任意の n に対し Z_n と対等な部分集合を持つことが必要十分だということを証明しているが、当然と言えば当然ながら、選択公理の必要性は見過ごされている。

12. 手紙の中でフレーゲに次のように言及している。

> 昨夏、短期間だが初めてフレーゲ氏の『概念記法』(1879) と『算術の基礎』(1884) を手にする機会を持ったが、喜ばしいことに、彼の「列における後続の定義」の仕方は「本質的には」私の連鎖の概念と一致していることを知った。ただ、読む際にいささか不適切な用語に水を差されないようにすべきであろう。

これは出版当時にフレーゲを肯定的に評価したほぼ唯一の例である。『数とは何か』の第 2 版の序でもフレーゲに次のように触れている。

> 本書の出版後 1 年ほど経って、すでに 1884 年にフレーゲの『算術の基礎』が出ていたことを知った。この著作において、数の本質についてとられた意見は、私の意見といかにも異なったものであるが、たとえば §79 から先のほうに本書と、特に 44 項の私の説明と、はなはだ近接した接触点を含んでいる。

2.2 『数とは何か』の欠陥

『数とは何か』に見られる欠陥として、しばしば次の事柄が挙げられる：

1. デデキントの無限集合の存在「証明」は証明とは認められない。（たとえば、河野伊三郎訳における脚注）
2. 性質 P を満たす要素 x の全体はつねに「集合」をなすという、素朴な「内包原理」を認めている。
3. デデキント無限と通常の無限の定義との同値性の「証明」には選択公理を要することが見過ごされている。
4. a と $\{a\}$ の区別をしていない。

第 1 項および第 2 項について：　デデキントが「無限集合の存在証明」としているものは

$$1,\ 2\,(1\,\text{の次の数}),\ 3\,(2\,\text{の次の数}), \cdots$$

の全体は集合をなし、しかもこれは無限集合であるというのと同じことである。これが問題視されるなら、集合の無限和や共通部分が再び集合になる根拠も問われねばならないはずである。

言い換えれば、「証明とは認められない」という主張の意味をはっきりさせる必要がある。デデキントが考えていたような、現象世界や思考世界まで含めた事物の集まりとしての集合（物の集まり）という概念の範囲では、「証明」というのもまた素朴なものであるはずで、この「無限集合の存在証明」だけを取り上げて証明と認められないというような歴史を無視した評価の妥当性が問われねばならない。すなわち形式化されたとまでは言わなくともある程度公理化が意識された形に整理されていない時期としては「証明ではない」とは言えないだろう。

なお、無限集合についてだけその存在は証明を要すると考えたのは、キリスト教世界における無限という概念の占める特殊性のしからしめた可能性が

強い。

第 3 項について：　選択関数について最初に言及したのはペアノかと思われるが、それもかなりあいまいな議論であって、当時としては仕方がなかったと見られる。

第 4 項について：　デデキントは（またペアノも）自然数を 1 から始めている。0 を自然数に含める考え方はフレーゲが最初かもしれない。また a と $\{a\}$ の違いを明確にしたのもフレーゲが最初で、デデキントはこれを混同している。そのために『数とは何か』で空集合を集合と「認められなかった」のではないかと指摘する人もいる。

2.3　デデキントは論理主義者か？

デデキントは自ら「算術は論理学の一部である」と書いているため、彼を論理主義者と見るのが普通である：

> 私が算術（代数学、解析学）を論理学の一部分と言ったことを見ても、私が数概念を空間および時間の表象または直観にはまったく依存しないもの、この概念をむしろ純粋な思考法則から直接流れ出たものと考えていることを表明している。（『数とは何か』序文）

しかし、『数とは何か』は、フレーゲが批判するように、論理学の一部であることを少しでも立証したようには見えない。この「論理学の一部分」というのは、フレーゲの主張する伝統的な意味での論理学とは違うのではないだろうか。なぜなら、『数とは何か』の中には、たとえば「A ならば A」とか「モードゥス・ポネンス」といった論理規則への還元を試みようという意図は一切感じられないからである。

2.4 『数について』に対するフレーゲの批判

デデキント氏の著作は本書で行われているよりずっとわずかの紙数で算術の諸法則を一層はるかな高みにまで追及している。この簡潔さは言うまでもなく、多くのものが実際にはまったく証明されていないということによって達成されているのである。(中略) デデキント氏も、算術は論理学の一部であるという意見である。しかし彼の著作はこの意見を確証するためにはほとんど何も寄与していない。彼が使用している「系 (System)」とか「ある事物がある事物に属する」といった表現は、普通、論理学では用いられていないからである。(GGA: 序言)

「異なる事物 $a, b, c, \ldots$ が何らかの理由で共通の観点のもとで把握され、心の中で取り纏められているということがしばしば起こる。そうしたとき、それらの事物は系 S を形成すると言われる」。ここではなるほど共通の観点ということのうちに、正解への予感が含まれている。けれども心の中における把握、取り纏めは、何ら客観的な標識ではない。誰の心の中においてなのかと私は問おう.... 私の心のうちで取り纏められるべきものは、疑いもなく私の心のうちになければならない。では一体私の外にある事物は、系を形成しないのか。(GGA: 緒論)

2.5 デデキントの「論理主義」

われわれが集合を数えるとか、事物の総数を求めるとかいう際に、われわれがどういうことをするかを精密に追求すれば、事物を関連させ、一つの事物を一つの事物に対応させ、または一つの事物を一つの

事物によって写像するというような精神の能力の考察に導かれてくる。この能力がなければ一般にどんな思考も可能ではない。ただこれだけに、しかもまったく欠くことのできない基礎の上に数の科学全体が打ち立てられなければならないというのが私の意見である。(『数とは何か』序文)

- この文章によって、デデキントの言う「論理」とは「集合」概念と(漠然とはしているが)それを操る「人間の持つ推論能力」のことだということがわかるのではないだろうか。
- ただ、集合を論理の基本だと考えるときさらに集合を少数の基本的規則に還元すること(現在の言葉言えば、集合論の公理化)の必要性を、デデキントの場合、まったく感じていなかったと見られるが、これもツェルメロがなぜ集合論を公理化する必要に迫られたかを考えれば、そういう必然性に迫られなかったデデキントの場合は当然のことだと思われる。
- デデキントの場合は、集合主義者(集合還元論者)であったが、その集合というのは大変素朴な事物の集まりといった程度のことであったから、原始命題への還元の必要性も感じておらず、集合が集まれば、集合を成すといったことは、和集合の存在を始め、すべての集合の集まりが集合を成すことまで、疑う必要性も感じていなかったのであろう。ただ、無限集合の存在に限っては、自明とはみなせなったのは、無限とは何かを重要な研究の主題としてきた西洋哲学の伝統から考えて当然のことだっただろう。

3 ペアノ(1858-1932)

ペアノは共通言語を作ることに熱心な人で、数学の記号化のばかりではなく、世界共通言語の作成と普及にも力を注いだ。とくに *Interlingua* という

国際語を作り、1908 年に普及協会の代表者になって以降は全面的にこの道に献身したという。

ペアノ曲線や微分方程式の解の存在などオリジナルな仕事があるが、むしろベクトル空間、算術、実数論などの記号化、体系化の方面で後世に名を残した。ベクトル空間はグラスマンが導入した概念だが、比べてみれば理解が容易な形に公理化されている。実数論も単にデデキントの切断の理論を記号化しただけである。ペアノは「数を定義する」とか「新しい数を作る」というような考え方よりは「どのようにして複雑な概念が分析されて、より簡単な概念に分解されるかを示す」(『数の概念について』[6]) 事の方に関心があったと述べている。しかしフレーゲの目から見れば、その関連の仕事は甘いものであった。

ペアノはフレーゲとも一時期書簡を交換し合った。フレーゲに対して、世間（数学の世界）に知られるためにはペアノ流の記号法で書き直してみてはどうかと助言したが、フレーゲは耳を傾けなかった。一部でも実現していたら、フレーゲ無視という歴史は違っていたかもしれないし、哲学的な内容が辟易されてやっぱり埋もれてしまったかもしれない。

フレーゲはペアノの著作に対して厳しい批判的意見を述べている。一部はペアノも受け入れたが、大半は無視してしまったようである。しかしながらラッセルにフレーゲという人間がいることを教え、橋渡しをしたという点では重要な役割を演じたことになる。

フレーゲの『ペアノ氏の概念記法と私自身のそれについて』([4]) がこの分野でのペアノの位置付けを正確に表しているだろう：

> ペアノ氏の意図は、証明というよりは知識の集積に、論理的完全さというよりは簡潔さと国際性に向かっているように思われる。(中略) しかしながら、ペアノ氏が論理的処理をも視野に入れていたようでもある。だが、「命題や理論を分析する」という言葉によって、彼は、文をできる限り単純な仕方で記号によって書くためになされるべき作業

を念頭に置いていたにすぎないように思われる。

ペアノは「数は定義できるものではない。しかし、無数の性質のすべてを導出できるような幾つかの性質を述べることはできる。（中略）これらを原始命題と呼ぶ。（中略）デデキントは数を定義しているので、ここが違うが、デデキントは上記の原始命題をすべて満たすものを数と呼んでいるので、実は両者は一致する」(『数の概念について』) と述べている。

「実は両者は一致する」と自ら認めてしまっては身も蓋もないが、ペアノの貢献を歴史的に評価しようとすれば、この点は重要な違いである。つまりペアノは、算術は論理でもなければ定義の対象でもなく、アプリオリに存在するものであって、1 や +1 を無定義術語として設定するという方式を取っているのである。実際、『算術の諸原理』(Arithmetices principia:[6],[14]) において、「ここには九個の公理があり、それらは無定義の記号の基本的な性質を述べている」と記している。後述するが、ペアノの自然数論は（集合も使っているので不完全なところはあるが、）算術の公理系を与えたと言えよう。ペアノの挙げた公理系は、当時は論理式という便利なものが知られていなかったから、集合概念の混用が認められるが、現今の言葉で言えば、1 階（ペアノ）算術を意識していると言えるだろう。

こうした観点から、ペアノはヒルベルトの公理主義を先駆けたと評価することができる。ただし、ペアノはデデキント同様生粋の数学者であったから、推論の法則を分析し、体系化するということには関心がなかったということであろう。しかし、ペアノにとっては数学の公式を記号で表すことは最大の関心事で、公式集プロジェクトのために自ら雑誌を編集し、[5] に含まれる伝記によると生涯で 4000 を超える数学公式を記号化したということである。

ラッセルはペアノの記号法の影響下に The Principles of Mathematics (1903) を書き上げ、原稿の最終段階になってフレーゲの著作に接したという。さらにラッセルはホワイトヘッドとともに Principia Mathematica

(1910-13:[11]) で記号法はペアノに、論理的な解析はフレーゲに負うとしている。

ペアノは自分の率いる（パドア、ブラリ＝フォルチ等が属する）イタリア学派と自分が創刊した雑誌によってその数学を記号化するという思想とそのための簡便な記号法を流布させたことが功績として評価される。1900 年の国際哲学者会議ではペアノたちの一団が目立っていて、結社のようだったと評されているが、それは外から見たときの印象であって、ペアノがイタリアでそれほど高く評価されていたとも言えず、またイタリアの学者たちがそれほど団結していたというわけでもなかったらしいという話を淵野昌氏から聞いた。

ペアノは算術の公理系の独立性も論じている。こうした見地からペアノは最も初期の公理化と形式的体系化の提唱者であったというのは正当な評価であろう。

3.1 ペアノによる算術

ペアノの『算術の諸原理』(Arithmetices principia：1889：この書名は完全なラテン語ではない。ペアノの作った国際共通語ではないだろうか？）では、まず論理の記号化が説明され、続いて算術の公理系が次のように述べられている：

類

記号 K は類、あるいは対象の集合体を意味する。記号 ϵ は「である」（足立注：ラテン語の be 動詞の三人称現在形 est：イタリア語なら è）を意味する。かくして $a\epsilon b$ は「a は一つの b である」と読まれる。$a\epsilon K$ は「a は一つの類である」を意味する。$a\epsilon P$ は「a は一つの命題である」を意味する（足立注：P は命題を表すことが先に書かれている)。

説明

記号 N は数（正整数）を意味する。1 は単位を意味する。$a+1$ は a の直後の数、あるいは a プラス 1 を意味する。$=$ は等しいことを意味する。

公理

1. $1 \epsilon N$
2. $a \epsilon N. \supset .a = a.$
3. $a, b \epsilon N. \supset : a = b. = .b = a.$
4. $a, b, c \epsilon N. \supset \therefore a = b\ .b = c : \supset a = c.$
5. $a = b.\ b \epsilon N : \supset .a \epsilon N.$
6. $a \epsilon N. \supset .a + 1 \epsilon N.$
7. $a, b \epsilon N. \supset :\ a = b.\ = .\ a + 1 = b + 1.$
8. $a \epsilon N. \supset .a + 1 - = 1.$
9. $k \epsilon K \therefore 1 \epsilon k \therefore x \epsilon N\ .x \epsilon k : \supset_x .x + 1 \epsilon k :: \supset .N \supset k.$

3.2 注釈

6 項から 9 項までが算術の公理系（公準系）である。1 階論理の立場では加法・乗法の演算は公理系に繰り込まねばならないが、これは後知恵であって、ペアノの段階では演算は帰納的に定義として与えられている（この点では、ラッセル [8] におけるペアノ算術の解説でも変わっていない）：

定義

（加法）　　$a,\ b \epsilon N. \supset .a + (b + 1) = (a + b) + 1.$

（乗法）　　$a,\ b \epsilon N. \supset .a \times (b+1) = a \times b + a.$

記号について一言

1. ピリオドはカッコに相当する。点々が多くなるにつれ結合が強くなる。
2. $-=$ は $\neq$ の意味である。
3. クラスと命題等に見られるような、一つの記号に二通りの意味を持たせる方式をフレーゲが強く批判している。
4. $\supset$ は原典では C を 180 度回転した記号（TEX にないので代用）。ここから集合における $\supset$, $\subset$ の記号が生まれていった。部分集合を表す $\subset$ の記号を最初に用いたのが誰かについては寡聞にして知らない（1928 年に発行された『輓近高等数学講座』（共立出版）の中には辻正次氏の『集合論』が含まれているがその中で既に $\subset$, $\supset$ が使われている。まさかこれが初出というわけではあるまいにしても、同時期には西洋の数学書でも別の記号が使われている例の方が多いので、最も早い使用例の一つになることは確かである。
5. $\exists$ もペアノが編み出した記号である。

参考文献

[1] Grassmann, H., Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. Teil I : Arithmetik (1861)

[2] Dedekind, R., Was sind und was sollen die Zahlen? (1887) : 河野伊三郎訳『数について』、岩波書店（1961）

[3] Dedekind, R., Letter to Keferstein (1890): Jean van Heijenoort[14] に英語の全訳が所収されている（pp.98-103）。

[4] 『フレーゲ著作集』全６巻、勁草書房 (2001)

[5] Selected Works of Giuseppe Peano, University of Toronto (1973)

[6] ペアノ『数の概念について』、共立出版（1969）

[7] 高木貞治『新式算術講義』

[8] Russell, B., The Principles of Mathematics (1903)

[9] ヒルベルト『幾何学の基礎』、共立出版（1970）

[10] Zermelo,

[11] Whitehead, A. N. - Russell. B., Principia Mathematica (1910-13)

[12] Landau, E., Grundlagen der Analysis, (1929)：英訳 Foundations of Analysis, Chelsea (1951)

[13] Hao Wang, The Axiomatization of Arithmetic, The Jour. of Symbolic Logic Vol. 22, Number 2 (1957) : この論文ではデデキントの手紙は部分訳である。

[14] Jean van Heijenoort, From Frege to Gödel : A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, Harvard U.P. (1967)

[15] Wright, C., Frege's Conception of Numbers as Objects, Aberdeen U. P. (1983)

[16] Demopoulos, W., ed., Frege's Philosophy of Mathematics, Harvard U.P. (1995)

[17] 田端博敏『フレーゲの論理哲学』、九州大学出版会（2002）

[18] 野本和幸『フレーゲ入門』、勁草書房（2003）