群の表現論草創期における T. Molien の仕事と Frobenius

平井　武 (Kyoto)
hirai.takeshi@math.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

調査報告の動機： Theodor Molien (ロシヤ名 Fedor Eduardovich Molin, September 10, 1861 - December 25, 1941) について，この主題でシンポジュウムの講演を行い，この報文を書くに至った動機は，次のようなものである．

（有限）群の指標と線形表現の理論の創始者は Frobenius である．群の表現論を自らの専門として研究してきた者（くだけて言うと，それをおマンマのタネとしてきた者）として「理論の淵源」に遡ってあらためて自己の拠り所を確かめる行為として，“Frobenius による「群の指標と表現」の研究” と題して，2003–2007 にわたって講演し，Frobenius の論文を [**F53**, 1896], [**F54**, 1896], [**F56**, 1897], [**F59**, 1899], [**F60**, 1900], [**F61**, 1901], [**F68**, 1903], ... と継続して読んで報文 [平井 4] ～ [平井 7] にまとめてきた（文末の論文リスト参照）．

Frobenius の理論構成は，非常に代数的で厳密ではあるが読みにくい，という特徴があり，きびすを接して迫ってきていた Burnside は別のアプローチの方法を [B1, 1898] – [B2, 1898] で提出した．また，弟子である Schur も線形表現と指標の理論を [S7, 1905] において再構成した．これらはいずれも Frobenius の後追いである．

ところが，Frobenius は [F56, 1897] の §4 において，Molien の多元環に関する論文 [M1, 1892] およびその理論を「群の線形表現」に応用した [M3, 1897] に言及して，ある重要な定理が Molien によってそこで独立に発見されていたと述べている．私は Molien の論文の現物に当たって，どこまで 2 人の結果が重なっているのか，証明の方法はどのように異なっているのか，とくに数論的結果 “既約表現の次元は群の次元を割る” が得られているとすればどのような手法でなのか（例えば，大学院生に対する半年の「特論」などで自分でも取り扱えるか）などなどの疑問を調べてみたかった．

この報文末尾には，必要な文献リストのほかに，Molien について net 上で探索したときヒットした有用と思える URL のリストを添付するので，より詳しい情報が欲しい方はそちらも参考にして下さい．

1　Frobenius, Molien 両者の論文 [F56], [M5] それぞれにおける相互のコメント

重要な数学史的事実なので，原文を引用して訳文（意訳）を付ける．

●● Frobenius [F56, 1897] の §4 の真ん中ちょっと後に：

> Diesen merkwürdigen Satz, dass es eine zur Gruppe $\mathfrak{H}$ gehörige Matrix giebt, deren f^2 Elemente unabhängige Variabele sind, hat auch Molien gefunden in seiner ausgezeichneten Arbeit *Über Systeme höhrer complexer Zahlen* (Math. Ann. Bd. 41, S.124), auf die mich Study vor kurzem aufmerksam gemacht hat. In einer weiteren Arbeit *Eine Bemerkung zur Theorie*

der homogenen Substitutionsgruppen, Situngsberichte der Naturforscher-Geserschaft zu Dorpat 1897, Jahrg. 18, S.259 hat MOLIEN die dort gefundenen allgemeinen Resultate speciell auf die Gruppendeterminante angewendet.

意訳： 「群 $\mathfrak{H}$ を表現する f 次の行列で，その f^2 個の行列要素が線形独立な変数であるものが存在する」という注目すべきこの定理を，Molien もまた発見していた．それは彼のすばらしい仕事“多元環について”［現代用語訳］(Math. Ann., 41 巻, 124 頁〜) においてであり，その論文については Study が最近私の注意を喚起した．さらなる仕事“群の線形表現に関する一つの注意”［現代用語訳］，Dorpat 自然科学者協会年次報告 1897, 第 18 巻, 259 頁〜，において，Molien は上記の論文で発見した一般的な結果を「群行列式」という特殊な場合に応用した．

•• Molien [M5, 1898] の Introduction の 1–13 行目：

In zwei Noten, die ich in den Sitzungsberichten der Dorpater Naturforschergesellschaft publicirt habe, habe ich aus der allgemeinen Theorie der Zahlensysteme mit nicht commutabeln Einheiten gewisse Schlüsse auf die Eigenschaften der Substitutionensgruppen gezogen.

Meine Bemerkungen erweisen sich als inhaltlich nahe verwandt mit den Ausfürungen des Hrn. FROBENIUS, Über Gruppencharaktere und Über die Primfactoren der Gruppendeterminante, in den Sitzungsberichten vom Jahre 1896 und seiner letzten Mittheilung Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen. Indessen habe ich das Hauptgewicht in meiner ersten Note auf die Umkehrbarkeit der Sätze gelegt. Die Untersuchungen des Hrn. FROBENIUS sind erst soeben durch freundliche Vermittelung des Herrn Verfassers zu meiner Kenntniss gelangt.

意訳： Dorpat 自然科学者協会年次報告に載せた私の 2 つのノートにおいて「非可換な生成元系を持つ多元環［現代用語訳］の一般理論」から群の線形表現の性質に関するある種の結論を導き出した．

この私の論文は Frobenius 氏の“群指標について”と“群行列式の既約因子について”, 1986 (王立プロシャ学士院) 年次報告，および最近の論文“有限群の線形表現について”［現代用語訳］，における論述と，内容的にきわめて近い類縁関係があることが明らかになった．しかしながら私の第 1 のノートでは，定理たちの転換可能性（訳者注：一般論を具体論に適用できること，の意か？）に重きを置いている．Frobenius 氏のこれらの研究は，やっと今 著者のご厚意により私の知るところとなった．

注： この論文 [M5] は Frobenius の紹介により，Berlin のプロシャ学士院の紀要に載った．

2　文献の探索：Molien の論文 [M3], [M4] のコピーの入手

Molien の論文 [M1, 1892], [M2, 1893], [M6, 1930] は Math. Ann. に掲載され，[M5] はプロシャ科学アカデミー（Belrin）の 1897 年の年次報告に Frobenius の紹介で載ったもである．[M5] の書誌情報は，

1897 Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, **52**(1898), 1152–1156;

とあるが，この年次報告は，月報に類するやり方で分冊で発行されていることが分かった．それは，販売価格付きの広告が裏表紙に印刷されている分冊の形を保ちながら製本されている巻を京都大学数学教室図書室で見つけたからである．従って年次報告の年次よりも印刷発表が必ず 1 年遅れていたわけでもない（分冊による）．こうした時間的誤差を勘案すると，Frobenius の [F53], [F54] と内容の重なる Molien の論文 [M3, 1897], [M4, 1897] とは，完全に独立に書かれたものであることが推測され，内容の比較（証明方法の違い）からもそれが納得できる．

さて，問題の [M3], [M4] のコピーの入手であるがこれが難物だった．最初に上記図書室で調べたときには，Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft Universität Jurje (Dorpat), **11**(1897), 259-274; 277-288 という引用をどこかで見付けていたので，それを頼りにしたがだめだった．Molien の論文集をロシヤ語訳として出版したものの情報を MathSciNet から得ていたので，それも調べてみたが蔵書が日本国内にあるかどうか分からなかった．そこで一旦あきらめた．

その後あらためて，上記の書誌情報の形で京都産業大学図書館から University of Tartu (Germann name: Universität Dorpat) に照会して貰ったが，「そんな雑誌は無い」との返答だった，とのことであった．誤った書誌情報で人々に無駄な労力を払わせたのではないかという自己卑下の気分と同時に，「ここまで詳しい情報が完全なガセネタ扱いされる理由もなかろう」という苛立ちがあり，一種「バカにされた」気分がした．そして「自分の大学の名前が入っていてここまで詳しい情報から，何も引き出さない（調べようともしない）」大学図書館とは何者かと思って net で調べると結構大きな大学だった．結局，私が自分自身を納得させるものとしては「ドイツ時代のものは知りたくもない，という潜在意識があるのではないか」という邪推じみた解釈だった．

その後，何年間放置していたか覚えていないが，あるとき思い立って，(上の「邪推」と関係があるが)「ひょっとしたらドイツ人ならば親切に調べて貰えるのではないか」と思って年来の友人である Tübingen 大学名誉教授の H. Heyer さんに依頼の e-mail を書いたのが，2008/12/17 だった．彼と Tübingen 大学の図書館員の尽力で，問題の雑誌を Tübingen で探し出してくれた．そのコピーが Feb. 26, 2009 の日付の手紙と一緒に航空便で送られてきた．その手紙の一部を Heyer さんの了解をとったので（感謝を込めて）ここに載せる：

•• Letter from Professor emeritus Herbert HEYER of Universität Tübingen,
dated February 26, 2009 :

（前略）

finally I am in the position to send you the desired copies of Molien's early papers on substitution groups.

You are right in interpreting my search as part of the history of the mathmatical problem involved.

Dorpat is a significant town in the south of Estonia. Its University founded by the Swedish King Gustav Adolf in 1632 and after degeneration refounded in the German spirit in 1802 became the important center of the Baltic-German thinking with a productive radiation towards Russia. Many famous German Scholars taught at the Dorpat University. During the flourishing time since the beginning of the 19th century until the second world war a Research Society for the Natural Sciences showed great activity modelled after Prussian/German Academy (of Arts and Science). It was certainly at that time that also mathematics was taken up and that Molien published his papers in the local journal. The Russian name which you quoted is <u>not</u> a translation of Molien's German name !

Now, with respect to the German researchers in Dorpat during the 19th century it is no surprise that the fame of the Dorpat Society reached Berlin and further west (as did the fame of Kingsberg), but it is a miracle to find the volume of your interest in Heidelberg. With the help of librarians of my University the not so popular "Academy Reports" had been traced (in Heidelberg), and I was able to look the volume in the reading room and I had copies made.

Here they are. Enjoy the scientific and the linguistic challenge !

（後略）

3 論 文 内 容

[M1] *Ueber Systeme höherer complexer Zahlen*, Math. Ann., **41**(1892), 83–156.

序文に現れる数学者と引用（引用論文は年を示す）：

Hamilton	Quaternion
Sylvester	Nonion, 1883
Dedekind	1887, 1885
Weierstrass	1884
Schwarz	1884
Hölder	1886
Petersen	1887
Cayley	Theorie der Matrices, 1858
Laguerre	1867

Frobenius	1877
Éd. Weyr	1887, 1884
Poincaré	1884
Scheffers	1889
Study	1889
F. Schur	1888
B. Pierce	1881
Lie	1889
Killing	1888

序文.

この論文の結果として次を挙げてある：

● ursprüngliche Zahlensystem（直訳： 根源的多元環，意訳： 単純多元環）
の定義は次のように新しくした
（Zahlensystem = hypercomplex numbers = 多元環［現代用語］）:

wie auch die Productgleihungen eines solches Zahlensystems transformiert werden mögen, unter diesen niemals die Productgleihungen eines Zahlensystems mit weniger Grundzahlen anzutreffen sind.
（意訳）多元環が**単純**であるとは，その多元環の積の定義式を如何ように書き換えようとも，積の定義式がより少ない変数によって書かれることはない．

● ursprüngliche Zahlensystem の決定：

• *jedes ursprüngliche Zahlensystems nur eine quadratische Anzahl von Grundzahlen besitzt*（意訳）単純多元環の一次独立な変数の個数はつねに自乗の形である（すなわち，次元は m^2 の形である），

• *die einem solchen zugeordnete Gruppe identisch mit der Parametergruppe der allgemeinen linearen und homogenen Gruppe ist.*（意訳）かかる単純多元環に付随する群は，全線形変換のなす群と一致する（すなわち，$GL(m, \boldsymbol{C})$ と一致する）．

● Auffindung einer Normalform für jedes Zahlensystem :
全行列環 $M(m, \boldsymbol{C}), m \in \boldsymbol{N}$, と同型なものの直和になる．

論文の本文は４つに分かれる：

I. Abschnitt. Zahlensysteme und bilineare Formen
（内容）die allgemeine Discussion der Productgleihungen eines Zahlensystems,
Satz 1 – Satz 10
II. Abschnitt. Zahlensysteme und algebraische Gleihungen
（内容）Hauptsache nach die ursprüngliche Systeme, Satz 11 – Satz 30
III. Abschnitt. Zahlensysteme und zu ihnen gehörige Gruppen
（内容）Zahlensysteme gehörigen Gruppen, Satz 31 – Satz 45
IV. Abschnitt. Zahlensysteme und Matrices
（内容）Matrixdarstellung，結論： $M(m, \boldsymbol{C})$ と同型なものの直和になる．
Satz 46 – Satz 51

当時としては重要な論文 [M1] では,（現代用語で述べると）次の Wedderburn の定理の $K = \boldsymbol{C}$ の場合を証明した:

Wedderburn の定理. 可換体 K 上の単位元を持つ単純多元環は，ある K 上の斜体 D の上の全行列環 $M(n, D)$ に同型である．

•• **注**：1901 年正書法改訂以前と以後：
publiziren $\Longrightarrow$ publizieren, summiren $\Longrightarrow$ summieren, Fixirung $\Longrightarrow$ Fixierung
thut $\Longrightarrow$ tut, in der That $\Longrightarrow$ in der Tat , Theil $\Longrightarrow$ Teil,
Mittheilung $\Longrightarrow$ Mitteilung, Schaar $\Longrightarrow$ Schar, nothwendig $\Longrightarrow$ notwendig,

Werthepaar $\Longrightarrow$ Wertepaar, Hülfe $\Longrightarrow$ Hilfe, wol $\Longrightarrow$ wohl

Abschnitt I, §1: ここでは Zahlensystem（多元環）の**定義**が，下の条件 (I), (II), (III″) によって与えられている.

（ただし，条件 (III″) はオリジナルの (III) を当方が拡大解釈したものである）

n Grundzahlen $e_1, \ldots, e_n$ が Zahlensystem $\mathfrak{A}$ を張るとする（Zahlensystem に記号は与えられていないので当方で $\mathfrak{A}$ という記号を与える）.

Zahl とは，$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in \mathfrak{A}$, $x_j \in \boldsymbol{C}$, のこと.

• Productgleichung（積の定義式）：

$$\text{(I)} \qquad x' = xu, \quad x'_i = \sum_{k,l} a^i_{kl}\, x_k u_l \quad (i,k,l = 1,\ldots,n) \qquad (a^i_{kl} \text{ は構造定数})$$

• Bedingungsgleichungen（条件式）：

$$\text{(II)} \qquad \sum_s a^i_{sm} a^s_{kl} = \sum_s a^i_{ks} a^s_{lm} \quad (i,k,l,m = 1,\ldots,n) \qquad (\text{積の結合律})$$

Die *Division* als zur Multiplication inverse Operation と述べて，方程式 $xu = y$ を (I) の下で解くべし として，その解が，$x = yu^{-1}$ または $u = x^{-1}y$ として，一意的に存在するための条件として，

(III) *keine der beiden Determinanten* $\left|\sum_l a^i_{kl} u_l\right|$, $\left|\sum_k a^i_{kl} x_k\right|$ $(i,k,l,=1,\ldots,n)$ *identisch verschwinde,*

を挙げている．しかし，これによって，多元環の公理に何かを付け加えるべし，とは言っていない.

（拡大解釈） 上の (III) を $\mathfrak{A}$ にたいする条件と解釈する，すなわち，構造定数 a^i_{kl} への条件として，次の (III′) を要求しているとする:

(III′) ある u および x に対して $\left|\sum_l a^i_{kl} u_l\right| \neq 0$, $\left|\sum_k a^i_{kl} x_k\right| \neq 0$.

これを別の言葉で言おう．$\mathfrak{A}$ の左正則表現を $x \to \rho(x)$ と書き，右正則（逆）表現を $u \to \lambda(u)$ と書くと，条件 (III′) は次のようにかける：

(III″) $(\exists\, u \in \mathfrak{A})$ $\lambda(u)$ 正則， かつ $(\exists\, x \in \mathfrak{A})$ $\rho(x)$ 正則. □

疑問 I.1. (III″) は「多元環が**半単純**である」ということとはほど遠いのではないか?.

Abschnitt I, §3:

Eine lineare Form der zahl x とは

$$g(x) = g_1 x_1 + \cdots + g_n x_n \tag{1.1}$$

であるが，これが，$g(xu) = g(ux)$, i.e., $g([x,u]) = 0$ を満たすとき，g は *Polareigenschaft* を持つ，という．その必十条件は

$$\sum_i g_i (a^i_{kl} - a^i_{lk}) = 0 \quad (i,j,k = 1,\ldots,n). \tag{1.2}$$

これを *eine Zahlensystem entstammende Form mit Polareigenschaft* とよぶ.

$$g_i := \sum_s a^s_{is} \quad とおくと, \tag{1.3}$$

$$\sum_i g_i a^i_{kl} = \sum_{i,s} a^s_{is} a^i_{kl} = \sum_{i,s} a^s_{ki} a^i_{ls} = \sum_{i,s} a^i_{ks} a^s_{li}, \tag{1.4}$$

となり，k,l につき対称で，(1.2) 式を満たす．従って，

Satz 6. 各多元環は，少なくとも 1 つの *Form mit Polareigenschaft* を持つ． □

疑問 I.2. 「$(\forall i)\ g_i = 0$ となることはないのか？」を検証してみよう．

$$\begin{aligned} g(xu) &= \sum_{1\le k,l\le n} \Big(\sum_{i,s} a^i_{ks} a^s_{li}\Big) x_k u_l = \sum_{i,s} \Big(\sum_k a^i_{ks} x_k\Big)\Big(\sum_l a^s_{li} u_l\Big) \\ &= \mathrm{tr}\big(\rho(x)\rho(u)\big) = \mathrm{tr}\big(\rho(u)\rho(x)\big) = \mathrm{tr}\big(\rho(xu)\big) = \mathrm{tr}\big(\rho(ux)\big) \qquad (1.5) \\ &= \mathrm{tr}\big(\lambda(u)\lambda(x)\big) = \mathrm{tr}\big(\lambda(x)\lambda(u)\big) = \mathrm{tr}\big(\lambda(ux)\big) = \mathrm{tr}\big(\lambda(xu)\big), \qquad (1.6) \end{aligned}$$

である．条件 (III$''$) によって，正則表現 ρ と λ に対して，$\rho(x), \rho(u)$ が正則，または，$\lambda(u), \lambda(x)$ が正則，となる x, u は存在する．しかし，それだけで，内積 $\langle x, u\rangle_g := g(xu)$ が non-zero であるとか，非退化であるとか，が分かるだろうか？

元 $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ に対して，u を $u = \overline{x_1} e_1 + \cdots + \overline{x_n} e_n$ と，とることも出来るが，構造定数 a^i_{kl} の性質が分からないので，役に立つだろうか？ □

内積の導入： g が (1.2) を満たすとして，$\langle x, u\rangle_g := g(xu)$ とおくと，

$$\langle x, u\rangle_g = \langle u, x\rangle_g \quad （対称な内積）, \tag{1.7}$$

$$\langle xv, u\rangle_g = \langle x, vu\rangle_g \tag{1.8}$$

（v の右作用 $\lambda(v)$ の contragradient が 左作用 $\rho(v)$），

$$\langle xv, u\rangle_g = \langle v, ux\rangle_g \qquad （x \text{ の左作用 } \rho(x) \text{ と右作用 } \lambda(x)）. \tag{1.9}$$

これらの性質は，内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の有用性を担保する．

（解釈） 上の (1.8), (1.9) 式を書き換えると，

$$\langle \lambda(v)x, u\rangle_g = \langle x, \rho(v)u\rangle_g, \qquad \langle \rho(x)v, u\rangle_g = \langle v, \lambda(x)u\rangle_g. \tag{1.10}$$

両側正則表現を

$$\big(\rho\cdot\lambda\big)(x,y) := \rho(x)\lambda(y) \qquad \big((x,y)\in\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}\big) \tag{1.11}$$

で定義する．ここでは $\lambda(uv) = \lambda(v)\lambda(u)$（逆表現）であることに留意．すると，

$$\big\langle \big(\rho\cdot\lambda\big)(x,y)u,\ v\big\rangle = \big\langle u,\ \big(\rho\cdot\lambda\big)(x,y)v\big\rangle \quad \big((x,y)\in\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}\big). \tag{1.12}$$

$\mathfrak{A}$ の部分空間 V に対して，この内積に関する直交補空間を $V^\perp$ と書く：

$$V^\perp := \big\{u\in\mathfrak{A}\ ;\ \langle u, v\rangle_g = 0\ (v\in V)\big\} \tag{1.13}$$

すると，次の定理を得る．この定理は，$\mathfrak{A}$ を単純部分環の直和に分解するときに使える（$\mathfrak{A}$ の**完全可約性**が分かるはずである．Abschmitt IV 参照）．

定理 I.1(平井追加). $\mathfrak{A}$ の部分空間 V が $\lambda(x)$ $(x \in \mathfrak{A})$ で不変（λ-不変という）ならば，その直交補空間 $V^{\perp}$ は ρ-不変である．また，V が ρ-不変ならば，$V^{\perp}$ は λ-不変である．さらに，V が $(\rho\cdot\lambda)$-不変ならば，$V^{\perp}$ も $(\rho\cdot\lambda)$-不変である． □

Abschnitt II, §2:
die *charakteristischen Gleichungen* des Zahlensystems を $\rho(u)$ と $\lambda(u)$ の固有方程式として定義する：

$$\omega x = xu\,,\ \text{ i.e., } \big(\lambda(u)-\omega I\big)x = 0,$$

よって，
$$\Big|\sum_i a^i_{kl}u_l - \omega\delta_{ik}\Big| = 0 \quad (i,k,l = 1,\dots,n); \tag{2.1}$$

$$\omega x = ux\,,\ \text{ i.e., } \big(\rho(u)-\omega I\big)x = 0,$$

よって，
$$\Big|\sum_i a^i_{lk}u_l - \omega\delta_{ik}\Big| = 0 \quad (i,k,l = 1,\dots,n)\ ; \tag{2.2}$$

すなわち，
$$\begin{cases} \omega^n - f_1(u)\omega^{n-1} + \cdots \pm f_n(u) = 0\,, \\ \omega^n - g_1(u)\omega^{n-1} + \cdots \pm g_n(u) = 0\,; \end{cases} \tag{2.3}$$

ω に u を代入すると，次の恒等式を得る：

$$\begin{cases} u^n - f_1(u)u^{n-1} + \cdots \pm f_n(u)u^0 = 0\,, \\ u^n - g_1(u)u^{n-1} + \cdots \pm g_n(u)u^0 = 0\,. \end{cases} \tag{2.4}$$

Abschnitt II, §4:
die *Ranggleichung* eines Zahlensystems を定義する．これは，固有方程式から来た (2.4) 式よりも次数が低く，さらに最も低いものを狙っている：
どれかの $u \in \mathfrak{A}$ で，次のようになっていたとせよ（m 最小）：

$$u^m - h_1u^{m-1} + \cdots \pm h_m u^0 = 0, \tag{2.5}$$

ここで，u を ω で置き換えた次式を die *Ranggleichung* eines Zahlensystems とよぶ：

$$\omega^m - h_1\omega^{m-1} + \cdots \pm h_m = 0, \tag{2.6}$$

Abschnitt II, §5:
die *Killing'sche Gleichung* eines Zahlensystems を定義する:

$$\omega x = xu - ux = [x,u],\ \text{ i.e., } \big(-\operatorname{Ad}(u) - \omega I\big)x = 0\,, \tag{2.7}$$

よって，
$$\Big|\sum_i (a^i_{kl} - a^i_{lk})u_l - \delta_{ik}\omega\Big| = 0 \quad (i,k,l = 1,\dots,n). \tag{2.8}$$

Satz 28. *Die Killing'sche Gleihung eines ursprünglichen Zahlensystems ist die Wurzeldifferenzengleihung der Ranggleihung.*

Satz 29. *Die Anzahl der Grundzahlen eines ursprünglichen Zahlensystems ist gleich dem Quadrat des Grades der Ranggleichung.* （すなわち， $n = m^2$）

Satz 30. *Die Basis jedes ursprünglichen Zahlensystems vom m^2 Grundzahlen so gewählt werden, das die Productgleihungen die Gestalt*

$$x'_{ik} = \sum_{l} x_{il} u_{lk} \quad (i, k, l = 1, \ldots, m)$$

annehmen. （すなわち，$M(m, \boldsymbol{C})$ と同型になるように変数変換できる）

Abschnitt III （省略）

Abschnitt IV 「多元環 $\mathfrak{A}$ が単純多元環 $M(m, \boldsymbol{C})$ $(m \in \boldsymbol{N})$ の直和に書ける」という結果を与えてあるが，$\mathfrak{A}$ の完全可約性に示した（積もりの）部分は未完である，と思われる.

（感想）

1．多元環自身にもその部分環にも記号が与えられていない．ある部分環を一旦 $\mathfrak{B}$ と名付けておけば以後は，「部分環 $\mathfrak{B}$」とでもよべば特定できるわけだが，この論文では $\mathfrak{B}$ を特定するのに 1 行以上にわたる長い文節が必要である．これは内容が分かってしまえば我慢できるが，内容も分からず文章も特定の固有名詞のはずが不必要に長い文節になっているので，度重なると「文章自体が悪い」のではないかと思えてくる．しかし，Heyer さんに聞くと，別にそうではないらしい．

私が自分なりに記号を導入してそれを用いて書き換えて，はじめてちゃんと理解できることを，記号無しで自己薬籠中のものとし活用しているのに敬服する.

2．Frobenius, Schur の論文においては，重要な命題やその証明までもが，地の文章の中に埋もれて書かれているので，注意が肝要だった．しかし，この論文では，ほとんどの命題は Satz としてまとめてあり（Satz 1 ～ Satz 51），現代の論文のようである.

3．時代背景を考えると，非常に優れた研究である．とくに，内積 $\langle u, v \rangle_g$ の発明とそれを巧みに応用して行くところや，固有方程式を独自の方法で応用していくところ，に大きなオリジナリティを見る．しかし，私にとっては，必要な記号を導入して現代風な理解に到達するのに時間がかかった．そして「数学における記号の使用」のありがたみを思い知った.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[**M2**] *Berichtigung zu dem Aufsatze „Ueber Systeme höherer complexer Zahlen“*, Math. Ann., **42**(1893), 308–312.

Das Corollar zu Satz 18 [M1] の証明が不十分であった．この系は下に採録する Satz 26 の証明に使う為にあったのだが，この論文で Satz 26 を直接証明している.

Satz 26. *Die Killing'sche Gleihung eines Zahlensystems, das nur einziges begleitendes ursprüngliches System besitzt, ist Potenz der Wurzeldifferenzengleihung der Ranggleihung des begleitenden ursprñglichen Systems.*

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[**M3**] *Eine Bemerkung zur Theorie der homogenen Substitutionsgruppen*, 1896
Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Geselschaft, **11**(1897), 259–274.

§1 :

$G := \{S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}\}$: n 個の元よりなる群，S_0 単位元

$$u = u_0 S_0 + u_1 S_1 + \cdots + u_{n-1} S_{n-1} \qquad \text{(群環の元)} \tag{3.1}$$

(注) 原論文には，群に対する記号は無いが，ここでは G と記す．

$x' = ux$，群環の元 $x = x_0 S_0 + x_1 S_1 + \cdots + x_{n-1} S_{n-1}$ に
u が左正則表現 $\mathcal{L}(u)$ として働く：

$$\text{(I)} \qquad x'_h = \mathcal{L}(u)x = \sum_{j,l} a^h_{kl}\, u_k x_l \quad (h, k, l = 0, 1, \ldots, n-1)$$

結合律： $$\sum_s a^h_{ks} a^s_{lm} = \sum_s a^h_{sm} a^s_{kl} \quad (h, k, l, m, s = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{3.2}$$

を用いて $T_k := \mathcal{L}(S_k)$: $x \to x'$ につき次が示される：

$$\text{(II)} \qquad T_k \;:\quad x'_h = \mathcal{L}(S_k)x = \sum_l a^h_{kl} x_l$$

$$S_k S_l = S_i \implies T_k T_l = T_i \quad \text{(すなわち，表現である)} \tag{3.3}$$

Satz (群環の左正則表現). *Jeder discreten Gruppe ist eine Gruppe linearer Substitutionen von der Form* (I), (II) *holoedrisch isomorph*（同型である）.

§2 :

表現 $\pi(u)$, $u = \sum_l u_l S_l$,

$$y'_i = \pi(u)y = \sum_k b_{ik}(u)\, y_k\,, \quad \pi(u) := \big(b_{ik}(u)\big)\,; \tag{3.4}$$

$$b_{ik}(u) = \sum_l b^l_{ik}\, u_l\,, \qquad \pi(S_l) = \big(b^l_{ik}\big). \tag{3.5}$$

§3 :

内積 $$\langle S_l, S_m \rangle :\doteq \mathrm{tr}\big(\mathcal{L}(S_l)\mathcal{L}(S_m)\big)\,, \tag{3.6}$$

$$\langle S_l, S_m \rangle = \langle S_m, S_l \rangle = \begin{cases} n = |G|, & S_l S_m = S_0 \text{ のとき；} \\ 0\,, & S_l S_m \neq S_0 \text{ のとき.} \end{cases} \tag{3.7}$$

[M1] よりの引用：**1), 2), 3), 4), 5)** は省略

6) *Ein ursprüngliches Zahlensystem besitzt stets eine quadratische Anzahl von Grundzahlen. Die Productgleihungen könen in forgende Form gebracht werden :*

$$u'_{ik} = \sum_j v_{jk} u_{jk} \qquad (GL(\nu, C) \text{ と同型})\,.$$

これを「群の表現」の場合に応用して，次を得た．

Jedes Zahlensystem, das einer discreten Gruppe entspricht, zerfällt bei geeigneter Wahl der Basis in lauter ursprüngliche Zahelnsysteme.

群環 $\mathfrak{A} := C[G]$ の右正則（逆）表現を $\mathcal{R}(v)y := yv$ $(y \in \mathfrak{A})$ で定義する．両側正則表現 $\mathcal{L} \cdot \mathcal{R}$ による既約分解を書くと，

$$\mathfrak{A} \cong M(\nu, \boldsymbol{C}) \oplus M(\nu_1, \boldsymbol{C}) \oplus \cdots, \tag{3.8}$$

$$n = \nu^2 + \nu_1^2 + \cdots. \tag{3.9}$$

これから出てくる左正則表現 $\mathcal{L}$ の分解を作用素レベル $\mathcal{L}(\mathfrak{A}) := \{\mathcal{L}(u)\ ;\ u \in \mathfrak{A}\}$ で書くと，

$$\mathcal{L}(\mathfrak{A}) \ \cong\ [\nu] \cdot M(\nu, \boldsymbol{C}) \ \bigoplus\ [\nu_1] \cdot M(\nu_1, \boldsymbol{C}) \ \bigoplus\ \cdots, \tag{3.10}$$

ここに，$[\nu]$ などは重複度を表す．(3.8) における $M(\nu, C)$ の各列が，１つの既約表現を与えている．

§4 :

上の (3.8)–(3.9) の場合の左正則表現に於いて，第１項の $GL(\nu, \boldsymbol{C})$ には次元 ν の同じ表現が，重複度 ν で現れている．実際，

(b_{ij}) **の作用：** $\quad x'_{ik} = \sum_j b_{ij} x_{jk} \quad (i, j, k = 1, \ldots, \nu) \qquad$ (k が重複度を表す)．

§5 :

① 正則表現は，ブロック型の上三角に出来る．
② ブロック型の上三角の表現はブロック型の対角型に出来る．

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[M4] *Ueber die Anzahl der Variabeln einer irreductibelen Substitutionensgruppe*, 1896 Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Geselschaft, **11**(1897), 277–288.

§2 : $\quad u = \sum_t u_t S_t$ etc. として，

$$\begin{aligned} (vx)u &= \sum_i \sum_{s,l} \Big(\sum_{k,t} a^s_{kt} v_k x_t\Big)\, a^i_{sl} u_l\, S_i = \sum_i \sum_t \Big(\sum_{k,l,s} a^s_{kt} a^i_{sl}\, v_k u_l\Big)\, x_t\, S_i\,, \\ v(xu) &= \sum_k a^s_{ki} v_k \Big(\sum_{t,l} a^i_{tl} x_t u_l\Big) S_s = \sum_s \sum_t \Big(\sum_{k,l,i} a^s_{ki} a^i_{tl}\, v_k u_l\Big)\, x_t S_s\,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

内積の導入： x への左右からの作用（**両側正則表現** $\mathcal{L} \cdot \mathcal{R}$）の trace をとると，

$$\mathrm{tr}\big(\mathcal{L}(v)\mathcal{R}(u)\big) = \sum_{k,l,s,t} a^s_{kt} a^t_{sl}\, v_k u_l = \sum_{k,l,i,s} a^s_{ki} a^i_{sl}\, v_k u_l =: \Omega(v, u)\,. \tag{4.12}$$

内積 $(v,u) \to \mathrm{tr}\big(\mathcal{L}(v)\mathcal{R}(u)\big) =: \langle v,u\rangle_{LR}$ は，$\mathfrak{A}$ への G の両側正則表現で不変であり，とくに内部共役作用により不変である，すなわち，

$$\langle Ad(S_p)v, Ad(S_q)u\rangle_{LR} = \langle v,u\rangle_{LR} \quad (S_p, S_q \in G).$$

その性質： 1），2）省略

3）部分多元環 $\mathfrak{B} = M(\nu, \boldsymbol{C})$ の場合： これは $\mathcal{L}(v)\mathcal{R}(u)$ の下では既約である．

$$(vxu)_{ij} = \sum_{s,t} v_{is}x_{st}u_{tj}, \tag{4.13}$$

この $\mathcal{L}(v)\mathcal{R}(u)$ の $x = (x_{st})$ への作用を行列らしく書き換えてみると，

$$X \in M(\nu, \boldsymbol{C}) \text{ に対し，} X \to VXU,$$

ここに，$U = \mathcal{R}(u)\big|_{M(\nu,\boldsymbol{C})}$, $V = \mathcal{L}(v)\big|_{M(\nu,\boldsymbol{C})} \in M(\nu, \boldsymbol{C})\big)$. 従って，

$$\mathrm{tr}\Big(\mathcal{L}(v)\mathcal{R}(u)\Big|_{M(\nu,\boldsymbol{C})}\Big) = \sum_{i,j} v_{ii}u_{jj} = \Big(\sum_i v_{ii}\Big)\Big(\sum_j u_{jj}\Big)\,; \tag{4.14}$$

$$\text{さらに，}\ \mathrm{tr}\Big(\mathcal{L}(v)\Big|_{M(\nu,\boldsymbol{C})}\Big) = \sum_{i,j} v_{ii} = \nu \cdot \sum_i v_{ii}\,. \tag{4.15}$$

$M(\nu, \boldsymbol{C})$ 上では，$\mathcal{L}(v)$ の制限として，同じ既約表現が ν-重に働いているので，その既約表現の指標は，

$$f(u) = \sum_i v_{ii} \quad \text{と書かれる．}$$

4）$\mathfrak{A} = \boldsymbol{C}[G]$ の両側正則表現の既約分解が

$$\mathfrak{A} \cong M(\nu_1, \boldsymbol{C}) \oplus \cdots \oplus M(\nu_\rho, \boldsymbol{C}), \tag{4.16}$$

従って　その指標をとると, (4.14) を見て次を得る：

$$\mathrm{tr}\big(\mathcal{L}(v)\mathcal{R}(u)\big) = \Omega(v,u) = f_1(v)\cdot f_1(u) + \cdots + f_\rho(v)\cdot f_\rho(u). \tag{4.17}$$

§3：　内積 Ω を詳しく調べる：

$n_{k,l} := \sharp\{S_s\,;\ S_k^{-1} = S_sS_lS_s^{-1}\}$ とおく．

$$\Omega(S_k, S_l) = n_{k,l} \tag{4.18}$$

$$= \begin{cases} |Z_G(S_k)| = |Z_G(S_l)| & \text{if } S_k^{-1} \sim S_l\,, \\ 0 & \text{if } S_k^{-1} \not\sim S_l\,. \end{cases}$$

$$n_l := n_{l,l} = \sharp\{S_s\,;\ S_l^{-1} = S_sS_lS_s^{-1}\} = |Z_G(S_l)|\,;$$

$$\Omega(v,u) = \sum_{k,l} n_{k,l}v_ku_l\,; \quad n_{k,l} = n_k = n_l \ \text{ if } S_k^{-1} \sim S_l\,. \tag{4.19}$$

双線形内積 $\Omega(v,u)$ は v, u それぞれの内部自己同型 $\mathrm{Ad}(G)\times\mathrm{Ad}(G)$ で不変である．

m_l で S_l の共役類の位数，$S_p \sim S_l$ で共役関係，を表す．

$$C_l(u) := \sum_{S_p \sim S_l} u_p, \quad C'_l(v) := \sum_{S_p \sim {S_l}^{-1}} v_p, \tag{4.20}$$

共役類の完全代表元系を $\{S_0, S_1, \ldots, S_{\sigma-1}\}$ とすると，

$$\Omega(v,u) = \sum_{l=0}^{\sigma-1} n_l\, C'_l(v)\, C_l(u), \qquad n_l\, m_l = n,\ \ n_l = \bigl|Z_G(S_l)\bigr|. \tag{4.21}$$

そこで，(4.17)

$$\Omega(v,u) = f_1(v)\cdot f_1(u) + \cdots + f_\rho(v)\cdot f_\rho(u),$$

と比較すると，次を得る：

結論 1 （既約表現の個数＝共役類の個数）： $\rho = \sigma$.

§4 : 指標の直交関係を導く： $\nu_{ik} := f_i(S_k)$, $\nu'_{il} := f_i({S_l}^{-1})$ とおく．

$$\begin{aligned} f_i(u) &= \nu_{i0}\, u_0 + \nu_{i1}\, u_1 + \cdots + \nu_{i,n-1}\, u_{n-1} && (4.22)\\ &= \nu_{i0}\, C_0(u) + \nu_{i1}\, C_1(u) + \cdots + \nu_{i,\sigma-1}\, C_{\sigma-1}(u) && (4.23)\\ &\qquad\qquad (1 \le i \le \rho = \sigma); \\ f_i(v) &= \nu'_{i0}\, C'_0(v) + \nu'_{i1}\, C'_1(v) + \cdots + \nu'_{i,\rho-1}\, C'_{\rho-1}(v). && (4.24) \end{aligned}$$

と書き表して， $\Omega(v,u) = \sum_{l=0}^{\rho-1} n_l\, C'_l(v)\, C_l(u)$ と比較すると，

結論 2 （既約指標の直交関係）：

（ミス？） $n_l \sum_{i=1}^{\rho} \nu'_{il}\nu_{ik} = n\,\delta_{lk} \qquad (l,k = 0,1,\ldots,\rho-1)\,,$ (4.25)

上はミスの筈である．正しくは， $\sum_{i=1}^{\rho} \nu'_{il}\nu_{ik} = n_l\delta_{lk}\,,$ (4.26)

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{\rho} f_i({S_l}^{-1}) f_i(S_k) = n_l\delta_{ik} \ \ (i,k = 0,1,\ldots,\rho-1) \quad \text{（珍しい式）} \tag{4.27}$$

そこで $D' := (d'_{ij})_{1\le i\le\rho,\,0\le j\le\rho-1}, \quad d'_{il} := \sqrt{\dfrac{m_l}{n}}\, f_i({S_l}^{-1}) = \dfrac{1}{\sqrt{n_l}}\, f_i({S_l}^{-1}),$

$D := (d_{ij})_{1\le i\le\rho,\,0\le j\le\rho-1}, \quad d_{ik} := \sqrt{\dfrac{m_k}{n}}\, f_i(S_k) = \dfrac{1}{\sqrt{n_k}}\, f_i(S_k),$ と置くと

$$ {}^tD'\, D = E_\rho \qquad \text{（珍しい式）} \tag{4.28}$$

と表される．ここから見事なアイデアによる転換によって次式を得た：

$$D'\, {}^tD = E_\rho \quad (\because\ \ n_l m_l = n) \tag{4.29}$$

i.e. $$\sum_{k=0}^{\rho-1} d'_{ik} d_{i'k} = \delta_{ii'}\,, \tag{4.30}$$

i.e., $$\sum_{k=0}^{\rho-1} m_k f_i\big(S_k^{-1}\big) f_{i'}(S_k) = n\delta_{ii'} \quad \textbf{(直交関係式)}; \tag{4.31}$$

すなわち $$\sum_{l=0}^{\rho-1} m_l\, \nu'_{il} \nu_{kl} = n\, \delta_{ik} \qquad (i,k = 1,\ldots,\rho)\,, \tag{4.32}$$

i.e. $$\sum_{l=0}^{\rho-1} m_l f_i(S_l^{-1}) f_k(S_l) = n\delta_{ik} \;\; (i,k = 1,\ldots,\rho), \tag{4.33}$$

留意：　ミスを修正した (4.27) 式に留意せよ（珍しくて重要）!!!

§5：

注目の数論的結論　$(\dim f_k)\,\big|\, n,\ n = |G|,$ が上の直交関係式を用いて導かれている.

結論 3（既約表現の次元は G の位数の約数）：

（証明）　S_0 は単位元なので，$f_k(S_0) = \nu_{k0}$ は指標 f_k を持つ既約表現の次元 $\nu_k = \dim f_k$ である．証明には，当方 (平井) が命題の形に書いた次を示す.

命題 5.1. 各 $l = 0, 1, \ldots, \rho - 1,$ に対し，　$m_l\, \nu_{kl} = m_l f_k(S_l) = \sum_{S_p \sim S_l} f_k(S_p)$ が $\nu_k = \dim f_k$ で割り切れる．ここに，$m_l :=$ ‘S_l の共役類の位数’.

命題の証明： $\Omega(v,u)$ の v を $v' = wv$ で置き換えて，w と v に関する $\Omega(wv,u)$ の Discriminate (判別式) $\Delta(\Omega)$ を求める．これは，$u_0,\ldots,u_{n-1}$ に関する n 次の函数である．ただし，行列 $A = (a_{ij})$ で決まる 2 次形式の判別式とは行列式 $|A|$ のことである．まず,

$$\Omega(v,u) = f_1(v)f_1(u) + f_2(v)f_2(u) + \cdots + f_\rho(v)f_\rho(u). \tag{4.34}$$

そこで，既約指標 $f_1(v)$ に付随した既約表現の行列表示を $\big(b_{ij}(v)\big)$ とすると,

$$b_{ij}(v') = \sum_h b_{ih}(w) b_{hj}(v) \quad (i,h,j = 1,\ldots,\nu_1)$$

従って,

$$f_1(v') = \sum_i b_{ii}(v') = \sum_{i,h} b_{ih}(w) b_{hi}(v) \quad (i,h = 1,\ldots,\nu_1).$$

そして，$f_2(v'),\ldots,f_\rho(v')$ でも同様であり，w と v の 2 次形式としての $\Omega(v',u)$ の判別式 $\Delta(\Omega)$ は，ρ 個の各項の判別式の積であるから,

$$\Delta(\Omega) = \text{const.}\, f_1(u)^{\nu_1}\, f_2(u)^{\nu_2} \cdots f_\rho(u)^{\nu_\rho}. \tag{4.35}$$

他方，$\Omega(v,u) = \sum_l n_l C'_l(v) C_l(u)$ であるから,

$$\Omega(v',u) = \sum_{l=0}^{\rho-1} n_l\, C'_l(v') C_l(u) = \sum_{l=0}^{\rho-1} \gamma_l\, C'_l(v'), \tag{4.36}$$

ここに，$\gamma_l := n_l C_l(u)$，とくに，$\gamma_0 = n_0 C_0(u) = n\, u_0$.

$v' = wv$ は w_k, v_j につき整係数なので，w, v の 2 次形式としての $\Omega(v', u)$ の判別式は $\gamma_0, \ldots, \gamma_{\rho-1}$ につき整係数多項式である．その γ_0^n の係数を求めよう．それは $C_0'(v') = C_0'(wv)$ の判別式に他ならない．

$C_l'(v) := \sum_{S_p \sim S_l^{-1}} v_p$ であるから，

$$C_0'(v') = v_0' = w_0 v_0 + w_1 v_{1'} + \cdots + w_{n-1} v_{(n-1)'},$$

ここに，$v_{l'}$ は $S_l^{-1} = S_{l'}$ の係数である:

$$v = \sum_l v_l\, S_l = \sum_l v_{l'}\, S_l^{-1}.$$

(1) $S_l^{-1} = S_l$ のときには，$l' = l$ で，$w_l v_{l'} = w_{l'} v_l$;

(2) $S_l^{-1} \neq S_l$ のときには，$l' \neq l$ で，$w_l v_{l'} + w_{l'} v_l$ がペアになる;

従って，2 次形式 $C_0'(v') = C_0'(wv)$ の判別式は，(2) のペアの個数が偶数のときは $+1$，奇数のときには -1，である．よって，γ_0^n の係数は ± 1 である．

さて，γ_0 に対する方程式

$$\Delta(\Omega) = 0$$

を考えると，整係数で，最高次の係数が 1 である．従って，よく知られている定理によって，この方程式の根は代数的整数である．

一方，(4.35) 式を見ると，$\Delta(\Omega)$ は $f_1(u), \ldots, f_\rho(u)$ に比例する 1 次式

$$\begin{cases} \gamma_0 + \mu_{11}\gamma_1 + \cdots + \mu_{1,\rho-1}\gamma_{\rho-1}\,, \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \gamma_0 + \mu_{\rho 1}\gamma_1 + \cdots + \mu_{\rho,\rho-1}\gamma_{\rho-1}\,, \end{cases} \tag{4.37}$$

の冪の積になっている．これらの 1 次式の係数は，代数的整数である．

解説 (平井)： (4.37) の一次式に於いて，$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{\rho-1}$ は独立変数と思える．そこで，各 $i = 1, 2, \ldots, \rho-1$ に対して，

$$\gamma_i = 1,\ \gamma_j = 0\ (j \neq i), \quad \text{or} \quad \gamma_k = \delta_{ik}, \tag{4.38}$$

とおけば，

$$\Delta(\Omega)\big|_{\text{at } (4.38)} = \prod_{1 \le p \le \rho} (\gamma_0 + \mu_{pi})$$

となるので，$-\mu_{1i}, -\mu_{2i}, \ldots, -\mu_{\rho,i}$ は，この方程式の根として代数的整数である． (終)

そこで，§4 の (4.22)–(4.23) 式から，

$$\begin{aligned} f_i(u) &= \nu_{i0}\, u_0 + \nu_{i1}\, u_1 + \cdots + \nu_{i,n-1}\, u_{n-1} \\ &= \nu_{i0}\, C_0(u) + \nu_{i1}\, C_1(u) + \cdots + \nu_{i,\sigma-1}\, C_{\sigma-1}(u) \end{aligned} \tag{4.39}$$

ここに，$n_{k,l} := \sharp\{S_s\,;\ S_k^{-1} = S_s S_l S_s^{-1}\}$. ゆえに

$$\frac{\mu_{il}\, n_l}{n} = \frac{\nu_{il}}{\nu_{i0}} \qquad \therefore \quad \frac{\mu_{il}}{m_l} = \frac{\nu_{il}}{\dim f_i} \qquad \therefore \quad (\dim f_i) \cdot \mu_{il} = m_l \cdot \nu_{il}\,.$$

ここで，μ_{il} は代数的整数かつ有理数，ゆえに整数である．よって，$m_l \cdot \nu_{il}$ は $\dim f_i$ で割り切れる．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**（命題 4.1 証明終わり）**

（注目）： $\nu_{il} = f_i(S_l)$ は $(\dim f_i) \cdot \dfrac{\text{integer}}{m_l}$ の形．　□

また，(4.32) 式は

$$\sum_{l=0}^{\rho-1} m_l\, \nu'_{kl}\nu_{il} = n\, \delta_{ki} \qquad (i, k = 1, \ldots, \rho).$$

ゆえに，

$$(\dim f_i)\Big(\sum_l \nu'_{kl}\mu_{il}\Big) = n\, \delta_{ki} \qquad (i, k = 1, \ldots, \rho).$$

ここで，$k = i$ と置く．$\sum_l \nu'_{il}\mu_{il}$ が整数（？）ならば，$(\dim f_i)|n$ が分かる．
（結論 3 の証明終わり）

（論文 [M3], [M4] に対する感想）

1．Molien のアイデアの重要部分は，両側正則表現（我々の記号では $\mathcal{L}\cdot\mathcal{R}$）とその指標 $\Omega(u,v) = \mathrm{tr}\big(\mathcal{L}(u)\mathcal{R}(v)\big)$ を持ち出して，十二分に利用したことである．そのもとになっているのは (3.6) の内積 $\langle u, v\rangle = \mathrm{tr}\big(\mathcal{L}(u)\mathcal{L}(v)\big)$ であり，論文 [M1] における内積 $\langle u, v\rangle_g = \mathrm{tr}\big(\rho(u)\rho(v)\big)$ につながるものである．これは今日よく使われる $\ell^2(G)$ 上の ℓ^2-norm とは，異なっている．しかし，Molien の内積は十分にうまく機能して，初期表現論の主要な結果（上の 結論 1 ～結論 3）をすべて導き出した．

その中で，私が強調したいのは，結論 3「既約表現の次元は群の位数を割る」が Frobenius や Schur と全く異なる方法で示されたことである．さらに，命題 4.1 は全く新しい．

2．「$\dim f_k$ が $n = |G|$ を割る」すなわち「既約表現の次元は群の位数を割る」ことの証明はとくに興味を持っている．さきに Frobenius による [F54, §12] での証明を読んだが，数論的素養が無ければ難しくて理解できない．また，後年の Schur [S7, 1905] による証明も読んだが，これも数論的素養が無い私にはよく理解できなかった．

それに比して，ここでの Molien の証明に必要な数論的知識は代数的整数に関する基本だけである．この証明には 1 点 疑問が（上の ？印）あるが，再構成してみたいと思う．

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[M5] *Über die invarianten der linearen Substitutionensgruppe*, 1897 Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, **52**(1898), 1152–1156.

非常にコンパクトに書いてあって，なかなか読みにくい．重要な結果で，面白い例も書いてあるが，自分で咀嚼するには時間が足りない．website から，関連するコメントを引用しておく．

[From http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Molin.html]

········· He studied how many times a given irreducible representation of a finite group appears in a complete reduction of the representation of the group on the vector space of homogeneous polynomials of degree n over the complex numbers. He gave a generating function to compute the number of times the irreducible character occurs in 1898.

[From 'Molien series', Wikipedia]

In mathematics, a Molien series is a generating function attached to a linear representation ρ of a group G on a finite-dimensional vector space V. It counts the homogeneous polynomials of a given total degree d that are invariants for G. It is named for Theodor Molien.

More formally, there is a vector space of such polynomials, for each given value of $d = 0, 1, 2, \ldots$, and we write n_d for its vector space dimension, or in other words the number of linearly independent invariants of a given degree. In more algebraic terms, take the d-th symmetric power of V, and the representation of G on it arising from ρ. The invariants form the subspaces fixed by all elements of G, and n_d is its dimension.

The Molien series is then by definition the formal power series

$$M(t) = \sum_d n_d t^d$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[M6] *Über gewisse transzendente Gleichungen*, Math. Ann., **103**(1930), 35-37.
（省略）

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

•• Theodor Georg Andreas Molien (= Fedor Eduardovich Molin) (1861–1941) の論文リスト

[M0] *Ueber die lineare Transformation der elliptischen Funktionen*, eine zur Erlangung des Grades eines Magisters der Mathematik der physico-mathematischen Facultät der Kaiserlichen Universität Dorpat (master's thesis), Tartu, 1885, 23 pp.

[M1] *Ueber Systeme höherer complexer Zahlen*, Math. Ann., **41**(1892), 83–156.
[eine behufs Erlangung des Grades eines Doctors der reinen Mathematik der physico-mathematischen Facultät der Kaiserlichen Universität Dorpat (dissertation), Tartu, 1892.]

[M2] *Berichtigung zu dem Aufsatze „Ueber Systeme höherer complexer Zahlen"*, Math. Ann., **42**(1893), 308–312.

[M3] *Eine Bemerkung zur Theorie der homogenen Substitutionsgruppen*, 1896 Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Geselschaft, **11**(1897), 259–274.

[M4] *Ueber die Anzahl der Variabeln einer irreductibelen Substitutionsgruppe*, 1896 Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft, **11**(1897), 277–288.

[M5] *Über die invarianten der linearen Substitutionsgruppe*, 1897 Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, **52**(1898), 1152–1156.
(Vorgelegt von Hrn. Frobenius)

[M6] *Über gewisse transzendente Gleichungen*, Math. Ann., **103**(1930), 35-37.

•• 文　献：

[平井1] 群の表現の指標について（経験よりの管見），第 12 回数学史シンポジュウム，津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**23**(2002), pp.84-94.

[平井2] 対称群の指標に関する Frobenius, Schur の仕事，ibid., **24**(2003), pp.53-58.

[平井3] Schur の学位論文および対称群の表現，ibid., **25**(2004), pp.123-131.

[平井4] Frobenius による「群の指標と表現」の研究，ibid., **26**(2005), pp.222-240.

[平井5] Frobenius による「群の指標と表現」の研究（その2），ibid., **27**(2006), pp.168-182.

[平井6] Frobenius による「群の指標と表現」の研究（その3），ibid., **28**(2007), pp.290-318.

[平井7] Frobenius による「群の指標と表現」の研究（その4），ibid., **29**(2008), pp.168-182.

[平井8] Schur の表現論の仕事（射影表現3部作）その I, ibid., **30**(2009), pp.104-132.

[平井9] 数学者から数学者へ／フロベニウス,『数学セミナー』2009, 1 月号, pp.6-7.

[平井10] 数学者から数学者へ／シューア,『数学セミナー』2009, 2 月号, pp.6-7.

[平井11] Schur の表現論の仕事（射影表現3部作）その II, 第 20 回数学史シンポジュウム，津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**31**(2010), pp.74-82.

線形表現と指標の創生期の論文のリスト

•• Ferdinand Georg Frobenius の群の指標と線形表現に関する論文：

[F51] Ferdinand Georg Frobenius, *Über vertauschbare Matrizen,* Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 601–614(1896).

【注】これは C 上の多元環の話だが，[F53] に本質的に応用された．

[F53] *Über Gruppencharaktere*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 985–1021(1896).

[F54] *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1343–1382(1896).

[F56] *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 944–1015(1897).

[F59] *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen II*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 482–500(1899).

[F60] *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 516–534(1900).

[F61] *Über die Charaktere der alternirenden Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 303–315(1901).

[F68] *Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 328–358(1903).

•• Frobenius [F53], [F54] に関連する Burnside の2論文 [B1], [B2] ほか

[B1] Willian Burnside, *On the continuous group that is defined by any given group of finite order, I,* Proc. London Math. Soc., Vol.**XXIX**(1898), 207-224.

[B2] Willian Burnside, *On the continuous group that is defined by any given group of finite order, II,* Proc. London Math. Soc., Vol.**XXIX**(1898), 546-565.

[B3] *On the reduction of a group of homogeneous linear substitutions of finite order*, Acta Math., **28**(1904), 369-387.

[B4] *On the representation of a group of finite order as an irreducible group of linear substitu-*

tions and the direct establishment of the relations between the group-characteristics, Proceedings London Math. Soc. (2), **1**(1904), 117-123.

[**Y1**] A. Young, *On quantitative substitutional analysis,* Proceedings London Math. Soc., **33**(1901), 97–146.

[**Y2**] A. Young, *On quantitative substitutional analysis* (second paper), Proceedings London Math. Soc., **34**(1902), 361–397.

•• シュアーの表現論関連の論文（初期のもの）：　全集第 I 巻

[**S1**] J. Schur, *Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen* (Inaugural-Dissertation), 1901, Berlin, Reprinted in *Gesammelte Abhandlungen*, Band I, pp.1–71.

[**S4**] J. Schur, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* J. für die reine und angewante Mathematik, **127**(1904), 20–50.

[**S6**] J. Schur, *Über eine Klasse von endlichen Gruppen linearer Substitutionen,* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1905, Physikalisch-Mathematische Klasse, 77–91.

[**S7**] J. Schur, *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere,* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1905, Physikalisch-Mathematische Klasse, 406–432.

[**S9**] J. Schur, *Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen lineare Substitutionen,* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1906, Physikalisch-Mathematische Klasse, 164–184.

[参　考　文　献]

[**Haw**] Thomas Hawkins, *Emergence of the Theory of Lie Groups,* An Essay in the History of Mathmatics 1869–1926, Springer, 2000.

[**岩堀**] 岩堀長慶「対称群と一般線型群の表現論：既約指標・Young 図形とテンソル空間の分解」岩波講座基礎数学，1978

関連する URL：

1) MathSciNet MR838300 (87m:01070)
2) http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Molin.html
3) http://www.utlib.ee/ekolleckt/vanadisser/biblio/molien.pdf
4) Theodor Molien - Wikipedia, the free encyclopedia
5) Molien series - Wikipedia, the free encyclopedia
6) http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/asna.18831052302/abstract