H . Weyl の invariant theory と　Repsentation theory of continuous groups(III)
麻生泰弘 (2010.　12.　28)　　e-mail: yasu@gakushikai.jp

この考察は　(I) (第 19 回数学史シンポジューム、２００８)　及び
(II)　(第 20 回数学史シンポジューム、２００９) に　続く論考である。

第 1 講では、1) "Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik", Math.Zeitschrift 20, 1924, 131 - 150 により、
Capelli identity の Weyl　による再 formulation 及び　それを用いた
SL(n), O(n), Sp(2n) の　fundamental invariants の決定

2) "Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen", Sitzungs.Preussiche. Akad. Berlin, 1924, 338 - 345 を検討した。

第 2 講では, 1) A.Hurwitz(1897), "Über der Erzeugung der Invarianten durch Integration", Nachrichten Gessel. Göttingen, 71-90

2) I.Schur(1924), " Nuee Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie I,II,III", Sitsungs Berlin
を検討した。

A.Hurwitz は、"Hurwitz integral" 及び　"unitrary restriction(unitary trick)" を導入し、SL(n,$\mathbb{C}$) の invariants を 検討した。

I.Schur は　Hurwitz integral を用いて、SO(n,$\mathbb{R}$) の　primitiv character の直交関係,
O(n,$\mathbb{R}$) の　character formula, dimensinformula を与え、完全可約性　を示した。

今回は、H.Weyl の

1) "Über die Symmetrie der Tensoren und die Tragweite die symbolishen Methode in die Invarianten theorie", Rendiconti der Circolo Mathematico die Palermo 48(1924), 29-36[GAII,461-467]

2) "Das gruppentheoretisch Fundament der Tensorrechnung", Nachrichten Göttingen, (1924), 218-224[GAII,461 - 467]

及び、再度
3) " Zur Theorie der Darstelung der einfachen kontinuierlichen Gruppe", Sitsungs.Preussischen Berlin(1924), 338 - 345[GAII,451 - 460]
について述べる。

[I] "Über die Symmetrie der Tensoren..."
k を　chacteristic 0, algebraically closed field, V^n を n-dim. k-vector space, $\mathcal{S}_\nu$ を order ν の対称群とする。
rank ν の tensor $f = f(i_1, i_2, \ldots, i_\nu)$ が 任意の $\sigma \in \mathcal{S}_\nu$ に対して

$$f(i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \ldots, i_{\sigma(\nu)}) = f(i_1, i_2, \ldots, i_\nu)$$

をみたすとき、f を　symmetric tensor(of rank ν) と呼ぶ。

tensors $f_1, f_2, \ldots$ の form $I = I(f_1, f_2, \ldots)$ が任意の $\sigma \in \mathcal{S}_\nu$ に対して

$$(\sigma I)(f_1, f_2, \ldots) = I(\sigma f_1, \sigma f_2, \ldots)$$

をみたすとき、I を symmetric form と呼ぶ。 symmetric form I の invariants("tensorinvariant")
に関する "symbolic method" は、 "vector invariant" の問題に帰着することが示される。

"symbolic method" については、(W5)H.Weyl,The Classical Groups, p.20 を、また vector invariants の詳細については、同書 chap.2 を参照。

[II] " Das gruppentheoretische Fundamett ..."
(A) G = SL(n,$\mathbb{C}$), Γ を G の rank ν の tensor による order N の tensor 表現 とする。
Γ が G の 既約表現であるとは、Γ が simple G-module で Γ の components がすべて同一の symmetry-type であるときを云う。
既約な symmetry-type の表現が infinitesimal group(Lie algebra) を用いておこなわれる。
infinitesimal group の elements は行列表示ができる。
(G = SL(n,$\mathbb{C}$) のとき , $\mathcal{G} = sl_n$ の元は trace 0 の n 次 正方行列)
É.Cartan は、"すべての既約表現は、infinitesimal group の表現と対応する" ことを示した。
(Bull.Soc. math. de France 41(1913), pp.53)

inequivalent な symmetry-type の既約表現の決定が Young ー Frobenius diagram を用いて行われる。(GAII, pp.462)
positive integer ν の分割 $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k;\ \nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots \geq \nu_k \geq 0$$

が与えられたとき、次のような k 行 - table , 各行の長さは $\nu_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ 列。
p を各行ごとの permutation からなる 対称群 $\mathcal{S}_\nu$ の元、 p が生成する $\mathcal{S}_\nu$ の部分群 を P, q を各列ごとの permutation からなる 対称群 $\mathcal{S}_\nu$ の元, q が生成する $\mathcal{S}_\nu$ の部分群 を Q とする。
$c = \sum_{P,Q} sgn(q) q \cdot p$ を Young symmetrizer と呼ぶ。
Young symmetrizer c はつぎの等式をみたす：

$$c \cdot c = \mu c,\ \mu \in \mathbb{N}$$

Young symmetrizer c は Young table によって一意的に定まる。
$e := c/\mu$ は primitive idempotent であり、primitive idempotent e と irreducible symmetry character とは 1 対 1 対応する。$e \neq e'$ のとき inequivalent。
さて、$\mathcal{S}_\nu$ の conjugate elements の class への配分：

$$\nu = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \cdots + k \cdot p_k$$

, $p_j (j = 1, 2, \ldots)$ は length j の cycle の個数。
$\nu_1 = p_1 + p_2 + \cdots + p_k,\quad \nu_2 = p_2 + p_3 + \cdots,\quad \ldots$
とおくとき、$\nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots > 0,\quad \nu = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k$.

irreducible symmetry character と

$$(*)\quad \nu = 1\cdot p_1 + 2\cdot p_2 + \cdots + n\cdot p_n$$

の解 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ が一意に対応する。

Proposion : 既約な symmetry characters は $\mathcal{S}_\nu$ の conjugate classes への分割に関する (*) の個数だけあり、異なる解に対応する G の表現は、inequivalent である。 G の equivalent な表現は、equivalent な symmetry character と対応する。

以上、 The Classical groups, pp.119 をも参照。

(B) I.Schur は 1901 年の Dissertation で $SL(n,\mathbb{C})$ の すべての多項式表現を与えた (" algebraic metod")。

G の Lie algebra を $\mathcal{G}$ と記す。$G_u := G \cap U(n),\ Lie(G_u) := \mathcal{G}_u$.

("unitary restriction", or "unitary tric"). G_u は compact group である。

$\mathcal{G}$ の N -dim. 表現 を γ とするとき、 S.Lie により γ_u の作用に G_u の表現 Γ_u が対応する。

$G = SL_n$ のとき, G_u は simply connected($\pi_1(G_u) = \{\text{e}\}$).

γ_u(*resp.* γ) は完全可約であり、G_u も完全可約である。

$G = SO_n$ のとき、G_u の不分岐二重被覆群 G_u^* の表現が得られる。

$G = Sp(2\nu)$ ("*Komlexgruppe*)" のとき、$\pi_1(G_u) = \{e\}$.

[III] "Zur Theorie der Darstellung ..."

この論文は、1924 年 11 月 2 8 日 Zürich で書かれている (GAII, p.460)。同様な title の論文 (W4) (GAII, 543 - 647) がある。後者でこの論文が詳述されている。後者を適当に参照する。

１９２４年、I.Schur は "Neue anwendungen..." で $O(n;\mathbb{R})$ を扱った。H.Weyl は、これを古典群へ拡張することを試みた。

É.Cartan は、１９１３年、 "Lie algebra $\mathcal{G}$ の既約表現 V は highest weights ω により一意的に決定され、V の weights π は

$$\pi = \omega - \sum m_i\alpha_i, \quad (\alpha_i : simple\ roots,\ m_i \in \mathbb{N})$$

の形となる " ことを 示した (Bull.Soc.Math.France 41(1913), pp.53)。

Cartan の与えた G の表現の、explicit な表現と次元を得るため、また完全可約性を示すためには、integral method が必要である。

また、Cartan は、$G = SO(n;\mathbb{R})$ のとき、 不分岐二重被覆群 G^* の表現を与えている。

integral method を用いるため、$G_u = G \cap U(n)$ を扱う (" unitary trick")。

(A) $\mathcal{U}$ を unitary 変換群とする。$D := diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon = e^{\sqrt{-1}\phi}$.

任意の unitary 行列 A は、unitay 変換 U により $A = UDU^{-1}$ の形で表される。

$\phi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ を A の回転角 (" die Drehwinkel") と呼ぶ。

U から U + dU へのベクトルは

$$U^{-1}\cdot dU + \sqrt{-1}d\phi = \delta U$$

の形をもつ。$diag(\delta U)=0$ とおく。このとき、これらのベクトルによって生成される平行多面体の volume element は

$$U^{-1}\cdot(A^{-1}dA)\cdot U=(D^{-1}\cdot\delta U\cdot D)-\delta U)+\sqrt{-1}d\phi$$

の形で与えられる。対応する行列は、elements

$$\delta u_{\alpha\beta}(\frac{\varepsilon_\beta}{\varepsilon_\alpha}-1)\ (\alpha\neq\beta),\ \sqrt{-1}d\phi\ (\alpha=\beta)$$

をもつ。よって、 $|dA|$ を A の volume element, $|dU|$ を U の volume element とするとき等式

$$\begin{aligned}|dA|&=|dU|\prod_{i\neq k}(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_i}-1)\prod_i d\phi_i\\&=|dU|\prod_{i<k}|(\varepsilon_k)-\varepsilon i)|^2\prod_i d\phi_i\end{aligned}$$

が得られる。(cf. GAII, p.566)

以下、$c(\phi)=e(\phi)+e(-\phi)$, $s(\phi)=e(\phi)-e(-\phi)$ とおく。$G=(SL_n)_u$, $(Sp_{2\nu})_u$, $(SO_n)_u$ の volume elements を $d\Omega$ とおくとき、

$(SL_n)_u$: のとき

$$d\Omega=H^2d\phi_1d\phi_2\cdots d\phi_n.$$

$$H=\prod_{i<k}(\varepsilon_k-\varepsilon_i)$$

$(Sp_{2\nu})_u$ のとき

$$d\Omega=H^2d\phi_1d\phi_2\cdots d\phi_\nu.$$

$$H=\prod_{i<k}(c(\phi_k)-c(\phi_i))\cdot\prod_k s((\phi_k)$$

$(SO_n)_u$ のとき

$$n=2\nu:d\Omega=H^2d\phi_1d\phi_2\cdots d\phi_\nu.$$

$$H=\prod_{i<k}(c(\phi_k)-c(\phi_i))$$

$$n=2\nu+1:d\Omega=H^2d\phi_1d\phi_2\cdots d\phi_\nu.$$

$$H=\prod_{i<k}(c(\phi_k)-c(\phi_i))\cdot\prod_k s((\phi_k/2)$$

(B) primitive character χ は orthogonality relations

$$\frac{1}{\Omega}\int\chi(\phi)\chi(-\phi)d\phi=1$$

$$\int\chi(\phi)\chi'(-\phi)d\phi=0\ \ (\chi,\chi'\ :inequivalent)$$

を充たし、　$\phi = (\phi_1, \phi_2. \cdots, \phi_n)$ に関して　symmetric。

他方, $H = \prod_{i<k}(\varepsilon_k - \varepsilon_i)$　は skewsymmetric.　よって、 $H \cdot \chi$ は skewsymmetric。　skewsymmetric ξ, $\xi = H \cdot \chi$　を次のように定める。

$$\xi = \xi(l_1, l_2, \cdots, l_n),\ l_j \in \mathbb{Z}$$
$$l_1 = 0 < l_2 < \cdots < l_n$$
$$\xi := det(e(l_1\phi), e(l_2\phi), \cdots e(l_n\phi))$$

このとき、　$H = \xi(0, 1, \cdots, n-1)$ となる。
いま、　χ^* を

$$\chi^* := \frac{\xi(l_1, l_2, \cdots, l_n)}{H}$$

とおく。 xi^{ast} は orthoganality relations を充たし、　さらに

$$\frac{1}{\Omega}\int \chi^*(\phi)\chi^*(-\phi)|H|^2 d\phi_1 d\phi_2 \cdots d\phi_n = \frac{1}{\Omega} \cdot n!(2\pi)^{n-1}$$

が充たされる。　$\chi^* = \chi$。
さて、 χ^* の Fourier 級数展開における highest term は

$$e(m_1\phi_1 + m_2\phi_2 + \cdots + m_n\phi_n) = \varepsilon_1^{m_1} \cdots \varepsilon_n^{m_n}$$
$$m_k = l_k - 1$$
$$m_1 = 0 <= m_2 \cdots <= m_n$$

$m = (m_1, m_2, \cdots, m_n)$ を　χ^* の　"die Höhe" と呼ぶ。
次に、 χ_m^* を

$$\chi_m^* := \frac{\xi(0, l_2 - 2, \cdots l_n - n)}{\xi(0, 1, \cdots, n-1)}$$

χ_m^* は、$(SL_n)_[u$ の既約表現の highest weght character　である。

$$dimN_m = \frac{\prod_{i<k}(l_k - l_i)}{\prod_{i<k}(k-i)}$$

(cf.GAII, pp.567 - 571)

$G = Sp_{2\nu}(resp.(Sp_{2\nu})_u)$ のとき、

$$\chi = \frac{det(s(l_1\phi), \cdots, s(l_\nu\phi))}{det(s(\phi)), s(2\nu), \cdots, s(\nu\phi))}$$

$m_k = l_k - k (k = 1, 2, \cdots, \nu)$.

$$dim.N = \frac{P(l_1, \cdots, l_\nu)}{P(1, 2, \cdots, \nu)}$$

$G = SO_{2\nu+1}$ のとき、

$$\xi(l_1, l_2, \cdots, l_{nu}) = det(s(l_1\phi), s(l_2\phi), \cdots, s(l_\nu\phi))$$
$$\chi = \frac{\xi(l_1, l_2, \cdots, l_\nu)}{\xi(1/2, 3/2, \cdots, (2\nu) - 1)/2)}$$

$$0 < l_1 < l_2 < \cdots < l_\nu; \quad m_k = l_k - k + 1/2$$

χ は、既約二価表現の　character である。

$$dim.N = \frac{P(l_1, l_2, \cdots, l_\nu)}{P(1/2, 3/2, \cdots, (2\nu - 1)/2)}$$

(C) $G : semi-simplegroup, ; \mathcal{G} = Lie(G), ; rank(\mathcal{G}) = h, ; order(\mathcal{G}) = R$ とする。

更に、$\mathcal{H}$ を　Cartan subalgebra,　$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ を simple roots とする。

この時、任意の roots $\omega \in R - h = \Omega$ は

$$\omega = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \cdots + n_k\alpha_k, \quad n_k \in \mathbb{Z}$$

と表される。　$n_k \in \mathbb{N}$ のとき、　ω を　positiv roots と呼ぶ。

次に、 roots space の　involutive transformation $S_\omega(symmetry\ re\ \omega \in \Omega = R - h)$ を

$$S_\omega(\alpha_i) := \alpha_i - 2(\alpha_i, \omega)/(\omega, \omega) \cdot \omega$$

で定義する。　(cf. $\acute{E}.Cartan$(1913))

$$a_i = -2(\alpha_i, \omega)/(\omega, \omega) \in \mathbb{Z},$$
$$\Delta_\omega(\alpha_i) := S_\omega(\alpha_i) - \alpha_i = a_i \cdot \omega$$
$$S_\omega(\omega) = -\omega$$

S_ω は　有限群　W を生成する。　今日、　群　W は、Weyl 群　と呼ばれる。

roots space Ω　の　volume element $d\Omega$ は、

$$d\Omega = \prod_{\omega \in \Omega} (e^\omega - 1) \cdot d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots d\alpha_h$$

$\underline{Proposition}$: S_{α_i} は　$potiveroots \neq \alpha_i$ の　permutation.

$$\rho := \frac{1}{2} \sum_{\omega > 0} \omega$$
$$D := \prod_{\omega > 0} (e^{\omega/2} - e^{-\omega/2})$$

この時、

$$D = \sum_{w \in W} sgn(w) e^{w\rho}, \quad d\Omega = D^2 \cdot \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_h$$

となる。

さて、任意の　$primitivcharacter \chi$ は

$$e(\Phi), \quad \Phi = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_h\alpha_h$$

の　線形結合　である。$l_k \in \mathbb{N}$　のとき、Φ は、　$"weight"(\acute{E}.Cartan)$ である。

$l_k, (m = 1, 2, \cdots, h) \in \mathbb{Q}$ を次のようにえらぶ；

1) $\Delta_\omega(\Phi) = \sum_{1<=k<=h} l_k \Delta_\omega(\alpha_k)$
2) $\Delta_\omega(\Phi) = \omega \cdot sum_{1 \leq k \leq h} l_k a_k$ において　$\sum_{1<=k<=h} l_k a_k \in \mathbb{Z}$
3) χ は　W - invariant.

この時、$\xi = \xi(l_1, l_2, \cdots, l_h) = \sum_{w \in W} sgn(w) e(w\Phi)$ を

$$D \cdot \chi = \xi$$

を充たすよう定める。

ϕ が　orthogonaliity relations を充たすとき、

$$\chi = \frac{\sum_{w \in W} sgn(w) e(w\Phi)}{D}$$

$$\chi = \frac{\sum_{w \in W} sgn(w) e(w(\Phi_m + \rho))}{D}$$

$\rho = r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_h\alpha_h$　とおいて、

$m_k = l_k - r_k \ (k = 1, \cdots, h)$,　$\Phi = m_1\alpha_1 + \cdots + m_h\alpha_h + \rho$

$(m = (m_1, m_2, \cdots, m_h)$ は、　既約表現　π_m の、　highest weght である。

既約表現　π_m　の　chracter formula と　dimension formula は次のようになる。

$$\Phi_m = m_1\alpha_1 + \cdots + m_h\alpha_h$$

$$character(\chi_m) = \sum_{w \in W} \frac{sgn(w) e(w\Phi_m)}{D}$$

$$dim.(\pi_m) = \prod_{\alpha > 0} \frac{(m + \rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)}$$

((注　1))　[[完全可約性]] について

$GL(\mathcal{G})$ の smallest algebraic subgroup $Ad(\mathcal{G})$　が $Lie(Ad(\mathcal{G})) = ad(\mathcal{G})$　をみたすとき、$Ad(\mathcal{G})$　を $\mathcal{G}$ の $"adointgroup"$ とよぶ。

unitary restriction の下に、　$Ad(\mathcal{G}) - invariant$ な Hermite form をもちいて、完全可約性が示される。

(cf. I.Schur, "Neue Anwendungen I", 1924)

((注 2))　[[完備性 comletenes について]] (GAII, pp.640 - 642) (cf.　Peter - Weyl , 1927)

(w4) Chap4, Paragrah 4 , *Über* der Konstruction aller irreduziblen Darstellungen　で以下のことが証明されている。

Theorem6 任意の　integral - valued linear form Ψ は、highest weight Ψ をもつ既約表現をあたえる。

Theorem 6a primitiv character は, $\mathcal{G}_u$ *class−functions* の *complete orthogonal system* である。

[[文献]]

(W1) H.Weyl(1924), "Über die Symmettrie der Tensoren und die Tragweite der symbolishen Metode in der Invariantentheorie", Rendicondi der Circolo Math. Palermo 48, 29 - 36(GAII, 468 -475)

(W2) H.Weyl)(1924), "Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechinung", Nachrichten Göttingen", 218 - 224(GAII, 461 - 467)

(W3) H.Weyl(1924), " Zur Theorie der Darstellungen der einfachen kontinuierlichen Gruppen.(Aus einem Schreiben an Herrn I. Schur)", Sitzungsbereichte Preussischen Akad. Berlin, 338 -345(GAII, 453 -460)

(W4) H.Weyl(1925 - 1926), "Theorie der Darstellung kontinuierlichen halpeinfachen Gruppen durch lineare Transformationen, I, II, III und Nachtrag", Mathematische Zeitschrift 23, 271 -306, ibid 24, 328 -395, 789 -791 (GAII, 543 - 647)

(PW) F.Peter and H.Weyl(1927), " Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen konnuierlichen Gruppe," Mathematische Annalen 97, 737 -755(GAIII, 58 -75)

(Sc) I.Schur(1924)," Neue Anwndungen der Intgralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie", Sitsungsberichte Preussisischen AKad. Berlin, 189 - 208, 297 -321, 346 -355

(Ca)É. Cartan(1913), "Les Groupes projectifs qui ne lassaent invariante aucune multiplicite plane," Bull. SMF, tome 41, 53 - 96

(W) H.Weyl, The Classical Group, Princeton University Press, 1946

(JPS) Jean - Piere Serre, Algèbre de Lie semi - simples complexes, Benjamin, 1966

(TH) Thomas Hawkins, Emergence of The Theory of Lie Groups, Springer, 2000

(AB) Armand Borel, Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups, History of Mathematics, vol.21, AMS, 2001

(CP) Claude Procesi, Lie Groups, An Appoach through Invariants and Repsentations, Springer, 2005

(TY) P.Trauvel, R.W.T.Yu, Lie Algebras and Algebraic Groups, Springer, 2005