Minkowski　数の幾何学

今野秀二

ミンコウスキー (Hermann Minkowski) は 1864 年ロシアに生まれたが，1872 年 8 歳のとき両親とともにドイツのケーニスベルグに移り住み、そこのギムナジュウムに入学した．そして 1880 年，わずか 16 歳でケーニスベルグ大学に入学している．この大学でミンコウスキーはヒルベルトに出会い，さらに 1884 年にはこの大学の師としてやってきたフルヴィッツにも出会っている．ヒルベルトはミンコウスキーより 2 歳上だが学年は半年下，フルヴィッツはヒルベルトより 3 歳上であった．ヒルベルト，フルヴィッツ，ミンコウスキーの出会いはこんなふうにして始まり，生涯にわたり固い友情で結ばれることになった．

1881 年パリ科学アカデミーは「自然数を 5 つの平方和に分解せよ」という懸賞問題を出した．ところが，これについては 1867 年にヘンリー　スミスが既に解いていて，それとは知らずに懸賞問題にしたのである．当時１８歳であったミンコウスキーもそれとは知らず，これを一般の 2 次形式理論の問題として解答しパリアカデミーに提出した．結局 1883 年ミンコウスキーはスミスと受賞の栄誉を分かち合うことになったが，この研究はまた彼の学位論文の基にもなっている．

ミンコウスキーはケーニスベルグ大学では 5 学期を，ベルリン大学では 3 学期を過ごしたが，ベルリン大学では クンマー, クロネッカー，ワイヤストラス, ヘルムホルツ, キルヒホッフ の講義を聞いている．その後ケーニスベルグ大学で学位を取り 1887 年にボン大学の講師に就く，そして 1889 年にはケーニスベルグ大学に移り， 1891 年にはチューリッヒ工科大学に移っている．チューリッヒではフルヴィッツと再び一緒になり，またアインシュタインが彼の講義に出席していたと伝えられている．後 1905 年にアインシュタインが特殊相対性理論を発表すると，1907 年にミンコウスキーはローレンツおよびアインシュタインの理論について，彼自身の立場から，その数学的定式化の論文を書いている（Minkowski 全集 II p.353 参照）．こんなこともあってかミンコウスキーはアインシュタインの理論を一番最初に認めた人とと言われている．ミンコウスキーは 1902 年ヒルベルトとともにクラインによりゲッチンゲン大学に招かれたが 1909 年わずか 44 歳で世を去っている．１９０３年ころからミンコウスキー，フルヴィッツ，ヒルベルトは毎週水曜日の午後 3 時丁度にゲッチンゲンのある場所で落ち合い，散歩をしながら数学の研究成果について話をしてき

たが，ミンコウスキーは死の一週間前にも物理の研究を活き活きと語っていたと，これはヒルベルトの証言である．ミンコウスキーは彼の研究スタイルについてヂリクレが手本であったとも語っている．

ミンコウスキーの業績を全集で見ると，２次形式，数の幾何学，幾何学および物理学といったテーマで分類されていて，数の幾何学に関するページ数が圧倒的に多い．ヒルベルト はミンコウスキーの（すばらしい）業績紹介のなかで，数の幾何学が彼の最も創造的な領域であったと述べているが，それらは彼の２次形式の研究とエルミートの研究が出発点になっている．格子，凸体といった幾何的な対象についての研究から，その成果を応用してヂオファンタス近似，連分数の研究へと発展して行くのだが，後者は今回は取り上げていないことをお断りしておく．この報告では数の幾何に関する最初の論文 [M1] と最後の論文 [M2] および著書「数の幾何学」[M3] の一部を紹介する．[M1], [M2] では２次形式の整数論と数の幾何との深い結びつきがテーマであるが， [M3] ではそれらを公理的にとらえて，一般化しいろいろな問題にアプローチしている．最後に，この紹介は彼の全集に基づくものだが，ヒルベルトによるすばらしい序文は大きな助けとなった．

文献 [M1] Uber die positiven quadratischen Formen und uber kettenbruchahnliche Algorithmen. (1891). [M2] Diskontinuitatsbereich fur arithmetische Aquivarenz. (1905). [M3] Geometrie der Zahlen. (1896).

[M1]-1 ミンコウスキーに従って，実数係数の正定値２次形式は

$$f(x) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = {}^t xAx, \quad A = (a_{ij}),\ a_{ij} = a_{ji}, \quad x = {}^t(x_1, \cdots, x_n) \qquad (1)$$

などと書くことにする．まず，対称行列 A は適当な行列 B をとって $A = {}^tBB$ と書けるから，$\xi = {}^t(\xi_1, \cdots, \xi_n) = B \cdot x$ とおくと，$f(x)$ は

$$f(x) = \sum_i \xi_i^2$$

と表せる．

以下 $\mathbf{R}^n = \{x = {}^t(x_1, \cdots, x_n) \mid x_j \in \mathbf{R}\}$ とし， $\mathbf{R}^n$ の基本ベクトルを $\{e_j\}$ とする．すなわち $e_j \in \mathbf{R}^n$ は第 j 行のみ 1 で他は 0 の列ベクトルとする．また $\mathfrak{R}^n = \{\xi = {}^t(\xi_1, \cdots, \xi_n) \mid \xi_j \in \mathbf{R}\}$ と書き， $x \to \xi = B \cdot x$ を $\mathbf{R}^n$ から $\mathfrak{R}^n$ への線形写像と考える．この写像で e_i が p_i に移ったとすれば， 格子 $L = \mathbf{Z}^n = \sum_i e_i\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}^n$ は $\mathfrak{R}^n$ の格子 $\Lambda = \sum_i p_i\mathbf{Z}$ に移り，以下のことが分かる．

(a) $\sqrt{f(x)}$ は $\mathfrak{R}^n$ では原点から点 ξ までのユークリッド距離になる．

(b)　$\mathbf{R}^n$ の単位立方体は $\mathfrak{R}^n$ では $\{p_i\}$ の作る n 次元平行体に移り，その体積は $(\det A)^{1/2}$ で，これはまた $\mathfrak{R}^n/\Lambda$ の（基本領域の）体積になっている．

(c)　点 p_i から $\{p_1, \cdots, p_{i-1}, p_{i+1}, \cdots, p_n\}$ で張られる超平面への垂線の長さは $h_i = \sqrt{(\det A)/(\det A_{ii})}$ となる．ここで A_{ii} は A から i 行 i 列を取り去った行列である．

[**M1**]-2　(1) の2次形式 $f(x)$ に対して以後 $\det f = \det A$ と書くことにする．またこの f に対して $M(f)$ を

$$M = M(f) = \min_{0 \neq x \in L} f(x) \tag{2}$$

と定義する．このとき $\sqrt{M(f)}$ は格子 $\Lambda \subset \mathfrak{R}^n$ の2格子点間の最短距離（ユークリッド的）であることに注意しておく．

n 次元空間 $\mathfrak{R}^n$ で，原点を中心とし一辺の長さが $\sqrt{M}/\sqrt{n}$ の n 次元立方体を考えると，中心（原点）から各頂点までの距離は $\sqrt{M}/2$ である．

そこで，任意の $l \in \Lambda$ に対して，この n 次元立方体を点 $l \in \Lambda$ まで（向きを変えずに）平行移動する．この操作をすべての $l \in \Lambda$ に対して実行し $l \in \Lambda$ を中心とする n 次元立方体を無数に並べ尽くす．このとき M の定義から各立方体は高々境界点でしか交わらず，どの立方体にも含まれない点があるから，その体積は $(\det A)^{1/2}$ より小さい．これから次の不等式を出している．

$$M < n \cdot \sqrt[n]{\det f} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{M}{\sqrt[n]{\det f}} < n. \tag{3}$$

さらに各 $l \in \Lambda$ を中心に半径が $\sqrt{M}/2$ である n 次元球体を並べても同じことが言えるので，立方体の体積はこの球体の体積で置き換えることができる．ここで n 次元単位球体の体積は $\Gamma(1/2)^n/\Gamma(1+n/2)$ であるから

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}\left(\frac{1}{2}\sqrt{M}\right)^n < \sqrt{\det f} \tag{4}$$

を得る．

ここでスターリングの公式を使って (3) の精密化

$$\frac{M}{\sqrt[n]{\det f}} < \frac{2n}{\pi e}\sqrt[n]{n\pi e^{1/3n}} \tag{5}$$

を導いている．

ところで f を動かしたときの最大値

$$\gamma_n = \max_f \left(\frac{M}{\sqrt[n]{\det f}}\right) \tag{6}$$

はエルミート定数であるが，これについて $\gamma_2 = 2/\sqrt{3} = 1.1547$，$\gamma_3 = \sqrt[3]{2} = 1.259921$ などは知られている．これと (5) の右辺（それを c_n とする）を比較すると $c_2 = 1.276135 > \gamma_2$，$c_3 = 1.540095 > \gamma_3$ となっている．

ミンコウスキーはここで応用として，クロネッカーが証明なしに述べていた「n 次代数的数体の判別式は $n > 1$ のとき 1 より大」を証明しているが，あとで取り上げることにする．

ミンコウスキーは [M1] のあと著作 [M3] を，一番最後に論文 [M2] を書いているが，ここでは [M2] を先にしよう．

2次形式が2変数の場合，ガウスはその類数を研究し，またクロネッカーは同値関係を定義して同値類の不変量を考えていた．しかし n 変数の場合，同値類を取り上げたのは恐らくミンコウスキーが一番先ではないだろうか．彼は同値類の中の無数にある2次形式から最良の代表を選ぶという reduction theorey を展開し，それを数の幾何に応用して見せ，さらにこのアイデアを一般化している．

[M2]-1　n 変数正定値2次形式 $f(x) = \sum_{ij} a_{ij}x_ix_j = {}^txAx$ は (1) の通りとする．よく知られているように，ある対角行列 $Q = \mathrm{diag}(q_1, \cdots, q_n)$ と対角成分が 1 の適当な上半3角行列 $C = (c_{ij})$ をとると $A = {}^tCQC$ と表せるから，この C を $C = (c_{ij})$ $(c_{ij} = 0\ (i > j),\ c_{ii} = 1)$ とすれば

$$f(x) = q_1\zeta_1^2 + \cdots + q_n\zeta_n^2, \quad \zeta_i = x_i + c_{ii+1} + \cdots + c_{in}x_n \quad (1 \le i \le n) \qquad (7)$$

となる．この両辺に現れる $x_1^2, \cdots, x_n^2$ の係数を比較して $a_{11} = q_1$，$a_{ii} \ge q_i$ $(i = 2, 3, \cdots)$ が分かり，これから次の不等式を導いている．

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \ge \det f. \qquad (8)$$

[M2]-2　さて2次形式の reduction についてミンコウスキーの考えを再現しよう．

P は n 変数実正定値2次形式 $f(x) = {}^txAx$ の全体とする．P はまた実正定値行列 A の全体と同一視できるから，点 $A = (a_{ij}) \in P$ の座標を (a_{ij}) $(i \le j)$ と見なすことにして P は $\mathbf{R}^{n(n+1)/2}$ の領域と考える．

2次形式 $f(x) = \sum_{ij} a_{ij}x_ix_j$ および $g(x) = \sum_{ij} b_{ij}x_ix_j \in P$ がある j について

$$a_{11} = b_{11}, \cdots, a_{j-1j-1} = b_{j-1j-1},\ a_{jj} > b_{jj}\ (j \le n)$$

であるとき f は g より**高い**（g は f より**低い**）と定義し，$j = 1, \cdots, n$ に関する辞書式順序で P の要素に順序を入れておく．

$f, g \in P$ がある $S \in GL_n(\mathbf{Z})$ について $g(x) = f(S \cdot x)$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ を満たしているとき f と g は**同値**と定義する．そして各同値類から代表 h を選ぶのだが，h として同値類のなかで上の順序に関し一番低いものを選ぶという考えである．ここで $S = (s_{ij})$ について $g(x) = f(S \cdot x)$，$g(x) = \sum b_{ij} x_i x_j$ のとき

$$b_{hh} = f(s_{1h}, s_{2h}, \cdots, s_{nh}) \qquad (h = 1, \cdots, n)$$

であることを注意しておく．

以上の準備のもとで，２次形式 $f = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ が下の条件 (i), (ii) を満たすとき reduced と言う．ただし $f(x) \geq 0$ で正定値とは限らない．

(i)　各 $l \in \{1, \cdots, n\}$ に対し $s^{(l)} = (s_1^{(l)}, \cdots, s_n^{(l)}) \in \mathbf{Z}^n$ は $\{s_l^{(l)}, s_{l+1}^{(l)}, \cdots, s_n^{(l)}\}$ の公約数が 1 となるベクトルを動く．このとき各 $l = 1, \cdots, n$ について a_{ll} は

$$f(s^{(l)}) \geq a_{ll} \qquad \text{for all} \quad s^{(l)}$$

を満たしている．これは f の同値類から一番低いものを取ることを意味している．

(ii) $a_{12} \geq 0$, $a_{23} \geq 0, \cdots$, $a_{n-1n} \geq 0$.

このような reduced form f の全体を B と書くことにする．ここで $f \in B$ は正定値とは限らぬことに注意しよう．B は P の閉包 $\bar{P}$ に含まれている．しかし P の同値類の代表はいつも B の中から取ることができる．

[**M2**]-3　ここで彼は reduced form の性質を調べている．

(a)　まず条件 (1) だが，$n = 2$ の場合 $f(x) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$ に対し，$s^{(1)} = (0, 1)$，$s^{(2)} = (\pm 1, 1)$ をとると

$$a_{11} \geq \pm 2a_{12}, \qquad a_{22} \geq a_{11} \geq 0. \tag{9}$$

これと $\det f = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq (3/4) a_{11} a_{22}$ から $n = 2$ に対する任意の条件 (i) がすべて導かれる．つまり，無限個の条件 (i) は有限個の条件に帰着される．さらに n についての帰納法で (i) がいつも有限条件に帰することを証明している．

(b)　任意の $f \in B$ について，x_h, x_k $(h \leq k)$ 意外の変数を 0 とすれば (9) から

$$\pm 2a_{hk} \leq a_{hh} \ \ (h < k), \qquad 0 \leq a_{11} \leq a_{22} \leq \cdots \leq a_{nn}. \tag{10}$$

例えば $a_{11} = 0$ なら $a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$ だが，これは B の境界（超平面）になっている．

(c)　定義から $f \in B \cap P$ のとき $M(f) = a_{11}$ である．

(d)　$f(x)=\sum a_{ij}x_ix_j \in B$ のとき n にのみ依存する定数 λ_n があり

$$\det f \geq \lambda_n a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}, \qquad \lambda_2 = \frac{3}{4}. \tag{11}$$

ここでエルミート定数の定義に現れる $M(f)/\sqrt[n]{\det f}$ だが，これは f をスカラー倍しても，f を同値な 2 次形式で置き換えても変わらない．従って $f \in B \cap P$ で考えればよい．まず (11) から任意の $f \in B \cap P$ について

$$\frac{M(f)}{\sqrt[n]{\det f}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{\lambda_n}}.$$

論文には λ_n に関する重要な式をいくつか導いているが，その具体的な表示はない．

ここでミンコウスキーは領域 B が境界部分を無視すると $GL_n(\mathbf{Z})$ の P における "基本領域" になっていることを示している．論文には基本領域という考えはあるるのだが，厳密な定義やこれに相当する言葉は見あたらない．ただ，以下の結果を証明している．

(e)　$f \in B$ を $g \in B$ に移す $S \in GL_n(\mathbf{Z})$ は有限個しかない．とくに $f, g \in B \cap P$ なら $S = \pm 1_n$ である．

(f)　領域 $B \subset \mathbf{R}^{n(n+1)/2}$ は $f=0$（原点）を頂点にもつ convex な錐体で，$f=0$ を通る有限個の超平面で囲まれている．$f \in B$ なら任意の $\lambda > 0$ に対し $\lambda f \in B$，また $f, g \in B, 0 < t < 1$ のとき $(1-t)f + tg \in B$ である．

(g)　$\varphi \in B$ が独立な 2 つの reduced form の和で表せないとき φ を Kantenform と定義する．これは φ が B の境界で超平面の交わり，つまり稜線上にあることを意味する (勿論スカラー倍を除いて決まるのだが)．さらに任意の $f \in B$ が正数係数の Kantenform の一次結合で表せることを示している．

[M2]-4　次に，任意の $c > 0$ に対し超曲面 $S(c) = \{f \in P \mid \det f = c\}$ を考えるのだが，$S(c)$ は c を変えても相似な超曲面が現れるので $S(1)$ を考えればよいという．

相異なる $f, g \in S(1)$ を取ると，$0 < t < 1$ なる任意の t について常に $\det((1-t)f + tg) > 1$ となる．従って $S(1)$ は原点側から見て convex な超曲面になっている．

理由は同時対角化して $f = \sum_i \alpha_i x_i^2$, $g = \sum_i \beta_i x_i^2$ と書き $\Delta(t) = \prod_i(\alpha_i + t(\beta_i - \alpha_i))$ とおく．$\Delta(0) = \Delta(1) = 1$ かつ $(\log \Delta(t))'' < 0$ より出る．

[M2]-5　P 上の関数 $f \to M(f)/\sqrt[n]{\det f}$ が $f = f_0$ で極大のとき，f_0 を **extrem** という．この関数は f の同値類にのみ依存するから $f \in B \cap P$ としてよい．

定理　$f_0 \in B \cap P$ が extrem form なら f_0 は Kantenform である.

関数 $M(f)/\sqrt[n]{\det f}$ の極大は領域 B の境界しかも稜線上でしか取らないというのである.

面白い証明なので紹介しておく. f_0 は extrem だが Kantenform でないとする. $a_{11} = M(f_0)$, $c = \det f_0$ として $S(c)$ 上の点 f_0 における接平面を L とする. L は原点からみて曲面 $S(c)$ の外側にある (**M2**-4). 仮定から f_0 は2つの独立な reduced form ϕ, ψ の和になっているから, 原点と ϕ, ψ を結ぶ直線の延長と L との交点をそれぞれ ϕ^*, ψ^* とする. 点 $f \in B$ が ϕ^*, ψ^* を結ぶ線分上を動くとき, $a_{11} = M(f_0)$ は一定だが, $\det f$ は f_0 の近くで増加 (**M2**-4), 従って極大ではない. よって f_0 は Kantenform でなければならない.

[**M2**]-6　次に f が extrem form であるための必要条件を挙げている. $f \in B \cap P$ が Kantenform かつ extrem とすれば, 他の Kantenform $g \in B \cap P$ に対して

$$\frac{1}{n \det f} \sum_{i,j} \frac{\partial \det f}{\partial a_{ij}} b_{ij} > \frac{b_{11}}{a_{11}} \qquad (g(x) = \sum_{ij} b_{ij} x_i x_j) \tag{12}$$

でなければならない. そして以下の例をあげている.

例　$n = 2, 3, 4$ の場合, 以下の対称行列に対応する f は extrem form である.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

これらは何れも $M(f) = 2$ で $\det f$ はそれぞれ $3, 4, 5, 4$ であるから $M(f)/\sqrt[n]{\det f}$ はそれぞれ $2/\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, 2/\sqrt[4]{5}, \sqrt[4]{2}$ となる.

[**M2**]-7　$D > 0$ および十分小さな $\varepsilon > 0$ $(D > \varepsilon)$ に対して

$$B(D) = \{f \in B \mid \det f \leq D\}, \qquad B(D, \varepsilon) = \{f \in B \mid \det f \leq D, a_{11} > \varepsilon\}$$

とおく ($a_{11} > \varepsilon$ なら (10), (11) より $\det f > \lambda_n \varepsilon^n$ に注意). このとき, $B(D)$ の体積積分は広義積分だが $B(D, \varepsilon)$ $\varepsilon \to 0$ から有限なことを示している. この体積は変数変換で $v_n D^{(n+1)/2}$ という形で書けることは明らかである.

次に $\sigma < 1/2$, $\varepsilon \leq 1$, $\varepsilon < G$ と任意の $f \in B \cap P$ に対して

$$\Phi(f) = \sigma \cdot (\det f)^{\frac{1}{n}(\frac{n}{2}+\sigma)} \sum_{x_j} f(x_1, \cdots, x_n)^{-(\frac{n}{2}+\sigma)}. \tag{13}$$

ただし, 和は $x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{Z}$ で $\varepsilon \leq f(x_1, \cdots, x_n) < G$, $(x_1, \cdots, x_n) = 1$ なる組を動く.

いま上の $\varepsilon > 0, \sigma > 0, G > 0$ は

$$\sigma = o(\varepsilon^{n/2})\ (\varepsilon \to 0), \quad (\log G)^{-1} = o(\sigma)\ (\sigma \to 0) \tag{14}$$

を満たしているものとし，この条件下での極限 $\varepsilon, \sigma \to 0, G \to \infty$ を単に lim と書くことにする．

このとき以下の結果を導いている．証明が技術的だが難しくはない．

$$\lim \Phi(f) = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\zeta(n)} \cdot \frac{\Gamma(1/2)^n}{\Gamma(1+n/2)} \tag{15}$$

$$\lim \int_{B(D,\varepsilon)} \Phi(f) da_{11} \cdots da_{nn} = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\zeta(n)} \cdot \frac{\Gamma(1/2)^n}{\Gamma(1+n/2)} D^{(n+1)/2} \tag{16}$$

ここで $\zeta(s)$ はリーマンのゼータ関数である．これから n に関する帰納法を使い領域 $B(1)$ の体積 v_n を求めている．

$$v_n = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{\Gamma(2/2)\Gamma(3/2)\cdots\Gamma(n/2)}{\Gamma(1/2)^{2+\cdots+n}} \cdot \zeta(2)\zeta(3)\cdots\zeta(n) \tag{17}$$

さらに応用として，n 変数整係数，正定値２次形式で $\det f = D$ である f の類数を $H(D)$ とするとき

$$\lim_{D\to\infty} \frac{H(1) + \cdots + H(D)}{D^{(n+1)/2}} = v_n \tag{18}$$

を証明している．

[M3]-1　1896 年ミンコウスキーは数の幾何学の本を書いた [M3]．非常に多くのことが書かれているけれども，ここでは今日ミンコウスキーの定理で引用される結果とその周辺のみ紹介する．ただ，記法はテキストの方に近づけたので，今までの記法とは少し違っている．

L は $\mathbf{R}^n$ の格子とする．ただし $L = \mathbf{Z}^n$ とは限らない．$F(x) = F(x_1, \cdots, x_n)$ は $\mathbf{R}^n$ 上連続な関数で

(a)　$F(x) \geq 0, \qquad F(x) = 0 \iff x = 0$

(b)　$F(tx) = tF(x) \qquad \text{for} \quad t > 0$

(c)　$F(x+y) \leq F(x) + F(y).$

を満たすものとする．

例えば，正定値２次形式 f に対して $F(x) = \sqrt{f(x)}$ はこの条件を満たしている．

このとき $K = \{x \in \mathbf{R}^n \mid F(x) < 1\}$ は原点 O に関し対称，かつ convex である．これについて

定理　K の体積を J とし $2m = \min_{0 \neq x \in L} F(x)$ とすれば

$$m^n \cdot J \leq 1. \tag{19}$$

これは第1主定理だが，その証明は K が原点対称かつ convex であることとヂリクレの定理を使う．

[**M3**]-2　$l \in L$ および $r > 0$ に対し，$K_l(r) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid F(\overrightarrow{lx}) < r\}$ と置くと，$K_l(r)$ は点 l に関し対称かつ convex な領域になる．とくに $K = K_o(1)$ である．

定理　$l \neq l'$ とする．このとき，もし $r \leq m$ なら $K_l(r)$, $K_{l'}(r)$ は内点を共有することはない．$r = m$ の場合 $K_l(r)$, $K_{l'}(r)$ の共有点はもしあればそれは境界点である．

これが第2の主定理になっている．

[**M3**]-3　ミンコウスキーは (19) を2次形式の reduction の方法で以下のように精密化している．ある $m = m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_n$ に対して，次の不等式が成り立つ．

$$m_1 m_2 \cdots m_n \cdot J \leq 1. \tag{20}$$

m_j の取り方は次の通り．$2m_1 = 2m$ とし，$2m_1 = F(a_1)$ なる $a_1 \in L$ を取る．こうして m_{k-1} と $a_{k-1} \in L$ まで求まったなら

$$2m_k = \min_{x_k} F(x_k) \quad (x_k \in L,\ x_k \notin \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{Z} a_i), \qquad 2m_k = F(a_k)$$

として m_k を求め，帰納法による．

M3-4 ミンコウスキーは正値2次形式を距離とみて公理化し，より広範な場合に適用した．その代表的な場合を列挙しておく．

$\nu \geq n$ として実変数 $x_1, \cdots, x_n$ の ν 個の実1次形式を

$$\xi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \qquad x = {}^t(x_1, \cdots, x_n) \qquad (1 \leq \imath \leq \nu)$$

とする．ただし $\mathrm{rank}(\alpha_{ij}) = n$ とする．このとき $F(x) = \max_i |\xi_i(x)|$ は [**M3**]-1 の条件を満たしている．そこで領域

$$D = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |\xi_i(x)| \leq 1, \quad i = 1, 2, \cdots, \nu\}$$

の体積を J とすれば次の定理が得られる．

定理　$0 \neq l \in \mathbf{Z}^n$ で次の不等式を満たすものがある．

$$0 < |\xi_j(l)| \leq \frac{2}{\sqrt[n]{J}} \qquad (1 \leq j \leq \nu). \tag{21}$$

とくに $\nu = n$ のときは $J = \int_D dx_1 \cdots dx_n = 2^n / |\det(\alpha_{ij})|$ となり

$$|\xi_i(l_1, \cdots, l_n)| \leq \sqrt[n]{|\det(\alpha_{ij})|} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{22}$$

を満たす $0 \neq (l_1, \cdots, l_n) \in \mathbf{Z}^n$ がある．

この定理は $\nu = n$ の場合，複素係数の 1 次式についても実係数の場合と同様のことが言える．すなわち

定理　実変数 $x_1, \cdots, x_n$ に関する 1 次形式 ξ_j は，$n = r + 2s$ なる r, s について，$\xi_1, \cdots, \xi_r$ は実係数 1 次形式，他は複素係数 1 次形式で $\xi_{r+s+j} = \bar{\xi}_{r+j}$ $(1 \leq j \leq s)$（複素共役），かつ $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ が独立のとき (22) をみたす $0 \neq (l_1, \cdots, l_n) \in \mathbf{Z}^n$ がある．

クロネッカーの定理「n 次代数的数体の判別式は $n > 1$ のとき 1 より大」（[M1]-2）の証明はこの定理から導かれる．

[M3]-5　最後にもう 1 つ挙げて置く．[M3]-4 で $\nu = n$ として，ξ_j $(1 \leq i \leq n)$ は実変数 $x_1, \cdots, x_n$ の実または複素係数の 1 次式でこれらは独立とする．任意の $p \geq 1$ に対して

$$F(x) = \left(\frac{|\xi_1|^p + \cdots + |\xi_n|^p}{n} \right)^{1/p}$$

と置くと，F はやはり [M3]-1 の条件 (a), (b), (c) を満たしている．従ってこのときも (22) の類似が成り立つ．