Genus 4 hyper-elliptic curves and their coefficient manifolds

by Kanji Namba

463-3 Kitamizote Sojya Okayama 719-1117

tel/fax. 0866-90-1886

2010. 12. 21

この論文では、種数4の超楕円曲線

$$E:\quad y^2 = f(x) = a_0x^9+a_1x^8+a_2x^7+a_3x^6+a_4x^5+a_5x^4+a_6x^3+a_7x^2+a_8x+a_9$$

について、その類型の全体像を決定するということを目的とする。現実には、高い種数の超楕円曲線については、類型の多様性の極一部しか認識されていない。現段階では、文献等に現れる、対称性などの群構造の記述に用いられた、種数4の楕円曲線や色々のガロア群をもつ多項式を例にとって、終結変換ならびに係数多様体等の指標などを調べている段階である。何個かの特徴的な事例を取り上げ解析して類型問題の認識の一助にしようとするものである。

1. 諸定義

先ず、Legendreの記号、つまり、平方乗除の記号を、

$$(a/p) = \#\{x\in p : x^2 = a \bmod p\} -1 = a^{(p-1)/2} \bmod p \in \{-1,0,1\} = 3-\{1\}$$

と記す。($p=2$ のときは $(a/p) = a\in 2 = \{0,1\}$, $p = \{0,1,\cdots,p-1\}$)

多項式 $f(x)$ の終結変換多項式(resultant transformation polynomial) $\bar{f}(x)$ は次のように定義される。9次多項式 $f(x)$ に対し、Tschirnhaus 変換により、.

$$f_1(u) = f(x) ⓧ\ x+u,\ f_2(u,v) = f(x) ⓧ\ x^2+ux+v,\ f_3(u,v,w) = f(x) ⓧ\ x^3+ux^2+vx+w,$$

$$f_4(u,v,w,t) = f(x) ⓧ\ x^4+ux^3+vx^2+wx+t$$

などと定義する。ここに、ⓧは x に関する終結式(resultant)で、$f(x)$ と $g(x)$ の変数(variable) x に関する終結式

$$f(x) ⓧ\ g(x) = \mathrm{resultant}(f(x), g(x), x)$$

の省略記号である。終結式の記号ⓧ,ⓨ,…などは、加減乗除(+, -, ×, /)より結合力(adhesiveness) が弱いものとする。

終結変換係数 a_p, b_p, c_p, d_p を、次のように定義する。

$$a_p= \sum_{x\in p} (f_1(x)/p),\ b_p= \sum_{x,y\in p} (f_2(x,y)/p),\ c_p= \sum_{x,y,z\in p} (f_3(x,y,z)/p),$$

$$d_p = \sum_{x,y,z,t \in p} (f_4(x,y,z,t)/p)$$

目的の終結変換多項式は

$$\bar{f}_p(x) = x^8 + a_p x^7 + b_p x^6 + c_p x^5 + d_p x^4 + p c_p x^3 + p^2 b_p x^2 + p^3 a_p x + p^4$$

と定義される。谷山・志村理論(Taniyama-Shimura theory)により、終結根(終結多項式 =0の根)は非実数で、絶対値は $\sqrt{p}$、つまり、

$$\sqrt{p}\, e^{i\theta} = \sqrt{p}\,(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

の形に表現されることが知られている。

一般に、f(x)のガロア群が非可解(non-solvable)なら、偏角 θ の素数 p にわたる分布は、この場合は種数 g = 4 であり、

$$\sin^2(\theta) + \sin^2(2\theta) + \sin^2(3\theta) + \sin^2(4\theta)$$

に比例するであろうというのが、$\sin^2$-予想($\sin^2$-conjecture)である。予想としては、ガロア群が可解(solvable)な場合や可約(reducible)な場合も含む相当広い範囲の f(x)についてこの分布に添うものと思っている。

例 1.

$$y^2 = x^9 - x^6 + 2x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 1$$

この例は、

G. Malle, B.H.Matzat, *Inverse Galois Theory*, Springer Monographs in Mathematics, 1999,
p. 415. Appendix: Example Polynomials, degree 9, $T_{34} = S_9$

によるもので、勿論、ガロア群は非可解である。

[p, a_p, b_p, c_p, d_p]

[2, -2, -4, -8, -16], [3, 1, 1, 0, 2], [5, 5, 12, 21, 38], [7, 5, 23, 73, 204],
[11, 3, 15, 59, 211], [13, 9, 34, 42, -62], [17, 7, 37, 211, 977], [19, -1, 7, 6, -6],
[23, -1, 12, -51, 310], [29, 2, 19, -140, -84], [31, 4, -14, -105, -615],
[37, 4, 47, 318, 1140], [41, 4, 47, 52, 936], [43, 14, 116, 814, 5494],
[47, 7, 76, 350, 3792], [53, 8, -6, -109, 984], [59, 10, 44, -30, -1878],
[61, 12, 118, 572, 3664], [67, -1, -43, -49, 1525], [71, -12, 177, -1858, 18508],
[73, 4, 37, -508, 104], [79, 3, 93, 921, 5629], [83, 7, 88, 250, 1994],
[89, 1, 44, 232, 4728], [97, -1, 81, -781, 4337], [101, 19, 249, 2303, 21196],
[103, -5, 44, -1445, 11142], [107, 20, 298, 3164, 34332], [109, -14, 192, -2612, 26900],
[113, 21, 278, 1853, 13814], [127, 10, 190, 1934, 28784], [131, -7, 173, -2318, 19364],
[137, 13, 135, 200, 8810], [139, -3, 83, -844, 14248], [149, 1, 55, -75, 11429],
[151, -8, 127, -2860, 23584], [157, 7, 175, 2527, 37904], [163, 30, 563, 8788, 126072],

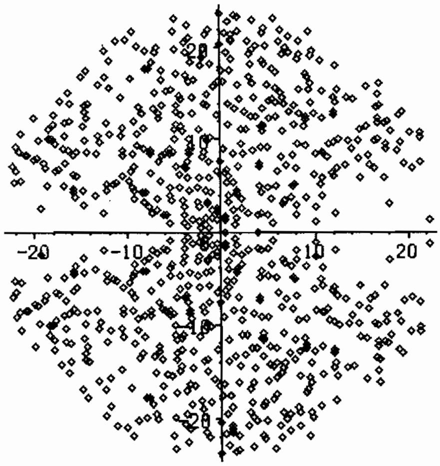
[167, 19, 181, 3415, 57653], [173, 3, 144, 2158, 12820], [179, 4, 86, 184, -7448],
[181, -16, 290, -2070, 23836], [191, -9, 275, -1235, 48472], [193, 4, 334, -736, 60500],
[197, -18, 423, -5764, 111180], [199, 7, 22, 843, 9170], [211, 1, 542, -500, 148966],
[223, -10, 324, -2406, 89566], [227, -22, 736, -13711, 235886],
[229, 14, 273, 6764, 91320], [233, 5, 455, 2227, 156832], [239, 9, 405, 3621, 150484],
[241, 1, 103, 3317, 18264], [251, -17, 233, -1485, 7851], [257, 17, -4, 2652, 113740],
[263, 20, 559, 8248, 189024], [269, 20, 486, 9252, 121426],
[271, 31, 914, 20375, 346586], [277, 10, 162, 1918, 21858], [281, -6, 205, -552, 23848],
[283, -5, 362, -1269, 85354], [293, 31, 637, 14017, 295699], [307, -15, -53, 3793, -27676],
[311, -17, 397, -1437, 51107], [313, 10, 255, -724, -10416], [317, -16, 26, 277, 50848],
[331, -29, 687, -16489, 296407], [337, -11, 168, 312, -84930],
[347, -25, 470, 1716, -52594], [349, 6, 429, 9306, 116588], [353, 21, 928, 16039, 422054],
[359, 31, 537, 13611, 355966], [367, -4, 319, 1026, 5056], [373, 7, -21, 4766, 120600],
[379, 35, 1098, 29364, 557062], [383, 6, 412, -2762, 118376],
[389, -2, -216, -902, 228330], [397, 24, 968, 11536, 366654], [401, 35, 465, -597, -81808],
[409, 33, 593, 12981, 375192], [419, 35, 1425, 38950, 843088],
[421, -24, 686, -3516, 84402], [431, -7, 549, -11779, 236112],
[433, -14, 497, 2430, 14416], [439, -12, 704, -17332, 276022],
[443, -17, 486, 1953, -14054], [449, 3, 187, 3605, 31384], [457, 20, 720, 497, 111364],
[461, -26, 571, -3438, 31448], [463, -9, 343, 8223, -24657], [467, -17, 415, -3963, -63842],
[479, -23, 537, 4607, -61856], [487, 43, 1746, 45238, 1181526],
[491, 21, 584, 17029, 303030], [499, 13, -449, -8701, 63671], [503, -3, 703, 21, 375453],
[509, 20, -33, -5932, -57048], [521, 1, 274, 10200, -103710], [523, 31, 379, -143, -75717],
[541, 18, 416, 6148, 103370], [547, 32, 812, 19362, 433074],
[557, 17, 402, -4644, -54232], [563, 35, 1681, 50878, 1259008], [569, 8, 236, -724, 17690]

次の図は、終結変換多項式の複素根の分布である。

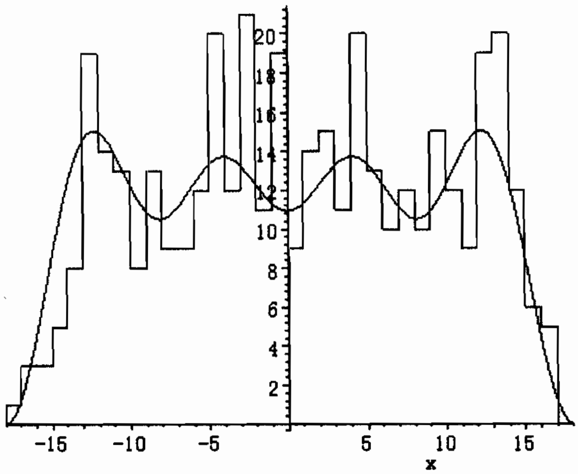
$$y^2 = f(x) = x^9-x^6+2x^5-x^4-3x^3+x^2+x-1$$

$$\bar{f}_p(x) = x^8+a_px^7+b_px^6+c_px^5+d_px^4+pc_px^3+p^2b_px^2+p^3a_px+p^4 = 0$$

$$p = 2 \sim 569$$



全体で 412 個の解があり、5° の区間での個数の分布は次図のようである。



曲線の部分は、$p = 569$ までの $412 = 4 \cdot 103$ 個の場合の期待値関数

$103\,(\sin^2(((x-18)\pi/36)) + \sin^2(2\,(x-18)\,\pi i/36) + \sin^2(3\,(x-18)\,\pi/36) + \sin^2(4\,(x-18)\,\pi/36))\,/6\pi$

である。両端の少し大きめの“ゆらぎ”は、所謂、Gibbs の現象であろう。

素数 p については現在 $p = 569$ までしか計算していないが、$g = 4$ の場合、現在の計算法では、

$$f_4(u,v,w,t) = f(x) \otimes x^4+ux^3+vx^2+wx+t$$

や、その平方剰余を p^4 回計算しなければならない。

$p = 569$ では、$p^4 = 104821185121$ であり、パソコンには結構重い計算量である。効率的な計算法や新しい着眼点の発見が強く期待される。

質の良い数値実験結果は、理論的な予想や本質的な概念の発見に寄与するところが大きいであろうと考えている。

終結変換多項式から、$\bar{f}_p(x)=0$ と $x^2+ux+p=0$ が共通解を有する条件として

$$\bar{f}_p(x) \otimes x^2+ux+p = p^4 \underline{f}_p(u)^2$$

なる4次多項式が定まる。この多項式を係数多項式(coefficient polynomial)と呼ぶ。この場合を含め、種数 g に応じて

$$u-a,\ u^2-au-2p+b,\ u^3-au^2+(b-3p)u-c+2pa,\ u^4-au^3+(b-4p)u^2+(3pa-c)u+d-2pb+2p^2,\ \cdots$$

である。上記では係数 a_p の添字は省略して記した。これらの多項式 $=0$ と置いた方程式の根(= 係数根, coefficient root)はすべて実数で絶対値は $2\sqrt{p}$ より小さい。

$$a=a_p/\sqrt{p}\ ,\ b=b_p/p,\ c=c_p/(p\sqrt{p}),\ d=d_p/p^2$$

とおいて標準化した多項式

$$u-a,\ u^2-au-2+b,\ u^3-au^2+(b-3)u-c+2a,\ u^4-au^3+(b-4)u^2+(3a-c)u+d-2b+2,\ \cdots$$

を標準係数多項式(normalized coefficient polynomial)という。今の場合

$$\underline{f}_p(u)=u^4-au^3+(b-4)u^2+(3a-c)u+d-2b+2$$

であり、標準係数根(normalized coefficient root)はすべて絶対値2以下の実数である。

差商(difference quotient)

$$\Diamond f(x,y)=(\underline{f}_p(x)-\underline{f}_p(y))/(x-y)$$

は3次曲線で、既約な場合は楕円曲線を定める。種数4の場合は

$$\Diamond f(x,y)=x^3+x^2y+xy^2+y^3-a(x^2+xy+y^2)+(b-4)(x+y)+3a-c$$

である。これを標準楕円曲線という。標準係数根を座標とする xy-平面上の点はこの標準楕円曲線上にある。このような曲線に限らず

> 標準係数根を座標(x,y,z,t)とする点を正の確率で含むような $[-2,2]^4$ の代数多様体の全体像を決定する

ことを問題としようというのである。予想としては、一般の f(x)に対しては分布は本質的に4次元で、代数的な退化はないであろうと思うが、退化多様体が存在する条件の決定やその多様体の性質の問題は非常に興味深い研究課題である。また、

$$\Diamond f(x,y) = x^3+x^2y+xy^2+y^3-a(x^2+xy+y^2)+(b-4)(x+y)+3a-c$$

において、

$$s = x+y,\ t = x-y$$

とおく、つまり、

$$x = (s+t)/2,\ y = (s-t)/2$$

を施し4倍して、

$$(2s-a)t^2+4bs+2s^3+12a-4c-3as^2-16s$$

が得られる。

$$z = (2s-a)t$$

を変数と考えて、楕円曲線

$$z^2 = (a-2s)(2s^3-3as^2+4(b-4)s+4(3a-c))$$

を得る。この場合、右辺はsの4次式である。これを標準係数多項式の Euler 型の標準形(Euler normal form)と呼ぶ。

例 2.

$$y^2 = (x-1)(x^2+x+1)(x^6+3x^3+1) = x^9+2x^6-2x^3-1 = f(x)$$

$$\det = -3^9 \cdot 5^9$$

この場合の基本データは

$$[p, a_p, b_p, c_p, d_p]$$

[2, -1, -1, -3, -6], [3, -2, 3, 0, 0], [5, 0, 5, 0, 0], [7, 2, 4, 10, 86], [11, -4, 28, -68, 374],
[13, -2, 4, -62, 214], [17, 0, 41, 0, 816], [19, -10, 37, 26, -692], [23, 2, 37, 28, 644],
[29, -2, 64, -70, 2030], [31, -10, 97, -702, 4092], [37, -2, 28, 34, 1894],
[41, -2, 76, -70, 2870], [43, 2, 88, 186, 5598], [47, 6, 80, 198, 3102],
[53, -4, 133, -320, 8480], [59, -12, 8, 612, -6018], [61, -2, 61, -890, 1060],
[67, -34, 604, -7442, 69494], [71, 8, 76, 40, 710], [73, 10, 160, 1430, 16094],
[79, 38, 625, 6130, 51260], [83, -2, 73, 20, -1660], [89, -6, 284, -1170, 34710],
[97, -2, 16, -926, 286], [101, -6, 260, -954, 32118], [103, -10, 88, 1894, -20338],
[107, 10, 400, 2930, 62702], [109, 34, 637, 8730, 99588], [113, 16, 196, 1328, 18758],
[127, -10, -44, 990, 1782], [131, -12, 224, -1116, 24366], [137, 8, 289, 1216, 41648],
[139, -4, 124, -2372, -586], [149, -18, 188, -702, 11622], [151, -4, 268, -596, 45062],
[157, -2, 40, 650, -33826], [163, -22, 268, -2150, 18710], [167, -18, 149, 324, -6012],
[173, -12, 509, -4032, 116256], [179, -4, 76, 412, -36874],
[181, -38, 805, -15250, 238604], [191, 0, 608, 0, 159294], [193, -14, 76, 1190, -23914],

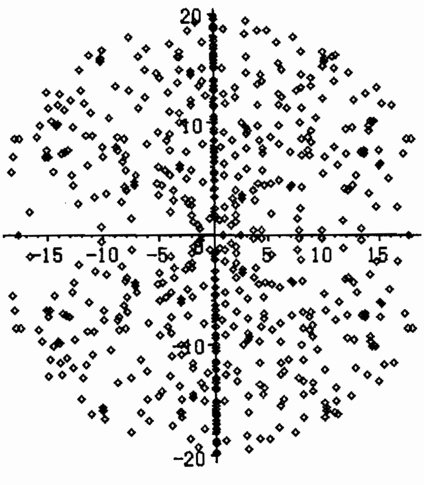
[197, -12, 437, -2880, 94560], [199, -4, 220, -1364, 34982], [211, -10, 181, -2870, 10892],
[223, -22, 628, -13662, 187254], [227, 2, 673, 892, 202484],
[229, 22, 757, 13950, 244020], [233, -24, 212, 504, -9786], [239, -16, 208, 496, -14818],
[241, 34, 457, -506, -74660], [251, -20, 364, -2260, 56726], [257, 0, 713, 0, 234384],
[263, -30, 896, -18990, 332958], [269, 6, 1040, 4626, 414798], [271, -10, 73, 602, -12788],
[277, 10, -152, -2274, 32766], [281, -18, 224, 1026, -32034],
[283, -22, -152, 5922, -58434], [293, 28, 373, 2240, 46880], [307, 14, 460, 830, 72982],
[311, 24, 584, 6552, 169806], [313, -14, -176, 4382, -85762], [317, 12, 413, 1152, 60864],
[331, 20, 220, 8020, 284918], [337, -2, 652, 7562, 179798],
[347, -22, 976, -13838, 436526], [349, -2, 349, -4886, 9772], [353, 0, 644, 0, 205446],
[359, -8, 1024, -5320, 477470], [367, 26, 484, 12914, 305398],
[373, -62, 2632, -73898, 1655614], [379, 50, 1549, 33326, 643180],
[383, -6, 293, 540, -68940], [389, 30, 1052, 19890, 515814],
[397, -62, 1252, 6462, -563562], [401, 14, 304, 1358, -77794]

である。

$$y^2 = f(x) = (x-1)(x^2+x+1)(x^6+3x^3+1) = x^9+2x^6-2x^3-1$$

$$\bar{f}_p(x) = x^8+a_px^7+b_px^6+c_px^5+d_px^4+pc_px^3+p^2b_px^2+p^3a_px+p^4 = 0$$

$$p = 2 \sim 401$$



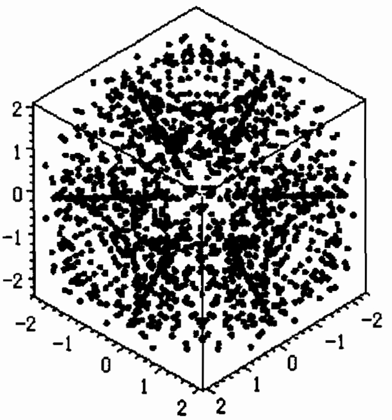
この場合の分布には、$\theta = \pi/2 = 90°$ の点分布が含まれている。

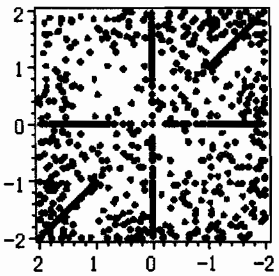
標準係数根を座標にもつ xyz-空間の図形を二つばかり図示する。

$$y^2 = f(x) = x^9+2x^6-2x^3-1$$

$$\underline{f}_p(u) = u^4 - au^3 + (b-4)u^2 + (3a-c)u + d - 2b + 2 = 0$$

$$\bar{f}_p(x) = \bar{f}_p(y) = \bar{f}_p(z) \ = 0,\ p = 2 \sim 401$$





以下に係数多項式の因数分解の表を記す。

$[p, \underline{f}_p(x)]$

$[2,\ (x+1)(x^3-9x+6)]$, $[3,\ x(x-3)(x+3)(x+2)]$, $[5,\ x^2(x^2-15)]$,

$[7,\ (x+4)(x+2)(x-4)^2]$, $[11,\ x(x-4)(x+4)^2]$, $[13,\ (x-4)(x^3+6x^2-24x-112)]$,

$[17,\ x^2(x^2-27)]$, $[19,\ (x+4)(x^3+6x^2-63x-344)]$, $[23,\ x(x-2)(x^2-55)]$,

$[29,\ x(x+2)(x^2-52)]$, $[31,\ x(x^3+10x^2-27x-228)]$, $[37,\ (x-4)(x-10)(x+8)^2]$,

$[41,\ x(x+2)(x^2-88)]$, $[43,\ (x-6)(x-8)(x+6)^2]$, $[47,\ x(x-6)(x^2-108)]$,

$[53,\ x(x+4)(x^2-79)]$, $[59,\ x(x+12)(x^2-228)]$, $[61,\ (x-10)(x^3+12x^2-63x-106)]$,

$[67,\ (x+14)(x^3+20x^2+56x-176)],\ [71,\ x(x-8)(x^2-208)],$

$[73,\ (x-8)(x^3-2x^2-148x-424)],\ [79,\ (x-16)(x^3-22x^2-43x+2188)],$

$[83,\ x(x+2)(x^2-259)],\ [89,\ x(x+6)(x^2-72)],\ [97,\ (x-16)(x^3+18x^2-84x-1000)],$

$[101,\ x(x-12)(x+12)(x+6)],\ [103,\ (x+14)(x^3-4x^2-268x-1232)],$

$[107,\ x(x-10)(x^2-28)],\ [109,\ (x-6)(x^3-28x^2+33x+2586)],\ [113,\ x(x+16)(x-16)^2],$

$[127,\ (x-6)(x^3+16x^2-456x-7536)],\ [131,\ x(x+12)(x^2-300)],$

$[137,\ x(x-8)(x^2-259)],\ [139,\ (x-4)(x^3+8x^2-400x-896)],\ [149,\ x(x+18)(x^2-408)],$

$[151,\ (x+8)(x-4)(x^2-304)],\ [157,\ (x+4)(x^3-2x^2-580x+728)],$

$[163,\ (x+2)(x^3+20x^2-424x-7760)],\ [167,\ x(x+18)(x^2-519)],$

$[173,\ x(x+12)(x^2-183)],\ [179,\ x(x+4)(x^2-640)],$

$[181,\ (x+22)(x^3+16x^2-271x+578)],\ [191,\ x^2(x^2-156)],\ [193,\ (x-2)(x+16)(x^2-664)],$

$[197,\ x(x+12)(x^2-351)],\ [199,\ (x+8)(x^3-4x^2-544x+3328)],$

$[211,\ (x-4)(x^3+14x^2-607x-5888)],\ [223,\ (x+6)(x^3+16x^2-360x+1104)],$

$[227,\ x(x-2)(x^2-235)],\ [229,\ (x-6)(x^3-16x^2-255x-366)],\ [233,\ x(x+24)(x^2-720)],$

$[239,\ x(x+16)(x^2-748)],\ [241,\ (x-22)(x^3-12x^2-771x+8126)],$

$[251,\ x(x+20)(x^2-640)],\ [257,\ x^2(x^2-315)],\ [263,\ x(x+30)(x^2-156)],$

$[269,\ x(x+6)(x-6)^2],\ [271,\ (x+16)(x^3-6x^2-915x+5908)],$

$[277,\ (x+12)(x^3-22x^2-996x+22536)],\ [281,\ x(x+30)(x+18)(x-30)],$

$[283,\ (x-6)(x^3+28x^2-1116x-31296)],\ [293,\ x(x-28)(x^2-799)],$

$[307,\ (x-2)(x^3-12x^2-792x+10480)],\ [311,\ x(x-24)(x^2-660)],$

$[313,\ (x-8)(x+22)(x^2-1252)],\ [317,\ x(x-12)(x^2-855)],\ [331,\ (x-28)(x-32)(x+20)^2],$

$[337,\ (x+16)(x^3-14x^2-472x-2032)],\ [347,\ x(x+22)(x^2-412)],$

$[349,\ (x+2)(x^3-1047x+4886)],\ [353,\ x^2(x^2-768)],\ [359,\ x(x+8)(x^2-412)],$

$[367,\ (x+10)(x^3-36x^2-624x+21952)],\ [373,\ (x+20)(x^3+42x^2+300x-1480)],$

$[379,\ (x-20)(x^3-30x^2-567x+12184)],\ [383,\ x(x+6)(x^2-1239)],$

$[389,\ x(x-30)(x^2-504)],\ [397,\ (x+36)(x^3+26x^2-127x-34512)]]$

ここに、係数多項式をやや詳しく記した理由は、その類型と素数の類型の間に非常に深い関係があるからである。

$$x(x+a)(x^2+b)^2$$

［3,5,7,11;17,23,29,37,41,43,47,53,59,71,73,83,89,101,107,113,131,137,149,151,167,173,179,
191,193,197,227,233,239,251,257,263,269,281,293,311,313,317,331,347,353,359,383,389］

$$(x+a)(x^3+bx^2+cx^2+d)$$

[2,13,19,31,61,67,73,79,97,103,109,127,139,157,163,181,199,
211,223,229,241,271,277,283,307,337,349,367,373,379,397,401]

$$x(x+a)(x^2+b)^2$$

の分類の中には完全分解のものもある。

[3,7,37,43,101,113,269,281,331]

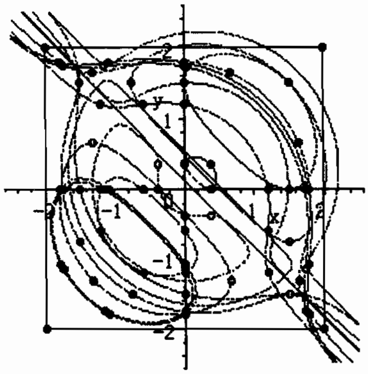
$$x^2(x^2-a)$$

[5,17,191,257,353]

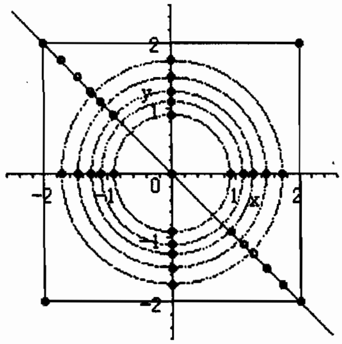
標準楕円曲線と xy-平面上の標準係数解を座標にもつ点の図形は次のようである。

$$\Diamond f(x,y)=x^3+x^2y+xy^2+y^3-a(x^2+xy+y^2)+(b-4)(x+y)+3a-c=0$$

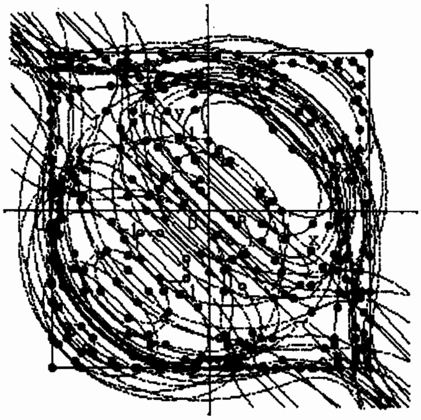
p = 3,7,37,43,101,113,269,281,331



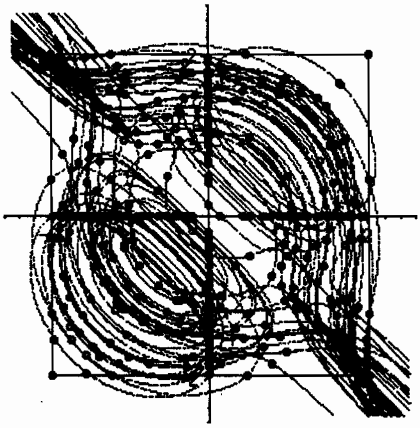
p = 5,17,191,257,353



p = 2,13,19,31,61,67,73,79,97,103,109,127,139,157,163,181,199,
211,223,229,241,271,277,283,307,337,349,367,373,379,397



p = 11, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 73, 83, 89, 107, 131, 137, 149, 151, 167, 173, 179, 193, 197, 227, 233, 239, 251, 263, 293, 311, 313, 317, 347, 359, 383, 389



この場合は、係数多項式が

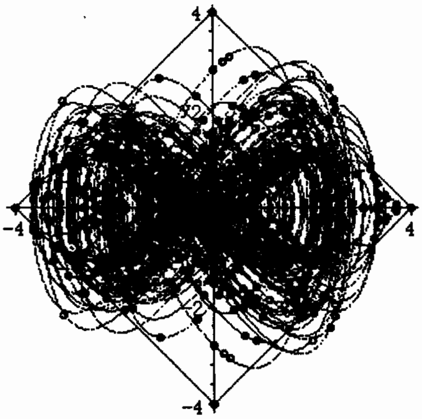
$$x^2(x^2-a)$$

の形のもので、何故か、Fermat の素数 $5 = 2^2+1$, $17 = 2^4+1$, $257 = 2^8+1$ などを含む。191, 353 についても興味深い。

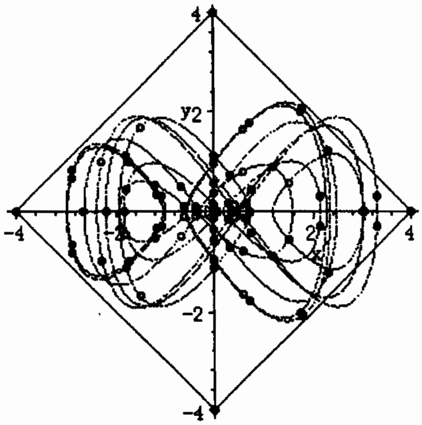
Euler 型の楕円曲線についても記しておく。全体像と類型別に表示してみよう。順不同である。

$$16y^2 = (a-2x)(2x^3-3ax^2+4xb-16x+12a-4c)$$

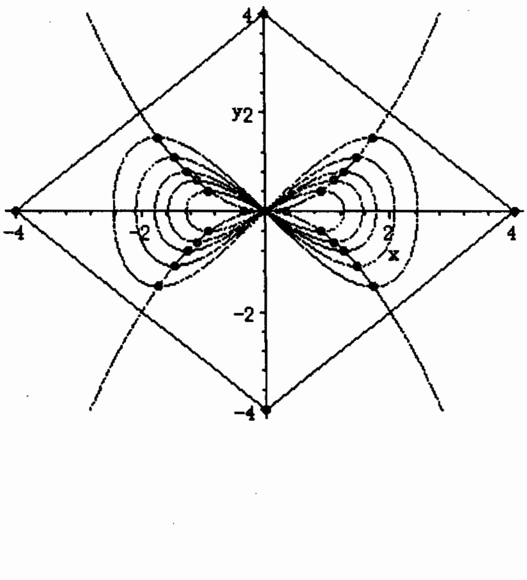
$$s = x+y,\ t = x-y,\ z = (2s-a)t/4$$



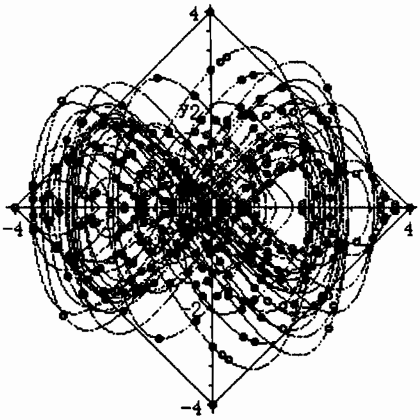
p = 3,7,37,43,101,113,269,281,331

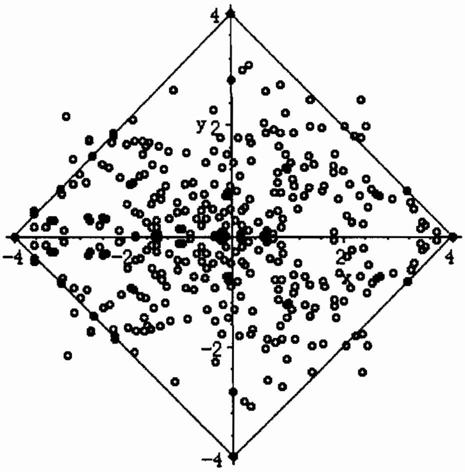


p = 5,17,191,257,353, y = $\pm x^2/2$

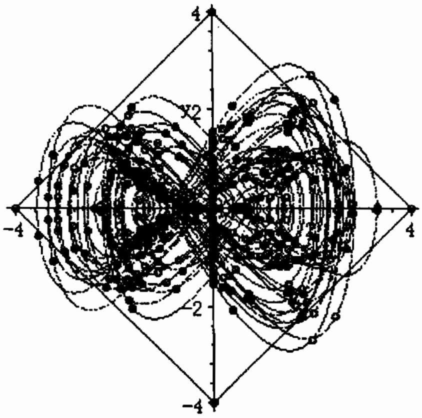


p = 2,13,19,31,61,67,73,79,97,103,109,127,139,157,163,181,199,
211,223,229,241,271,277,283,307,337,349,367,373,379,397

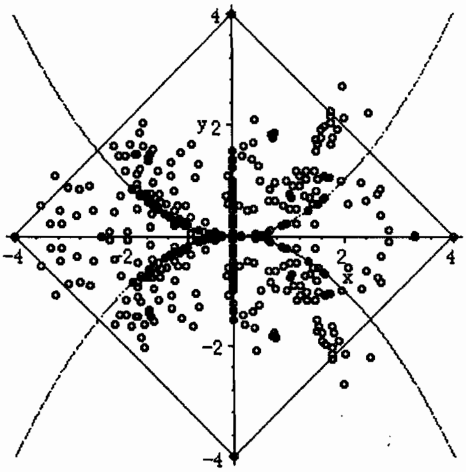




p = 11, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 73, 83, 89, 107, 131, 137, 149, 151, 167, 173, 179,
193, 197, 227, 233, 239, 251, 263, 293, 311, 313, 317, 347, 359, 383, 389



同じ図形の楕円曲線を除いたものである。x,y-軸が、$y = \pm x^2/4$ に対応している。



これらの図からも、何個かの曲線群を読みとることができるかも知れない。何れにしても、点が局在してる。何か自明でない関係があると思われる。

2. 標準係数多項式の内部関係

f(x)を多項式とするとき、g(x,y)が f に関する関連子(relator)または絡子(twiner)とは

$$f(y) ⓨ g(x,y) ⓧ f(x) = 0$$

が成立することである。特に、

$$g(x,y) = y-h(x)$$

のときには、

$$f(y)\textcircled{y}\ y-h(x)\textcircled{x}\ f(x)=f(h(x))\textcircled{x}\ f(x)=0$$

が成立するのは、$f(x)=0$ の根 x が存在して $h(x)$ が再び $f(x)$ の根であることを意味する。$h(x)$ は $f(x)$ のガロア群の元と関係している。従って、絡子は代数的関係で gal(f)との関係を記したものということもできる。

また、終結式(= 消去積, elimination product, eliminator)について

$$g(x,y)\textcircled{x}\ f(x)=h(y)f(y)$$

なる多項式 $h(y)$ が存在するとき、$h(y)$ は $f(x)$ に関する $g(x,y)$ の固有(値)多項式(compositional eigen function)という。例えば、$f(x)$ が 2 次以上の多項式のとき、差商

$$\Diamond f(x,y)=(f(x)-f(y))/(x-y)$$

は $f(x)$ に関する固有多項式をもつ。勿論、

$$g(x,y)\textcircled{x}\ f(x)=h(y)f(y)$$

ならば、

$$f(y)\textcircled{y}\ g(x,y)\textcircled{x}\ f(x)=f(y)\textcircled{y}\ h(y)f(y)=(f(y)\textcircled{y}\ h(y))(f(y)\textcircled{y}\ f(y))=0$$

であるから、固有多項式をもてば、関連子、つまり、絡子である。

$f(x)$ の絡子の全体

$$Tw(f)=\{g(x,y):f(y)\textcircled{y}\ g(x,y)\textcircled{x}\ f(x)=0\}$$

については

$$y-x\in Tw(f)$$

$$g(x,y)\in Tw(f)\rightarrow g(y,x)\in Tw(f)$$

$$g(x,y)\in Tw(f)\rightarrow h(x,y)g(x,y)\in Tw(f)$$

$$g(x,y)\in Tw(f),\ h(x,y)=g(x,y)\ \ \text{mod.}\ f(x)\rightarrow h(x,y)\in Tw(f)$$

などが成立する。

2.1 正方形 $[-2,2]^2$ に内接する 4 次曲線群の例

特殊であるが、x^2,y^2 の複 2 次対称式

$$g(x,y)=x^4+y^4+a(x^2y^2)+b(x^2+y^2)+c=0$$

で定まる曲線が正方形 $[-2,2]^2$ に内接群を定めるような助変数表示の一例について考察する。

$$\partial g/\partial x=g_x(x,y)=4x^3+2axy^2+2bx$$

であるから、$y=2$ に接する条件として、

$$g(x,2)\textcircled{x}\ g_x(x,2)=x^4+y^4+a(x^2y^2)+b(x^2+y^2)+c\ \textcircled{x}\ 4x^3+2axy^2+2bx$$

$$=16(16+4b+c)(64+16b+4c-16a^2-8ab-b^2)^2$$

を得る。これから、二つの可能性が得られる。

$$c = -4b-16,\ c = -16-4b+4a^2+2ab+b^2/4$$

a） $c = -4b-16$ の場合

$$g(x,y) = x^4+y^4+a(x^2y^2)+b(x^2+y^2)-4b-16$$

である。少し、試してみると、$(a,b) = (-2,-8), (-2,0)$ の場合

$$(-2,-8) : (x+2+y)(x+2-y)(x-2+y)(x-2-y)$$

$$(-2,0) : (x^2-4-y^2)(x^2+4-y^2)$$

の場合と、個別に $a = 2$ と $b = -8$ の場合は $g(x,y)$ は特徴的な系列に属す。

$a = 2$ のときは

$$g(x,y) = x^4+y^4+2(x^2y^2)+b(x^2+y^2)-4b-16 = (x^2+y^2-4)(x^2+y^2+b+4)$$

であり、正方形 $[-2,2]^2$ に内接する円と、$b \le -4$ の場合の半径 $\sqrt{-b-4}$ の円である。$\sqrt{-b-4} = 2$ の場合が $b = -8$ の場合である。

$b = -8$ のときは $a \le 2$ の範囲で

$$g(x,y) = x^4+y^4+a(x^2y^2)-8(x^2+y^2)+16 = (x^2+y^2-4)^2-(2-a)x^2y^2$$
$$= (x^2+y^2+xy\sqrt{2-a}-4)(x^2+y^2-xy\sqrt{2-a}-4)$$

のような二つの楕円に分解する。

以下の図は、例2の

$$y^2 = (x-1)(x^2+x+1)(x^6+3x^3+1) = f(x)$$

について、標準係数多項式を $\underline{f_p}(x)$ とするとき、

$$g(x,y) = x^4+y^4+s(x^2y^2)+t(x^2+y^2)-4t-16$$

が標準係数多項式の関連子（relator, 絡子, twiner）であるための条件式

$$k(s,t) = \underline{f_p}(x)\ \textcircled{x}\ g(x,y)\ \textcircled{y}\ \underline{f_p}(y)$$

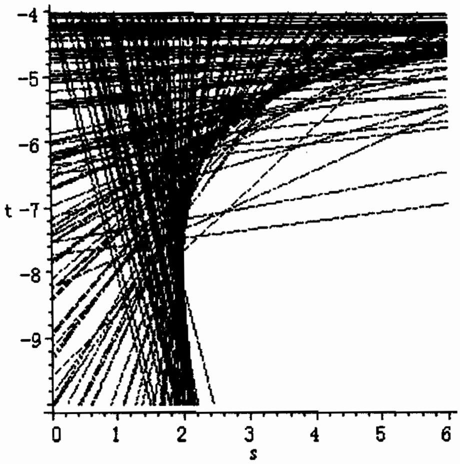
の s に関する一次因子のグラフである。

$$y^2 = (x-1)(x^2+x+1)(x^6+3x^3+1) = f(x)$$

$$as+bt+c|k(s,t) = \underline{f_p}(x)\ \textcircled{x}\ g(x,y)\ \textcircled{y}\ \underline{f_p}(y)$$

$$p = 2 \sim 401$$

$$ax+by+c = 0$$



印象としては、(2,-8),(4,-5)を通り、y = -4を漸近線にする双曲線を包絡線(envelope)ではないかとの印象である。仮に、(0,-4)が対称の中心であれば、原点(-2,0)と(-4,-3)を通る筈である。このような、考察からは、

$$x^2-48xy-192x-12y^2-96y-388=0$$

が求まるが…兎も角、少し興味はあるが…、上記の式は包絡線ではない。

例えば、例2の場合、

$$y^2=f(x)=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+3x^3+1)=x^9+2x^6-2x^3-1$$

$$\bar{f}_p(x)=x^8+a_px^7+b_px^6+c_px^5+d_px^4+pc_px^3+p^2b_px^2+p^3a_px+p^4=0$$

$$p=2\sim 401$$

の関連子(=絡子)

$$k(s,t)=\underline{f_p}(x)\ \text{ⓧ}\ g(x,y)\ \text{ⓨ}\ \underline{f_p}(y)$$

が t+4 を約数にもつ場合は

[3,5,11,17,23,29,31,41,47,53,59,71,83,89,101,107,113,131,137,149,167,173,179,
191,197,227,233,239,251,257,263,269,281,293,311,317,347,353,359,383,389,401]

のように重複して現れる。因数分解の型との対応では

$$x(x+a)(x^2+b)^2$$

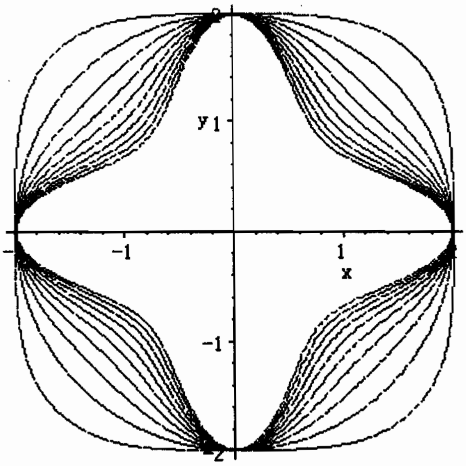
[3,5,7,11,17,23,29,37,41,43,47,53,59,71,73,83,89,101,107,113,131,137,149,151,167,173,179,
191,193,197,227,233,239,251,257,263,269,281,293,311,313,317,331,347,353,359,383,389]

$$(x+a)(x^3+bx^2+cx^2+d)$$

[2,13,19,31,61,67,73,79,97,103,109,127,139,157,163,181,199,
211,223,229,241,271,277,283,307,337,349,367,373,379,397,401]

上記の集合で、因数分解形が $(x+a)(x^3+bx^2+cx^2+d)$ のものは 31, 401 である。この例外が何を意味しているか今は解らない。

$$g(x,y) = x^4+y^4+sx^2y^2-4(x^2+y^2),\ s = 0, \cdots, 10$$



b) $c = -16-4b+4a^2+2ab+b^2/4$ の場合

この場合は、変数 s,t とは少し変わるが、

$$g(x,y) = x^4+y^4+sx^2y^2+t(x^2+y^2)-16-4t+4s^2+2st+t^2/4$$

である。この場合も、特殊な関係

$$-64-16t+16s^2+8ts+t^2 = 0$$

が、以前と同様な素数

$$p = 3,5,11,17,23,29,31,41,47,53,59,71,\cdots$$

について得られる。この関係は、例えば、変換

$$x = 4s+t-8/17,\ y = s-4t$$

により、

$$-18560/289+64y/17+x^2 = 0$$

と変形できるから、放物線である。助変数の表示として、上記の x を用いてもよいが、係数が少し大きくなる。

直接に、例えば、$t = 0$ とすると、$s = \pm 2$ が得られるので、$(s,t) = (2,0)$ を通る勾配 r を助変数(parameter)として、

$$s = 2(-16+8r+r^2)/(r+4)^2,\ t = -64r/(r+4)^2$$

とすれば、

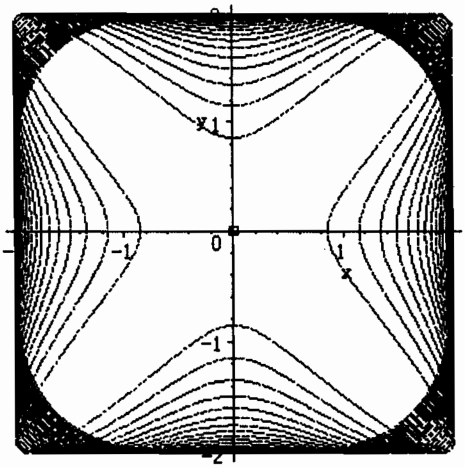
$$(r+4)^2(y^4+x^4)+2(r^2+8r-16)y^2x^2-64r(x^2+y^2)$$

である。

以下の図は、

$$g(x,y) = (r+4)^2(y^4+x^4)+2(r^2+8r-16)y^2x^2-64r(x^2+y^2)$$

$$r = 0 \sim 4 \text{ step } 1/5$$



である。

[3,5,11,17,23,29,31,41,47,53,59,71,83,89,101,107,113,131,137,149,167,173,179,
191,197,227,233,239,251,257,263,269,281,293,311,317,347,353,359,383,389,401]

の 31,401 を除いた場合でも $r \neq 0$ で重複する場合は非常に少なく

$$r = 14,\ 12,\ 8/3,\ 4/3,\ 2080/9$$

がそれぞれ、3,6,2,6,3 回繰り返されるだけである。勿論、$r=0$ の場合は

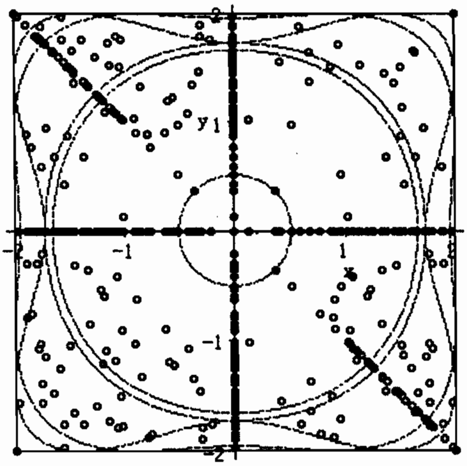
$$g(x,y) = 16(x-y)^2(x+y)^2$$

であり、直線 $x+y = 0$ の上に点が分布しているのでこれで満足すべきであるとの見解もあろうと思うが、今一つ何かを期待して試みている訳である。

一応この場合の図を示しておく。

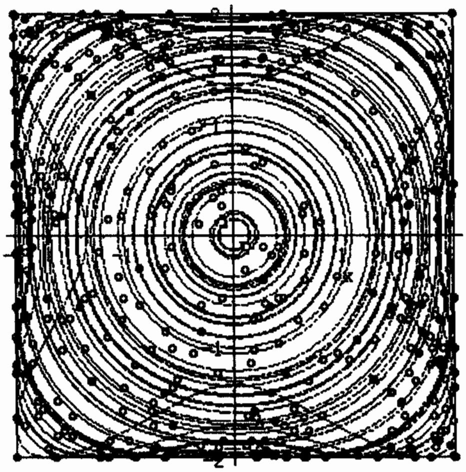
$$g(x,y) = (r+4)^2(y^4+x^4)+2(r^2+8r-16)y^2x^2-64r(x^2+y^2)$$

$$r = 14,\ 12,\ 8/3,\ 4/3,\ 2080/9$$



3,5,11,17,23,29,41,47,53,59,71,83,89,101,107,113,131,137,149,167,173,179,
191,197,227,233,239,251,257,263,269,281,293,311,317,347,353,359,383,389

の場合の図は



であるが、これは、標準係数多項式の解多様体(solution manifold determied by normalized coefficient equation, coefficient manifold)をよく表現しているとは言い難い。x^2,y^2 の多項式の関係子(= 絡子)を検討していたことの反省点である。

余談：

目の前にある点の連なりが何か意味を成す場合もあるかも知れない。これは、キーボード(keyboard)の仮名(= 文字)の順列(= 置換, permutation)の話である。従って、無理矢理の「意味」の文字列(試案)であるが…

湯屋終え会うぬ夜を、年は聞く間のりれけむ、

圃畦稿になんかすいで立ちつ、誘い込みもう寝るめろ。

などと辿ってみる。年を自ら語る…ようになったのかな。

昔、少年の頃、田仕事を終えたときのことを、年経て、思い出して…

おもほえず、日の香の稿にむだかえて、茜の空にまどろみぬ

山に添い寝の、星と帆の月。

などと読んでみる。「もう寝るめろ」は「もう寝るめり」ではなくて、

“まあ、明日があるさ”

という心である。試みは、ほとんど失敗に終わる…と思う瞬間もある。…続くには、まあ、こんなことも必要かと思う。

次の例は、

Filip Najman, *Torsion of elliptic curves over quadratic cyclotomic fields*,

Math. J. Okayama Univ. 53 (2011), 75-82

p.77 の

Lemma 8. $E(Q(i))_{tors}$ can not be Z_{16}

の証明に関係して引用されている

F. P. Rabarison,

Torsion et rang des courves elliptiques definies sur les corps de nombres algebriques,

Doctorat de Universite de Caen. 2008

p. 37, case 2.5.5 の

$$s^2 = t(t^4-1)(t^2+2t-1)(t^2-2t-1) = t^9-6t^7+6t^3-t$$

からの引用である。

例 3.

$$y^2 = x(x^4-1)(x^2+2x-1)(x^2-2x-1) = x^9-6x^7+6x^3-x = f(x)$$

$$\det(f(x)) = f(x) ⓧ f'(x) = -2^{42}$$

この場合の基本データは次のようである。b_p ＝0が多いのが印象的。

$[p, a_p, b_p, c_p, d_p]$

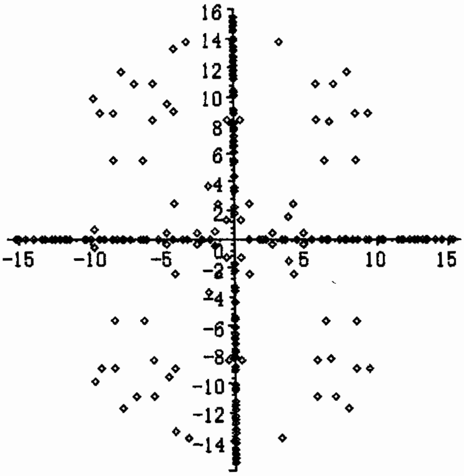
[2, 0, -1, -2, -4], [3, 0, 0, 0, -18], [5, 0, 0, 0, -50], [7, 0, -4, 0, -26], [11, 0, 0, 0, -242], [13, 0, 0, 0, -338], [17, -8, 28, -184, 1158], [19, 0, 0, 0, -722], [23, 0, -68, 0, 2086], [29, 0, 0, 0, -1682], [31, 0, 124, 0, 5766], [37, 0, 0, 0, -2738], [41, 0, -164, 0, 10086], [43, 0, 0, 0, -3698], [47, 0, 188, 0, 13254], [53, 0, 0, 0, -5618], [59, 0, 0, 0, -6962], [61, 0, 0, 0, -7442], [67, 0, 0, 0, -8978], [71, 0, 124, 0, 7654], [73, 0, -292, 0, 31974],

[79, 0, 316, 0, 37446], [83, 0, 0, 0, -13778], [89, 0, -356, 0, 47526],
[97, 56, 1500, 25480, 299078], [101, 0, 0, 0, -20402], [103, 0, -4, 0, 14950],
[107, 0, 0, 0, -22898], [109, 0, 0, 0, -23762], [113, -8, 220, -1720, 39558],
[127, 0, 508, 0, 96774], [131, 0, 0, 0, -34322], [137, 0, -548, 0, 112614],
[139, 0, 0, 0, -38642], [149, 0, 0, 0, -44402], [151, 0, 188, 0, 48166],
[157, 0, 0, 0, -49298], [163, 0, 0, 0, -53138], [167, 0, 124, 0, 53350],
[173, 0, 0, 0, -59858], [179, 0, 0, 0, -64082], [181, 0, 0, 0, -65522],
[191, 0, 764, 0, 218886], [193, 56, 1884, 41608, 679622], [197, 0, 0, 0, -77618],
[199, 0, 508, 0, 133350], [211, 0, 0, 0, -89042], [223, 0, 892, 0, 298374],
[227, 0, 0, 0, -103058], [229, 0, 0, 0, -104882], [233, 0, -932, 0, 325734],
[239, 0, 956, 0, 342726]

$$y^2 = x(x^4-1)(x^2+2x-1)(x^2-2x-1) = x^9-6x^7+6x^3-x = f(x)$$

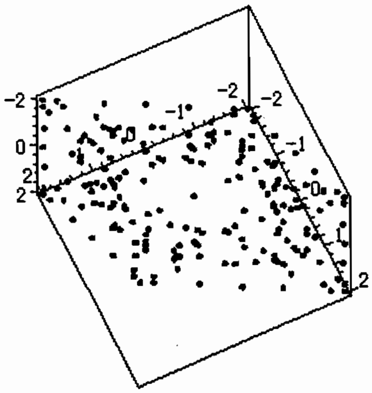
$$\bar{f}_p(x) = x^8+a_px^7+b_px^6+c_px^5+d_px^4+pc_px^3+p^2b_px^2+p^3a_px+p^4 = 0$$

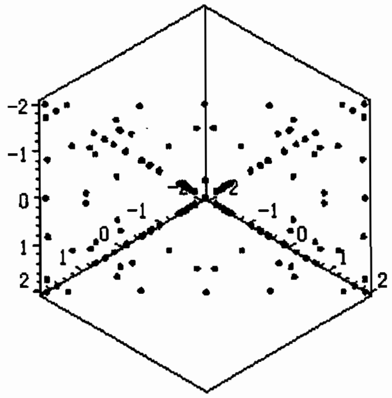
$$p = 2 \sim 239$$



この場合の分布には、θ = π/2 = 90° の倍角の点分布が含まれている。残りの部分の角分布はどのようになるのか見当がつかない。

標準係数根を座標にもつ xyz-空間の図形を二つばかり図示する。





係数多項式の因数分解については次のようである。p ＝ 2については別に検討の必要がある。

$[2, x^4-9x^2+2x+8]$, $[3, x^2(x^2-12)]$, $[5, x^2(x^2-20)]$, $[7, x^4-32x^2+128]$, $[11, x^2(x^2-44)]$,
$[13, x^2(x^2-52)]$, $[17, (x^2+4x-28)^2]$, $[19, x^2(x^2-76)]$, $[23, x^4-160x^2+6272]$,
$[29, x^2(x^2-116)]$, $[31, x^4]$, $[37, x^2(x^2-148)]$, $[41, (x^2-164)^2]$, $[43, x^2(x^2-172)]$,
$[47, x^4]$, $[53, x^2(x^2-212)]$, $[59, x^2(x^2-236)]$, $[61, x^2(x^2-244)]$, $[67, x^2(x^2-268)]$,
$[71, x^4-160x^2+128]$, $[73, (x^2-292)^2]$, $[79, x^4]$, $[83, x^2(x^2-332)]$, $[89, (x^2-356)^2]$,
$[97, (x^2-28x+164)^2]$, $[101, x^2(x^2-404)]$, $[103, x^4-416x^2+36992]$, $[107, x^2(x^2-428)]$,
$[109, x^2(x^2-436)]$, $[113, (x^2+4x-124)^2]$, $[127, x^4]$, $[131, x^2(x^2-524)]$, $[137, (x^2-548)^2]$,
$[139, x^2(x^2-556)]$, $[149, x^2(x^2-596)]$, $[151, x^4-416x^2+36992]$, $[157, x^2(x^2-628)]$,

$[163, x^2(x^2-652)]$, $[167, x^4-544x^2+67712]$, $[173, x^2(x^2-692)]$, $[179, x^2(x^2-716)]$,
$[181, x^2(x^2-724)]$, $[191, x^4]$, $[193, (x^2-28x+164)^2]$, $[197, x^2(x^2-788)]$,
$[199, x^4-288x^2+10368]$, $[211, x^2(x^2-844)]$, $[223, x^4]$, $[227, x^2(x^2-908)]$,
$[229, x^2(x^2-916)]$, $[233, (x^2-932)^2]$, $[239, x^4]]$

この場合も類型に分解しておく。

$x^2(x^2-a)$

[3,5,11,13,19,29,37,43,53,59,61,67,83,101,107,109,
131,139,149,157,163,173,179,181,197,211,227,229]

x^4

[31,47,79,127,191,223]

$(x^2-a)^2$

[41,73,89,137,233]

$(x^2+ax+b)^2$

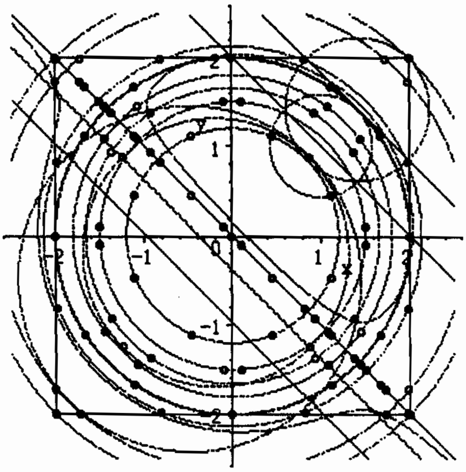
[17,97,113,193]

x^4+ax^2+b

[7,23,103,151,167,199]

既約なもののガロア群は C(4) = 4 である。

◊$f(x,y) = x^3+x^2y+xy^2+y^3-a(x^2+xy+y^2)+(b-4)(x+y)+3a-c = 0$

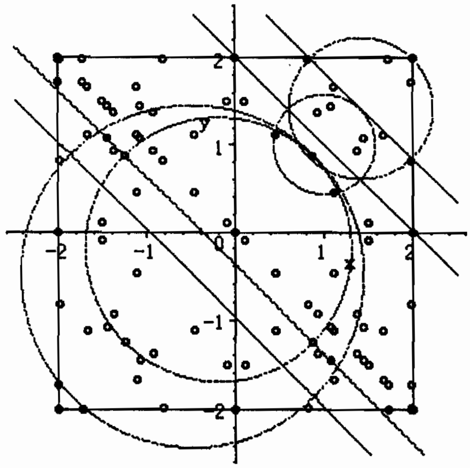


上記の図で、標準楕円曲線が、既約、つまり、円と直線に分解しないのは、既約な場合 p = 2 のときである。

また、直線と円に分解するが、直線が x+y = 0 ではない場合は

$(x^2+ax+b)^2$

[17,97,113,193]



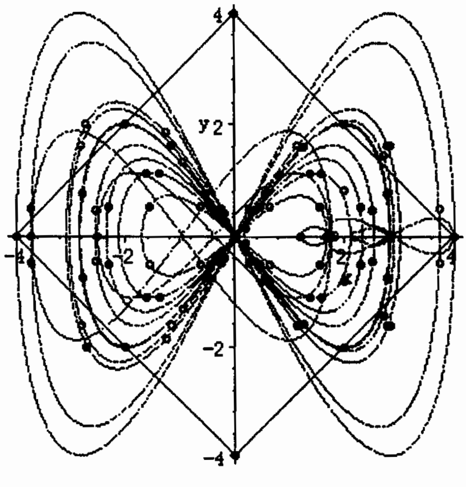
の場合である。

Eulerの標準形については、全体像は、次の図のようである。

$$16y^2 = (a-2x)(2x^3-3ax^2+4xb-16x+12a-4c)$$

$$s = x+y,\ t = x-y,\ z = (2s-a)t/4$$

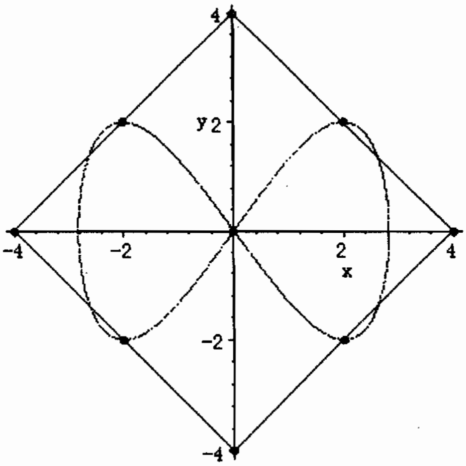
$$p = 2 \sim 239$$



p = 3,5,11,13,19,29,37,43,53,59,61,67,83,101,107,109,

131,139,149,157,163,173,179,181,197,211,227,229

の場合は、



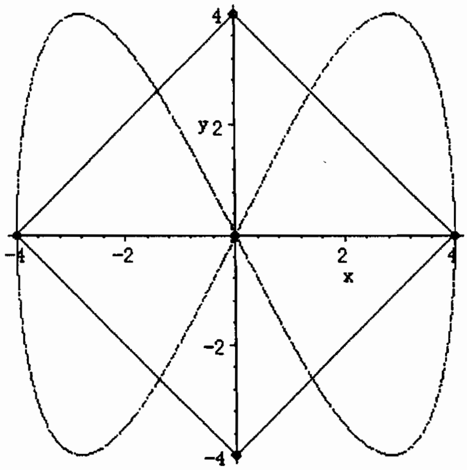
のように、極めて簡潔である。

上記の素数は 8 を法として、剰余が {3,5} のもので、丁度半数の素数がこの組に属す。

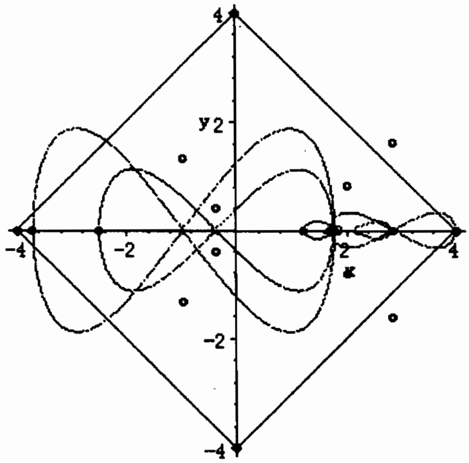
p = 31,47,79,127,191,223

の場合は、楕円も原点に退化してしまう。

p = 41,73,89,137,233

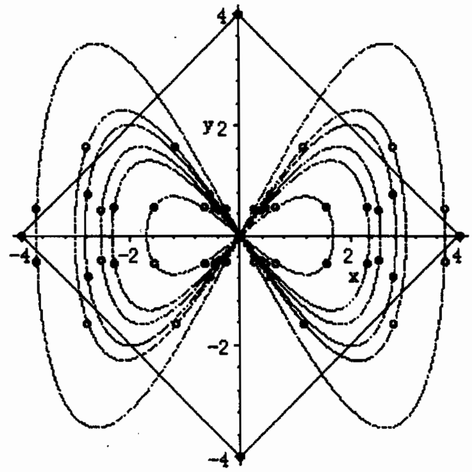


p = 17,97,113,193



この場合、4 個の楕円曲線の実軸上にある中心を x-成分にもつ点が現れている。

p = 7,23,103,151,167,199



例 4.

$$y^2 = x(x^4-1)(x^4+4)$$

$$\det(f(x)) = f(x) ⓧ f'(x) = -2^{26} \cdot 5^8$$

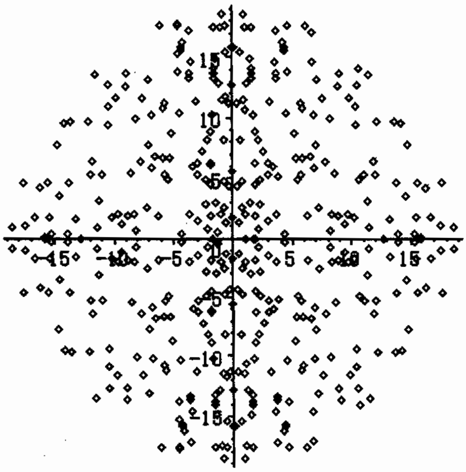
[2, 0, -1, -2, -4], [3, 0, 0, 0, -18], [5, 0, -2, 0, 1], [7, 0, 12, 0, 102], [11, 0, 0, 0, 46], [13, 0, 12, 0, 374], [17, 0, -36, 0, 902], [19, 0, 0, 0, -690], [23, 0, 76, 0, 2470], [29, 0, 76, 0, 3126], [31, 0, 124, 0, 5766], [37, 0, 76, 0, 4182], [41, -8, 124, -760, 7590], [43, 0, 0, 0, -1650], [47, 0, 108, 0, 7302], [53, 0, -20, 0, 5718], [59, 0, 0, 0, -1554],

[61, 0, -20, 0, 7542], [67, 0, 0, 0, -8466], [71, 0, 156, 0, 14118], [73, 0, -260, 0, 27558],
[79, 0, -4, 0, 11974], [83, 0, 0, 0, -9170], [89, 0, -164, 0, 14374], [97, 0, -356, 0, 50502],
[101, 0, -84, 0, 22166], [103, 0, 12, 0, 12006], [107, 0, 0, 0, -18290],
[109, 0, 44, 0, 24246], [113, -8, 476, -2744, 82054], [127, 0, 428, 0, 76486],
[131, 0, 0, 0, -32754], [137, -40, 892, -15320, 207654], [139, 0, 0, 0, -18642],
[149, 0, -372, 0, 78998], [151, 0, 284, 0, 65254], [157, 0, 364, 0, 82422],
[163, 0, 0, 0, -53138], [167, 0, 396, 0, 78054], [173, 0, -468, 0, 114614],
[179, 0, 0, 0, -56882], [181, 0, -404, 0, 106326], [191, 0, 700, 0, 194950],
[193, 0, -228, 0, 13766], [197, 0, -84, 0, 79382], [199, 0, 732, 0, 212646],
[211, 0, 0, 0, -24242], [223, 0, 684, 0, 207174], [227, 0, 0, 0, -61586],
[229, 0, 44, 0, 105366], [233, 0, -388, 0, 72486], [239, 0, 636, 0, 190278],
[241, 0, -580, 0, 167494], [251, 0, 0, 0, -125970], [257, -8, 796, -5176, 292422],
[263, 0, 12, 0, -61338], [269, 0, 428, 0, 190518], [271, 0, 572, 0, 195910],
[277, 0, -628, 0, 252054], [281, 0, -740, 0, 262054], [283, 0, 0, 0, -86450],
[293, 0, -436, 0, 219222], [307, 0, 0, 0, -183890], [311, 0, 1180, 0, 541030],
[313, -40, 1596, -36440, 803942], [317, 0, 204, 0, 211382], [331, 0, 0, 0, -115154],
[337, -8, 1116, -7096, 540422], [347, 0, 0, 0, -236210], [349, 0, 1100, 0, 546102]

終結根の分布は

$$y^2 = f(x) = x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+4) = x^9+3x^5-4x$$

$$\bar{f}_p(x) = x^8+a_px^7+b_px^6+c_px^5+d_px^4+pc_px^3+p^2b_px^2+p^3a_px+p^4 = 0,\ p = 2 \sim 349$$

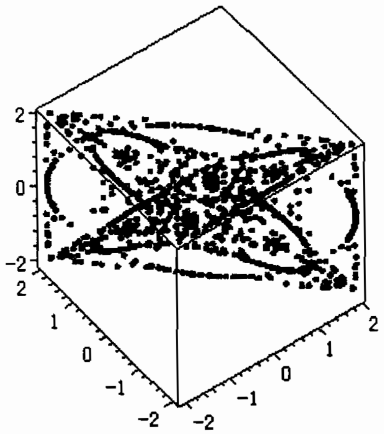


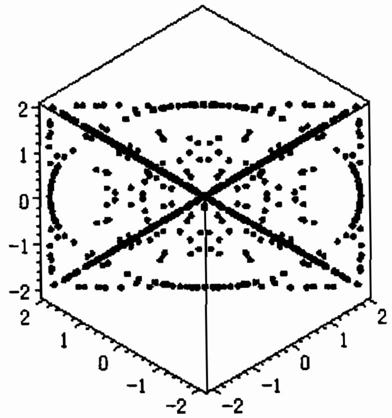
この角分布についても予測できない。

$$y^2 = f(x) = x^9+3x^5-4x$$

$$\underline{f}_p(u) = u^4-au^3+(b-4)u^2+(3a-c)u+d-2b+2 = 0$$

$$\bar{f}_p(x) = \bar{f}_p(y) = \bar{f}_p(z) = 0,\ p = 2 \sim 349$$





終結多項式の分解の様子は次のようである。

[2, x^4-9x^2+2x+8], [3, $x^2(x^2-12)$], [5, x^4-22x^2+71], [7, x^4-16x^2+32],
[11, $(x-6)(x+6)(x^2-8)$], [13, $(x^2-20)^2$], [17, $(x^2-52)^2$], [19, $x^4+32-76x^2$],
[23, x^4-16x^2+32], [29, $(x^2-20)^2$], [31, x^4], [37, $(x-6)^2(x+6)^2$], [41, $(x^2+4x-28)^2$],
[43, x^4-172x^2+2048], [47, x^4-80x^2+1568], [53, $(x^2-116)^2$], [59, x^4-236x^2+5408],
[61, $(x^2-132)^2$], [67, x^4-268x^2+512], [71, x^4-128x^2+2048], [73, $(x^2-276)^2$],
[79, $x^4-320x^2+25088$], [83, x^4-332x^2+4608], [89, $x^4-520x^2+59408$], [97, $(x^2-372)^2$],

[101, $(x^2-244)^2$], [103, $x^4-400x^2+30752$], [107, x^4-428x^2+4608], [109, $(x-14)^2(x+14)^2$], [113, $(x+2)^4$], [127, x^4-80x^2+32], [131, x^4-524x^2+1568], [137, $(x^2+20x-28)^2$], [139, $x^4-556x^2+20000$], [149, $(x-22)^2(x+22)^2$], [151, $x^4-320x^2+25088$], [157, $(x^2-132)^2$], [163, $x^2(x^2-652)$], [167, x^4-272x^2+1568], [173, $(x^2-580)^2$], [179, x^4-716x^2+7200], [181, $(x^2-564)^2$], [191, x^4-64x^2+512], [193, $x^4-1000x^2+176272$], [197, $(x^2-436)^2$], [199, x^4-64x^2+512], [211, $x^4-844x^2+64800$], [223, x^4-208x^2+1568], [227, $x^4-908x^2+41472$], [229, $(x^2-436)^2$], [233, $x^4-1320x^2+361872$], [239, x^4-320x^2+512], [241, $x^4-1544x^2+563216$], [251, $x^4-1004x^2+32$], [257, $(x^2+4x-124)^2$], [263, $x^4-1040x^2+70688$], [269, $(x-18)^2(x+18)^2$], [271, $x^4-512x^2+32768$], [277, $(x^2-868)^2$], [281, $x^4-1864x^2+835856$], [283, $x^4-1132x^2+73728$], [293, $(x^2-804)^2$], [307, $x^4-1228x^2+4608$], [311, x^4-64x^2+512], [313, $(x^2+20x-28)^2$], [317, $(x^2-532)^2$], [331, $x^4-1324x^2+103968$], [337, $(x^2+4x-124)^2$], [347, $x^4-1388x^2+4608$], [349, $(x^2-148)^2$]

先ず、既約なものは、そのガロア群によって分類する。

$$(x-a)(x+a)(x^2+b)$$

[11]

$$(x^2+ax+b)^2$$

[137,257,313,337]

$$(x^2+a)^2,\ (x-a)^2(x+a)^2$$

[13,17,29,53,61,73,97,101,113,157,173,181,197,229,277,293,317,349], [37,109,149,269]

$$S(4)=4!$$

[2]

$$D(4)=2\times4$$

[5, 19, 43, 59, 67, 83, 89, 107, 131, 139, 179, 193, 211, 227, 233, 241, 251, 281, 283, 307, 331, 347]

$$C(4)=4$$

[7, 23, 47, 71, 79, 103, 127, 151, 167, 191, 199, 223, 239, 263, 271, 311]

$$x^2(x^2+a)$$

[3,163]

$p=2\sim347$ の範囲では、例えば、mod 48 では

A mod 48 = {1,5,11,35, 41,43}, B mod 48 = {7,23,31,47}

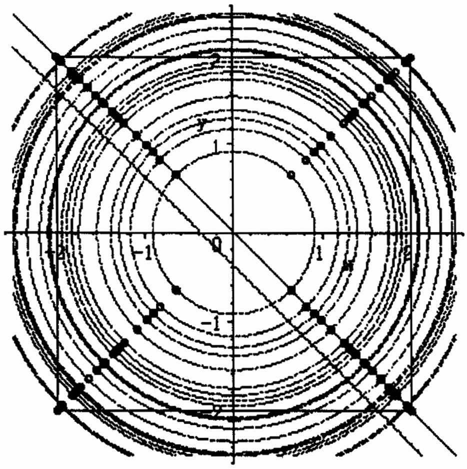
であるが…兎も角、検討を要す。

標準楕円曲線の場合

$$\Diamond f(x,y) = x^3+x^2y+xy^2+y^3-a(x^2+xy+y^2)+(b-4)(x+y)+3a-c=0$$

$$(x^2+a)^2,\ (x-a)^2(x+a)^2$$

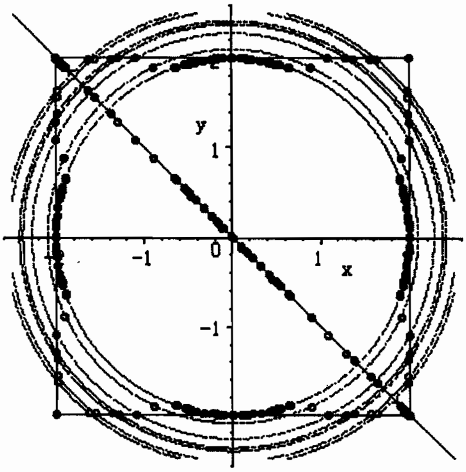
p = 13,17,29,37,53,61,73,97,101,109,113,149,157,173,181,197,229,269, 277,293,317,349



この場合 p = 113, $(x+2)^4$ の場合のみ x+y と異なる因子をもつ。

$$D(4) = 2\times 4$$

[5, 19, 43, 59, 67, 83, 89, 107, 131, 139, 179, 193,
211, 227, 233, 241, 251, 281, 283, 307, 331, 347]



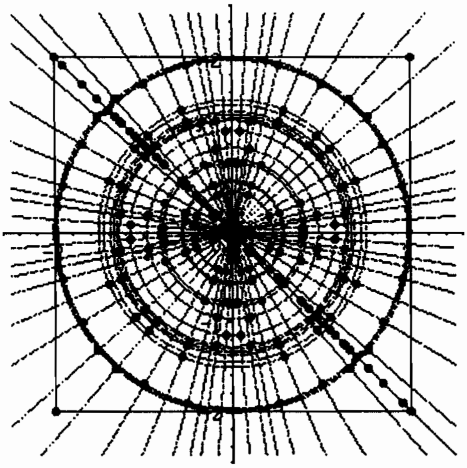
この場合、すべて、x+y の因子をもち、円の方程式が

$$x^2+y^2 = 4$$

と異なるのは、p = 5,89,193,233,241,281 の場合である。

$$C(4) = 4$$

[7, 23, 47, 71, 79, 103, 127, 151, 167, 191, 199, 223, 239, 263, 271, 311]



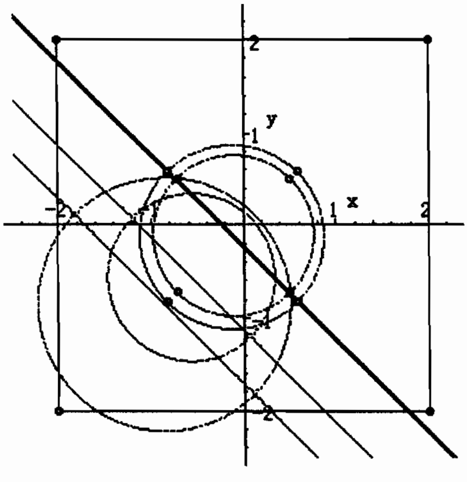
この場合も、すべて、x+y の因子をもつことに変わりはないが、今度は、原点を通る何本かの直線上に分布している。これらは、

$$c = 2/7,\ 34/31,\ 2,\ 158/47,\ 34/7,\ 46/7,\ 14$$

$$x^2 \pm cxy - y^2 = 0$$

で、2直線を表している。

$(x^2+ax+b)^2$, [137,257,313,337]



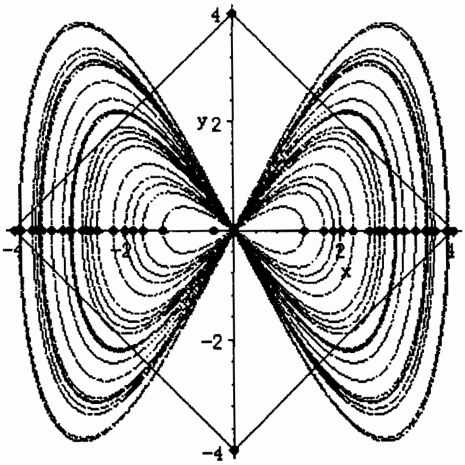
Euler 型の楕円曲線の方でも、本質は一緒であるが、記す。

$$y^2 = f(x) = x^9+3x^5-4x$$

$$16y^2 = (a-2x)(2x^3-3ax^2+4xb-16x+12a-4c)$$

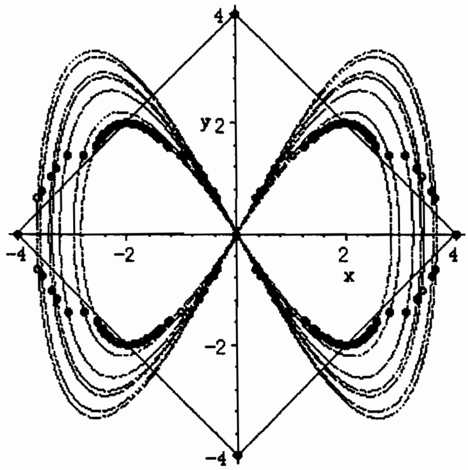
$$s = x+y,\ t = x-y,\ z = (2s-a)t/4$$

p = 13,17,29,37,53,61,73,97,101,109,113,149,157,173,181,197,229,269, 277,293,317,349



D(4) = 2×4

[5, 19, 43, 59, 67, 83, 89, 107, 131, 139, 179, 193,
211, 227, 233, 241, 251, 281, 283, 307, 331, 347]



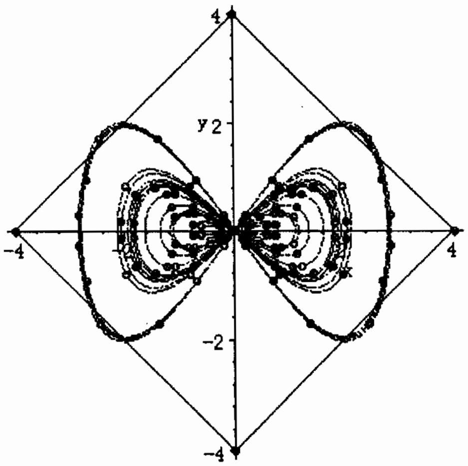
勿論、レムニスケート形は $x^2+y^2=4$ の像

$$4y^2+x^4-8x^2=0$$

である。

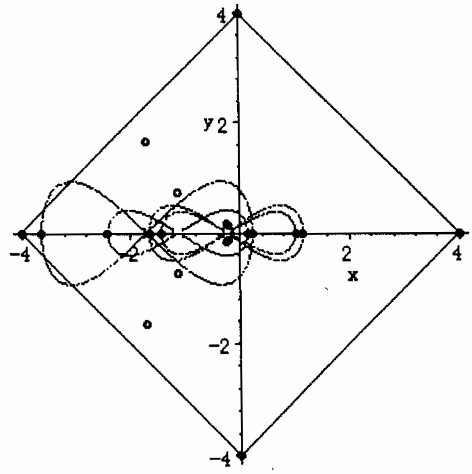
C(4) = 4

[7, 23, 47, 71, 79, 103, 127, 151, 167, 191, 199, 223, 239, 263, 271, 311]



$(x^2+ax+b)^2$

[137,257,313,337]



例 5.

$$y^2 = x^9+1 = (x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1) = f(x)$$

この、超楕円曲線の基本データは次のようである。

$[p, a_p, b_p, c_p, d_p]$

[2, -1, -1, -3, -6], [3, 0, 0, 0, 0], [5, 0, 5, 0, 0], [7, -4, 7, -28, 112], [11, 0, 11, 0, 0],

[13, -2, 13, -26, 52], [17, 0, 68, 0, 1734], [19, 8, 28, 8, -170], [23, 0, 23, 0, 0],

[29, 0, 29, 0, 0], [31, -4, 31, -124, 496], [37, -8, 28, -152, 694], [41, 0, 41, 0, 0],

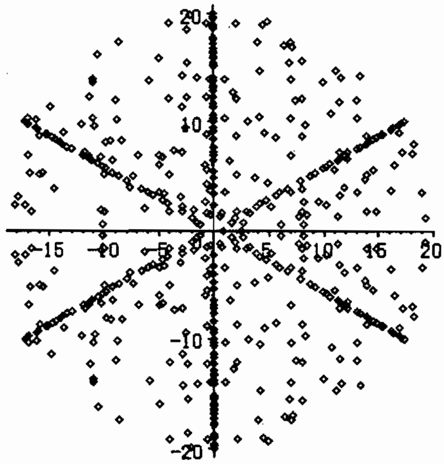
[43, 8, 43, 344, 2752], [47, 0, 47, 0, 0], [53, 0, 212, 0, 16854], [59, 0, 59, 0, 0],
[61, -14, 61, -854, 11956], [67, -16, 67, -1072, 17152], [71, 0, 284, 0, 30246],
[73, -8, -116, 136, 14086], [79, -4, 79, -316, 1264], [83, 0, 83, 0, 0],
[89, 0, 356, 0, 47526], [97, -14, 97, -1358, 19012], [101, 0, 101, 0, 0],
[103, 20, 103, 2060, 41200], [107, 0, 428, 0, 68694], [109, -8, 28, 808, -22826],
[113, 0, 113, 0, 0], [127, 8, -116, -1240, 6118], [131, 0, 131, 0, 0], [137, 0, 137, 0, 0],
[139, -16, 139, -2224, 35584], [149, 0, 149, 0, 0], [151, -4, 151, -604, 2416],
[157, -14, 157, -2198, 30772], [163, 8, 316, 2312, 58582], [167, 0, 167, 0, 0],
[173, 0, 173, 0, 0], [179, 0, 716, 0, 192246], [181, -8, -260, -152, 80182],
[191, 0, 191, 0, 0], [193, -2, 193, -386, 772], [197, 0, 788, 0, 232854],
[199, -64, 2044, -43840, 703846], [211, -16, 211, -3376, 54016],
[223, -28, 223, -6244, 174832], [227, 0, 227, 0, 0], [229, 22, 229, 5038, 110836],
[233, 0, 932, 0, 325734], [239, 0, 239, 0, 0], [241, -14, 241, -3374, 47236],
[251, 0, 1004, 0, 378006], [257, 0, 257, 0, 0], [263, 0, 263, 0, 0],
[269, 0, 1076, 0, 434166], [271, 8, -404, 296, 184294], [277, -26, 277, -7202, 187252],
[281, 0, 281, 0, 0], [283, 32, 283, 9056, 289792], [293, 0, 293, 0, 0],
[307, 8, -260, -376, 58390], [311, 0, 311, 0, 0], [313, 22, 313, 6886, 151492],
[317, 0, 317, 0, 0], [331, 32, 331, 10592, 338944], [337, 34, 337, 11458, 389572],
[347, 0, 347, 0, 0], [349, -14, 349, -4886, 68404], [353, 0, 353, 0, 0],
[359, 0, 1436, 0, 773286], [367, -4, 367, -1468, 5872], [373, -38, 373, -14174, 538612],
[379, -64, 2476, -69184, 1519894], [383, 0, 383, 0, 0], [389, 0, 389, 0, 0],
[397, -8, 316, -2648, -10730], [401, 0, 401, 0, 0]]

終結根の分布は

$$y^2 = x^9+1 = (x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1) = f(x)$$

$$\bar{f}_p(x) = x^8+a_px^7+b_px^6+c_px^5+d_px^4+pc_px^3+p^2b_px^2+p^3a_px+p^4 = 0$$

$$p = 2 \sim 401$$



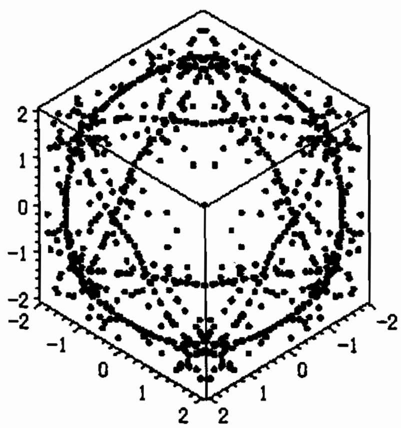
であり、角度π/6, π/2, 5π/6の点分布と、残りの連続分布の和である。これが一様分布かどうかは分からない。

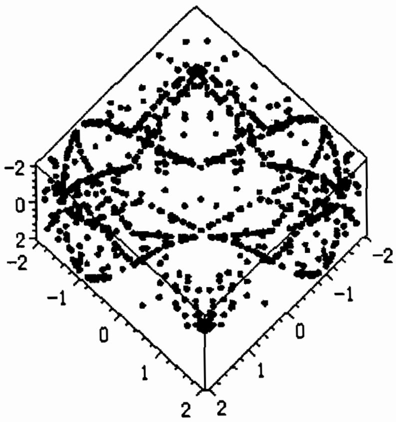
標準係数分布(normal coefficient distribution)についても、2方向からの視点について記す。3次元空間では、美しい"王冠"(crown shaped)の形をしており、Tchebychevの関数が陽に含まれる(explicitly included)という意味でも面白い場合である。

$$y^2 = x^9+1 = (x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1) = f(x)$$

$$f_p(u) = u^4-au^3+(b-4)u^2+(3a-c)u+d-2b+2 = 0$$

$$\bar{f}_p(x) = \bar{f}_p(y) = \bar{f}_p(z) = 0, \ p = 2 \sim 401$$





終結多項式の分解の様子は次のようである。

[[2, $(x+1)(x^3-9x+6)$], [3, $x^4+18-12x^2$], [5, $x^2(x^2-15)$], [7, $(x+4)(x^3-21x+28)$],
[11, $x^2(x^2-33)$], [13, $(x+2)(x^3-39x+26)$], [17, x^4], [19, $(x-8)(x^3-48x+64)$],
[23, $x^2(x^2-69)$], [29, $x^2(x^2-87)$], [31, $(x+4)(x^3-93x+124)$],
[37, $(x-10)(x^3+18x^2+60x-136)$], [41, $x^2(x^2-123)$], [43, $(x-8)(x^3-129x-344)$],
[47, $x^2(x^2-141)$], [53, x^4], [59, $x^2(x^2-177)$], [61, $(x+14)(x^3-183x+854)$],
[67, $(x+16)(x^3-201x+1072)$], [71, x^4], [73, $(x-10)(x^3+18x^2-228x-4168)$],
[79, $(x+4)(x^3-237x+316)$], [83, $x^2(x^2-249)$], [89, x^4], [97, $(x+14)(x^3-291x+1358)$],
[101, $x^2(x^2-303)$], [103, $(x-20)(x^3-309x-2060)$], [107, x^4],
[109, $(x+2)(x^3+6x^2-420x-2584)$], [113, $x^2(x^2-339)$],
[127, $(x-20)(x^3+12x^2-384x-3392)$], [131, $x^2(x^2-393)$], [137, $x^2(x^2-411)$],
[139, $(x+16)(x^3-417x+2224)$], [149, $x^2(x^2-447)$], [151, $(x+4)(x^3-453x+604)$],
[157, $(x+14)(x^3-471x+2198)$], [163, $(x-8)(x^3-336x-1088)$], [167, $x^2(x^2-501)$],
[173, $x^2(x^2-519)$], [179, x^4], [181, $(x+26)(x^3-18x^2-516x+9224)$], [191, $x^2(x^2-573)$],
[193, $(x+2)(x^3-579x+386)$], [197, x^4], [199, $(x+28)(x^3+36x^2+240x-1088)$],
[211, $(x+16)(x^3-633x+3376)$], [223, $(x+28)(x^3-669x+6244)$], [227, $x^2(x^2-681)$],
[229, $(x-22)(x^3-687x-5038)$], [233, x^4], [239, $x^2(x^2-717)$],
[241, $(x+14)(x^3-723x+3374)$], [251, x^4], [257, $x^2(x^2-771)$], [263, $x^2(x^2-789)$],
[269, x^4], [271, $(x+28)(x^3-36x^2-480x+19648)$], [277, $(x+26)(x^3-831x+7202)$],
[281, $x^2(x^2-843)$], [283, $(x-32)(x^3-849x-9056)$], [293, $x^2(x^2-879)$],
[307, $(x+16)(x^3-24x^2-1104x+25408)$], [311, $x^2(x^2-933)$], [313, $(x-22)(x^3-939x-6886)$],

[317, $x^2(x^2-951)$], [331, $(x-32)(x^3-993x-10592)$], [337, $(x-34)(x^3-1011x-11458)$],
[347, $x^2(x^2-1041)$], [349, $(x+14)(x^3-1047x+4886)$], [353, $x^2(x^2-1059)$], [359, x^4],
[367, $(x+4)(x^3-1101x+1468)$], [373, $(x+38)(x^3-1119x+14174)$],
[379, $(x-8)(x^3+72x^2+1536x+8704)$], [383, $x^2(x^2-1149)$], [389, $x^2(x^2-1167)$],
[397, $(x-34)(x^3+42x^2+156x-1576)$], [401, $x^2(x^2-1203)$]]

これも因数分解の型によって分類しておく。

$$(x+a)(x^3+bx^2+cx+d)$$

[37,73,109,127,181,199,271,307,379,397]

$$(x+a)(x^3+bx+c)$$

[2,7,13,19,31,43,61,67,79,97,103,139,151,157,163,
193,211,223,241,277,283,313,331,337,349,367,373]

$$x^2(x^2+a)$$

[5,11,23,29,41,47,59,83,101,113,131,137,149,167,173,191,
227,239,257,263,281,293,311,317,347,353,383,389,401]

$$x^4$$

[17,53,71,89,107,179,197,233,251,269,359]

$$C(4)=4$$

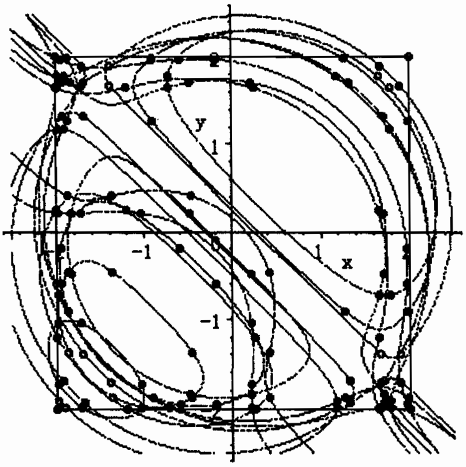
[3]

標準楕円曲線の場合

$$\Diamond f(x,y)=x^3+x^2y+xy^2+y^3-a(x^2+xy+y^2)+(b-4)(x+y)+3a-c=0$$

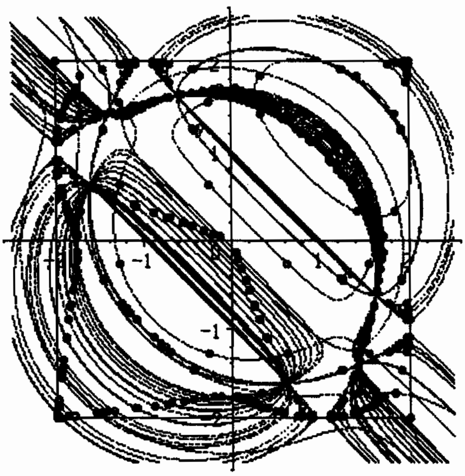
$$(x+a)(x^3+bx^2+cx+d)$$

[37,73,109,127,181,199,271,307,379,397]



$(x+a)(x^3+bx+c)$

[2,7,13,19,31,43,61,67,79,97,103,139,151,157,163,
193,211,223,241,277,283,313,331,337,349,367,373]



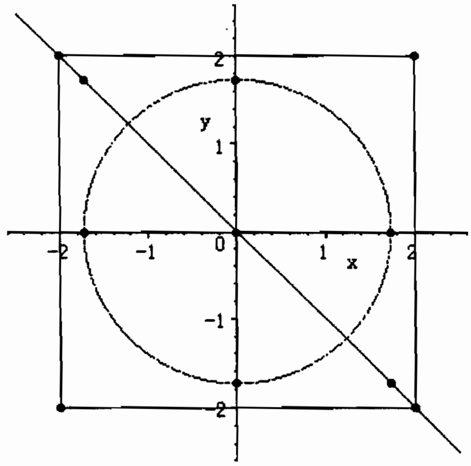
これらの曲線はすべて

$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $((\sqrt{5}-1)/2, (-\sqrt{5}-1)/2)$, $((-\sqrt{5}-1)/2, (\sqrt{5}-1)/2)$

などを通る。

$x^2(x^2+a)$

[5,11,23,29,41,47,59,83,101,113,131,137,149,167,173,191,
227,239,257,263,281,293,311,317,347,353,383,389,401]



この場合は、簡潔で、$x+y=0$, $x^2+y^2=3$ の上に分布している。

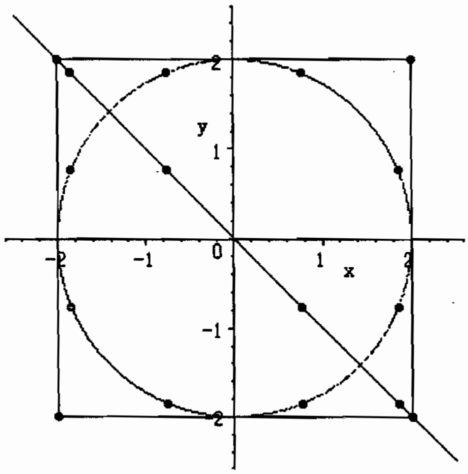
$$x^4$$

[17,53,71,89,107,179,197,233,251,269,359]

この場合は、図は描かない。すべて原点に退化している。

C(4) = 4

[3]



第 2 の図形の場合はもっと簡潔な表現が可能であろうことを示している。

Tchebychev の関数は、本質的には(=2 倍に拡大しているが)

$$x = t+1/t,\ y = t^n+1/t^n$$

から、t を消去したものである。最初の 10 個を記しておくと

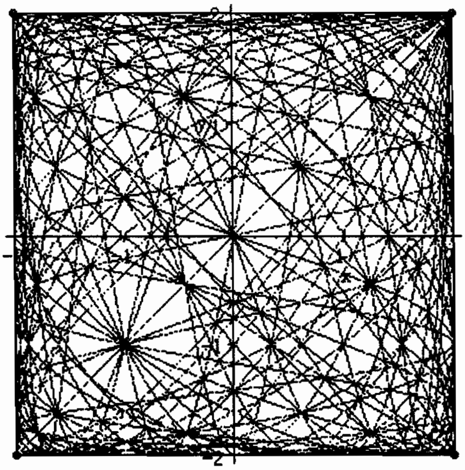
$$x,\ x^2-2,\ x^3-3x,\ x^4-4x^2+2,\ x^5-5x^3+5x,\ x^6-6x^4+9x^2-2,\ x^7-7x^5+14x^3-7x,$$
$$x^8-8x^6+20x^4-16x^2+2,\ x^9-9x^7+27x^5-30x^3+9x,\ x^{10}-10x^8+35x^6-50x^4+25x^2-2$$

である。また、リサージュの曲線（Lissajous curve）は

$$x = t^m+1/t^m,\ y = t^n+1/t^n$$

から t を消去したものである。以下は n,m ≤ 6 のリサージュの曲線の図である。

Lissajous curve, n,m ≤ 6



以下の図は、n,m ≤ 4 のリサージュ曲線

$$x\text{-}y,\ y = x^2-2,\ y = x^3-3x,\ y^2 = x^3-3x+2 = (x+2)(x-1)^2$$
$$x^2+xy+y^2 = 3,\ y = x^4-4x^2+2,\ x^4-y^3-4x^2+3y+2 = 0$$

の中から、

$$\{y = x,\ y = x^3-3x,\ x = y^3-3y,\ x^2+xy+y^2 = 3\}$$

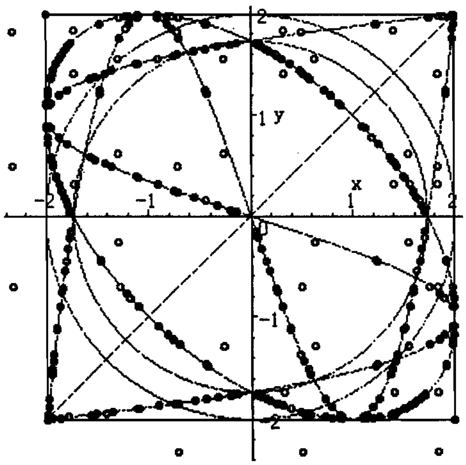
ともに描いたものである。尚、楕円は $y = x^3-3x$ の差商

$$\Diamond(x^3-3x) = ((x^3-3x)-(y^3-3y))/(x-y) = x^2+xy+y^2-3$$

であり、これらで標準係数多項式の絡子群（twiner group）を成している。

$$(x+a)(x^3+bx+c)$$

[2,7,13,19,31,43,61,67,79,97,103,139,151,157,163,
193,211,223,241,277,283,313,331,337,349,367,373]



この曲線群の上にない点は p = 2 の場合である。これらはハート形(heart form)を成している。

37,73,109,127,181,199,271,307,379,397

の場合はリサージュ曲線とは関係なさそうである。

Euler 標準形の場合。

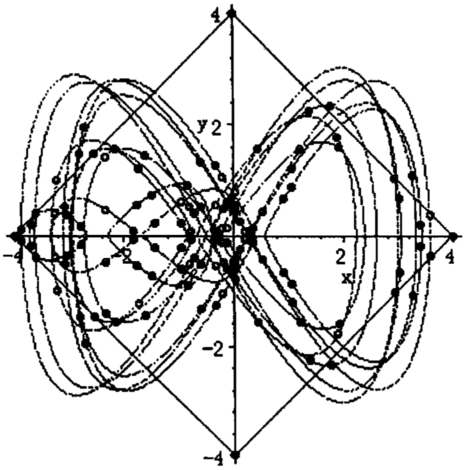
$$y^2 = x^9+1 = (x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1) = f(x)$$

$$16y^2 = (a-2x)(2x^3-3ax^2+4xb-16x+12a-4c)$$

$$s = x+y,\ t = x-y,\ z = (2s-a)t/4$$

$$(x+a)(x^3+bx^2+cx+d)$$

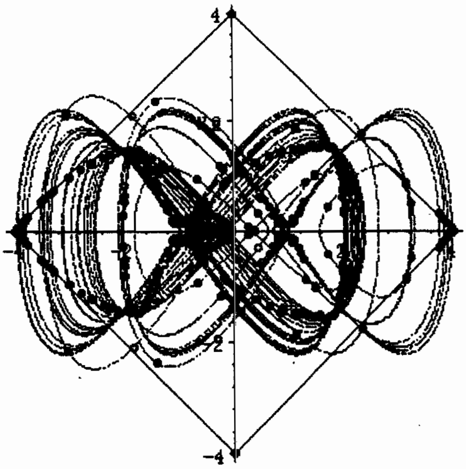
[37,73,109,127,181,199,271,307,379,397]



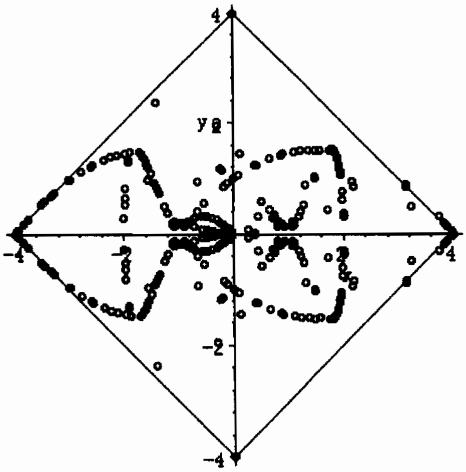
$(x+a)(x^3+bx+c)$

2,7,13,19,31,43,61,67,79,97,103,139,151,157,163,

193,211,223,241,277,283,313,331,337,349,367,373



曲線群を除いた方が、寧ろ、本質が見えやすいかも知れない。



そこで、本来、そうあるべきなのだが、もとに戻って標準係数多項式の因数分解について考察する。分解式は

$(7x^3-21x+4\sqrt{7})(7x+4\sqrt{7})$, $(13x^3-39x+2\sqrt{13})(13x+2\sqrt{13})$,

$(31x^3-93x+4\sqrt{31})(31x+4\sqrt{31})$, $(43x^3-129x-8\sqrt{43})(43x-8\sqrt{43})$,

$(61x^3-183x+14\sqrt{61})(61x+14\sqrt{61})$, $(67x^3-201x+16\sqrt{67})(67x+16\sqrt{67})$,

$(79x^3-237x+4\sqrt{79})(79x+4\sqrt{79})$, $(97x^3-291x+14\sqrt{97})(97x+14\sqrt{97})$,

$(103x^3-309x-20\sqrt{103})(103x-20\sqrt{103})$, $(139x^3-417x+16\sqrt{139})(139x+16\sqrt{139})$,

$(151x^3-453x+4\sqrt{151})(151x+4\sqrt{151})$, $(157x^3-471x+14\sqrt{157})(157x+14\sqrt{157})$,

$(193x^3-579x+2\sqrt{193})(193x+2\sqrt{193})$, $(211x^3-633x+16\sqrt{211})(211x+16\sqrt{211})$,

$(223x^3-669x+28\sqrt{223})(223x+28\sqrt{223})$, $(241x^3-723x+14\sqrt{241})(241x+14\sqrt{241})$,

$(277x^3-831x+26\sqrt{277})(277x+26\sqrt{277})$, $(283x^3-849x-32\sqrt{283})(283x-32\sqrt{283})$,

$(313x^3-939x-22\sqrt{313})(313x-22\sqrt{313})$, $(331x^3-993x-32\sqrt{331})(331x-32\sqrt{331})$,

$(337x^3-1011x-34\sqrt{337})(337x-34\sqrt{337})$, $(349x^3-1047x+14\sqrt{349})(349x+14\sqrt{349})$,

$(367x^3-1101x+4\sqrt{367})(367x+4\sqrt{367})$, $(373x^3-1119x+38\sqrt{373})(373x+38\sqrt{373})$]

であり、因子の定数項の異なる $p=19, 163$（虚２次体、$Z(\sqrt{-n})$ の類数 1）

$(361x^3-912x+64\sqrt{19})(19x-8\sqrt{19})$, $(26569x^3-54768x-1088\sqrt{163})(163x-8\sqrt{163})$,

は、寧ろ $(x+a)(x^3+bx^2+cx+d)$ の仲間で、偶然に $b=0$ になった場合と見るべきかも知れない。何れにしても、標準係数多項式の一般形は

$$(px^3-3px+k\sqrt{p})(px+k\sqrt{p}) = p(\sqrt{p}(x^3-3x)+k)(\sqrt{p}x+k)$$
$$= p^2(x^4+k/\sqrt{p}\cdot x^3-3x^2-2k/\sqrt{p}\cdot x+k^2/p)$$

の形である。$z=-k/\sqrt{p}$ とおくと、一般形は

$$f(x) = x^4-zx^3-3x^2+2zx+z^2 = (x-z)(x^3-3x-z)$$

である。具体的には

$$f(x) ⓧ y-(x^3-3x) ⓨ f(y) = 0$$

が成立するが、詳しくは

$$f(x) ⓧ y-(x^3-3x) = (z-y)^3(z^3-3z-y)$$

であるから、

$$f(x) ⓧ y-(x^3-3x) ⓨ f(y) = (z-y)^3(z^3-3z-y) ⓨ f(y)$$
$$= (z-y ⓨ f(y))^3(z^3-3z-y ⓨ f(y))$$

となり、

$$z-y ⓨ f(y) = f(z) = 0$$

から、所要の等式が証明できた。つまり、

$$f(x) = 0 \rightarrow f(x^3-3x) = 0$$

であること、つまり、Tchebychev の 3 次式 $T_3(x) = x^3-3x$ が、この場合は、標準係数多項式のガロア群の生成元（generator）であることを意味している。

等式

$$u^4-au^3+(b-4)u^2+(3a-c)u+d-2b+2 = x^4-zx^3-3x^2+2zx+z^2$$

の係数を比較して、$a=z$ であるから、

$$b-4 = -3,\ 3a-c = 2a,\ d-2b+2 = a^2$$

である。これを解くと、$c = a, b = 1, d = a^2$ が得られる。

係数の標準化の原点に戻れば、$c_p = pa_p$, $b_p = p$, $d_p = pa_p^2$ であるから、基本データは

$$[p, a_p, b_p, c_p, d_p] = [p, a_p, p, pa_p, pa_p^2]$$

の形だったのである。標準係数多項式が

$$\underline{f}_p(x) = x^4-ax^3-3x^2+2ax+a^2$$

となるものは、

7,13,31,43,61,67,79,97,103,139,151,157,193,211,223,241,277,283,313,331,337,349,367,373

は、勿論であるが、401 までの 79 個の素数のうち

[2,3,17,19,37,53,71,73,89,107,109,127,163,179,
181,197,199,233,251,269,271,307,359,379, 397]

の 25 個を除くすべての素数である。79:25 ≒ 3:1 であるから、2/3 程度の場合は、標準係数対(normal coefficient pair)は

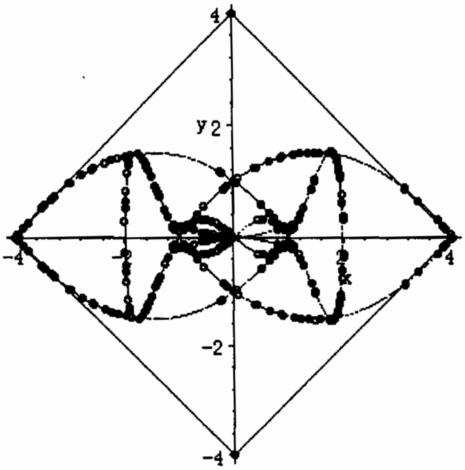
$$\{y = x,\ y = x^3-3x,\ x = y^3-3y,\ x^2+xy+y^2 = 3\}$$

上に分布している。これが、(素数上)確率 2/3 の係数多様体(coefficient manifold)である。

さて、本来の目的の曲線を求めて図示したものが次の図である。

$$64y^3+(128-48x^2)y^2+(12x^4-96x^2+64)y-x^2(x^2-1)(x^2-16) = 0$$

$$16y^2+3x^2(x^2-4)(x^2-1)^2 = 0$$



である。これらの曲線の由来について、個別に説明する。

$$64y^3+(128-48x^2)y^2+(12x^4-96x^2+64)y-x^2(x^2-1)(x^2-16)=0$$

については、

$$f(x)=x^4-ax^3-3x^2+2ax+a^2=(a-x)(a-x^3+3x)=0$$

の根として、$a, a-x^3+3x=0$ となる x をとった場合である。この場合は

$$s=a+x,\ t=a-x,\ z=(2s-a)t/4,\ a-x^3+3x=0$$

から、a, t, x を消去すればよい。最初の式より、$a=x-s$ であるから代入して、

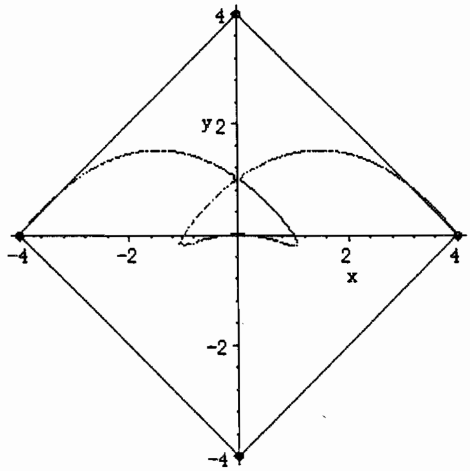
$$s+2x-x^3=0,\ 4z-(s+x)(s-2x)=0$$

を得るから、x を消去すると

$$s+2x-x^3 \mathbin{\textcircled{x}} 4z-(s+x)(s-2x)=64z^3+(128-48s^2)z^2+(12s^4-96s^2+64)z-s^2(s^2-1)(s^2-16)$$

となる。変数と上下は異なるが、これが求めるものである。

$$64y^3-(128-48x^2)y^2+(12x^4-96x^2+64)y+x^2(x^2-1)(x^2-16)=0$$



$$16y^2+3x^2(x^2-4)(x^2-1)^2=0$$

については、重根があるから、超楕円曲線ではないが…

$$s=x+y,\ t=x-y,\ z=(2s-a)t/4,\ a-x^3+3x=0,\ a-y^3+3y=0$$

から、a,t,x,y を消去したものである。具体的には、先ず、t は簡単に消去できるから

$$s=x+y,\ z=(2s-a)(x-y)/4,\ a-x^3+3x=0,\ a-y^3+3y=0$$

とし、$a=y^3-3y,\ x=s-y$ を代入すれば、

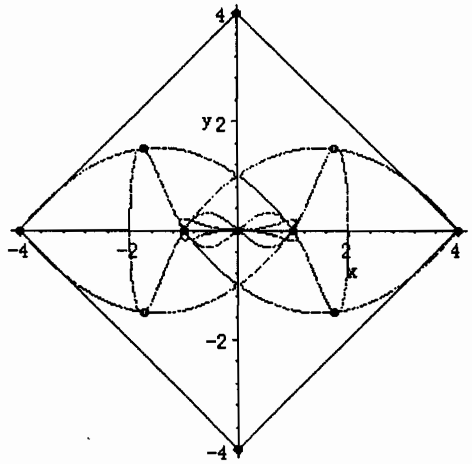
$$y^3-6y-(s-y)^3+3s=0,\ 4z-(2s+3y-y^3)(s-2y)=0$$

である。消去積 ($=y$ に関する終結式) をとると、

$$y^3-6y-(s-y)^3+3s \mathbin{\textcircled{y}} 4z-(2s+3y-y^3)(s-2y)=z(16z^2+3s^2(s^2-4)(s^2-1)^2)$$

が得られる。次の図は上記の曲線と重ねて表示した。$(\pm\sqrt{3},\ \pm 3/2)$は交点。

$$16y^2+3x^2(x^2-4)(x^2-1)^2=0$$



$$(4y/(x(x^2-1)))^2+3x^2=12$$

これは、上の式と同値であり、怪しく接した微妙に美しい図形である。

最初の例の $\sin^2$-予想は、風景(scenery)につての、他の例は、たまたま手にした、河原の小石(pebble)についての話である。種数 4 に限ってももっと多様な色合い(tint)の結晶が存在するに違いないと思う。

$\sin^2$-予想の方では $p = 10^3$ 程度の素数までの統計的なデータが得られればと期待している。種数 $4 = 2^2$、多項式の次数 $9 = 3^2$ はともに平方数である。

references

[1] Kanji Namba; *Genus 3 hyper-elliptic curves and their coefficient polynomials*,津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 30, 第 9 回 数学史シンポジウム(2008), pp.251-296.

[2] Kanji Namba; *Genus 4 hyper-elliptic curves and Galois group of their coefficient polynomials*,津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 31, 第 10 回 数学史シンポジウム(2009), pp.226-266.

[3] Kanji Namba; *Genus 4 hyper-elliptic curves and their coefficient polynomials*, 2010 年度応用数学合同研究集回報告集、龍谷大学瀬田キャンパス 2010.12.16-18, pp.29-34.