Lévy の安定過程からベキ乗分布へ

Si Si
愛知県立大学

1　はじめに

確率や統計の話をするとき、大抵は、ガウス分布が主役として、重要な役割を果たす。それに続くもものとして、連続型の分布であれば、一様分布とか指数分布などを思いつくかもしれない。

ここでは、最近盛んに問題にされている、安定分布、べき乗分布とも呼ばれる分布をとりあげて、そういう分布が現れる必然的な理由とか、はじめて、この分布がとりあげられたときの事情などを調べてみたい。

そうすることにより、安定分布のより深い認識と、その位置づけや、より適当な利用法などを考えるための資料ができる。

今回、報告したいことは、安定分布は

1.　歴史的にみて、確率論の中でガウス分布についでその重要性が認められ、古くからガウス分布と比較して、その性質が調べられてきたこと、

2.　統計学との連携、その他の諸科学への応用において、そのプロセスや成否を眺めて、理論の発展のためにそこでの経験を活かすことが望まれること、

以上について、簡単に述べたい。

2　安定分布の歴史

考え方と結果が現在に活きるものとして、興味深いいくつかの典型的な歴史の例をあげよう。

P. Lévy　(1886-1971)

1925年の著書では、誤差論、ガウス分布に深い関心をもち、中心極限定理についても研究結果を述べている。必然的にガウス分布の domain of attraction にも興味を持った。同時に、ガウス分布の domain　of attraction に入らない分布（彼は exceptionnelle な分布という）の極限分布になるものがあると考えて、安定分布（Cauchy 分布を例とする）にいたる。

このあたりの事情は彼の Notice (1935)　[3] に要領よくまとめられている。すなわち、1923-24 年の誤差論の研究につづいて、安定分布の研究が始まる。この方向への motivation の一つはガウス分布への収束を示す中心極限定理では、各変数の分布について、2次のモーメントの存在を仮定　（実はもう少し強い仮定）していることである. 周知のコーシー分布は平均すら存在しない。

モーメントの存在を仮定しないで、分布の特徴づけの方法とか、各種の極限定理などをを議論したいという願いがあった。そこで提案された特長づけの一つは分布の安定性であった。それは次のように定義される。

X, Y が独立で、それらの分布がある分布と同型とする。a, b を任意の正定数として、 $aX + bY$ もまたその分布と同型であるとき, その分布をひとまず**安定分布** とよんだ。そして次のような特性関数 $\varphi(z)$ をとりあげた。

$$\varphi(z) = \exp[-c|z|^{\aleph}],\ c > 0, 0 < \aleph < 2.$$

これには安定分布で、原点に関して対称なものが対応する。$\aleph$ は安定分布の指数である。除かれた $\aleph = 2$ はガウス分布に相当し、特に $\aleph = 1$ はコーシー分布が対応する。

[註 1.] 少し後で、 $\aleph = \frac{1}{2}$ の場合に、対応する確率分布の密度関数 $p(x)$ が具体的に求められた： $(0, \infty)$ 上の分布で、その密度関数 $p(x)$ は

$$p(x) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} \exp[-\frac{c^2}{2x}].$$

これがブラウン運動の maximum の分布の逆関数の分布に現れることは興味深い。特にブラウン運動の関数として安定分布をもつものが現れ、ポアソン分布につながることは意義深い。

[註 2.] $\aleph$ について、通常の積演算に対して subordination の演算が対応して、興味深い。また $\aleph \to 2$ のとき指数 $\aleph$ の安定分布が、ある意味で、ガウス分布に収束することが証明出来ることは意味がある。

一方、1923 年から、Compte Rendu に 続けてこの種の分布に関係した結果を報告している．はじめは

微分や積分の演算の fractional power に興味をもち、その確率論への応用を論じている。ガウス分布は z^2 に、またコーシー分布は $|z|$ に対応するから任意ベキを考えるのは自然であろう。

変数 z の fractional power $\psi(z) = -c|z|^\alpha$ ただし $c > 0$、をみるとき、確率論ではそれは $0 < \alpha \leq 2$ のとき、$\exp[\psi(z)]$ は、確率分布の特性関数である。それが決める分布は安定分布であり、α はその「指数」ということになる。Lévy は、そのときの対応する分布をきめるのにフーリエ逆変換を試みている。

この方向の研究報告は 1936 年頃まで続き、1937 年の書物 [4] VII 章 63 節以後で総合的に加法過程論の中で詳しく論じられている。因みに VII 章のタイトルは Les intégrales à éléments aléatoires indépendants となっている。過程（安定過程）と直接むすびつける Lévy の考え方がここに出ているように見られる。

我々が、ベキ乗分布を研究する一つの有力な方法として、加法過程（今の場合は安定課程）に埋め込む、すなわち加法過程のある一時点での分布とみる方法を提唱してきたが、これは Lévy によって理論的に裏付けられるとしてよかろう。

Poisson 変数の非線形解析についての Lévy による特色ある展開は [5] にみられる、その一部は [13] でも実現している。

なお、以上の結果を N. Wiener の [14] と対照したい。難解な論文ではあるが。

3 A.N. Kolmogorov and V.M. Zolotarev

Gnedenko-Kolomogorov [6] には、ガウス分布に対しても、安定分布に対しても、それぞれの分布に対する domain of attraction についての詳しい記述があるが, 一面それは安定分布のもつ特性を表しているといえる。

Zolotarev は、そろ著書 [17] において domain of attraction を安定分布の定義に使っている。勿論、すぐに Lévy の定義と同等であることがわかるが。

なお、Gnedenko-Kolomogorov [6] では 安定分布の扱いについて Lévy とは僅かながら差異があり、それなりに考え方の基本がうかがえる。

Zolotarev [17] にもどる。安定分布の総合的理論のはじまりを Lévy としていて、 [2], [?] をあげいるところは自然であろう。また指数 α が 2 のときは周知のことであり、$\alpha = 1$ もコーシー分布 (1853) として列外である。とくに 特性関数が

$$\varphi(t) = \exp[-\lambda]|t^{-3/2},\ \lambda > 0,$$

で表わされる Holsmark(1919) の分布 ($\alpha = \frac{3}{2}$)、また指数が $\frac{1}{2}$ の（Zolotarev は これをLévy 分布と呼んでいる）安定分布の密度関数

$$x^{-3/2}\exp[-\frac{1}{4x}]/2\sqrt{\pi},\ x > 0,$$

を紹介している。

一般の安定分布については、特定するパラメータを

導入し、その推定の問題も論じていて、現代の話題につながる。

この書物は 1983 に書かれたものであるが、歴史的なことも多く書かれていて、興味深い。

4 B. Mandelbrot と W. Feller

Benoit Mandelbrot は,やはり有名な Szolen Mandelbrojt (1899-1983) の甥（オイ）にあたる。

Lévy の考え方を follow している面が多い。Lévy flight なる言葉も使っているが、この言葉を使う理由は想像するのみである。[15] 参照では物理への応用が主題となっていて、興味深い種々の結果が報告されている。。

Fractal の名のもとに、安定分布に関連した興味深い話題を提供していて、これにも注目したい。

W. Feller も安定分布に興味を寄せているが、motivation も含めて彼固有の方法で議論している。とくに $\alpha = \frac{1}{2}$ の場合、その分布をガウス分布関数の変形で示したり Feller [1] II, Chap. VI., また　$\alpha = \frac{3}{2}$ のときの Holtsmark 分布では星の重力場からくることを説明したり、興味深い説明がある。

5　佐藤健一

名著 [12] では、ここで取り上げた安定分布、さらに安定過程について、歴史も含むが、最近の研究結果も網羅されていて、安定分布の歴史を知って、この方面に興味をもたれた方々に、強くお薦めしたい書物である。

6　発展について

その後、いろいろな方向への発展があり、周知の通りである。たとえば、Satô [12] 参照。

ここでは次の3点に注意したい。

1）ベキ乗分布としての応用。

データがあって、その統計的取り扱いでは、まず指数 α によるクラス分けである。指数 α の安定分布の密度関数 $p(\alpha, x)$ について、x が大きいときの近似式

$$p(\alpha, x) \ \sim \ cx^{-(1+\alpha)}$$

を全領域に適用（すなわち誤用）して最小二乗法を使って指数を推定するのは疑問である。

データの小さな数値は無視して、大きな数値の一定区間を二つ選んで、両区間の総和を比較すれば指数 α の推定値が得られる。この方法をすすめたい。

2) Zolotarev の研究。

[17] の発展。

3) Jump finding.

Lévy 過程に対して、複合ポアソン過程の Lévy-Itô 分解を実質的に行う。それには空間変数 u をパラメータに持つ新しい形のノイズの超汎関数の空間を用意する必要がある。その準備は [16] による。

参考文献

[1] W. Feller, An introduction to probability theory and its applications. vol,I 1950, vol. II 1966. John Wiley & Sons, Inc.

[2] P. Lévy, Calcul des probabilit'ees. Gauthier-Villars. 1925. IIéme Part. Chap. VI. Les lois exceptionnelles.

[3] P. Lévy, Notice sur les travaux scientifiques. Hermann. 1935.

[4] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires. Gauthier-Villars, 1937,

[5] P. Lévy, Sur les exponentielles de polynomes et sur l'arithmétique des products de loi de Poisson. Ann. École Normale Supérieur. 54 (1937), 231-292,

[6] B.V. Gnedenko and A.N. Kolmogorov, Limit theorems for sums of independent random variables. transl. from Russian Addison Wesley Pub. Co. 1954.

[7] B. Mandelbrot, Les objects fractals. Flammarion. 1975.

[8] S.I. Resnick, Heavy-Tail phenomena. Probablistic and statistical modeling. Springer. 2007.

[9] D. Sorensen and D. Gianola, Likelihood, Bayesian and MCMC methods in quantitative genetics. Springer. 2002.

[10] N.N. Taleb, The black swan, The impact of the highly improbable. Penguin Books. 2008.

[11] M. Buchanan, Ubiquity. 2000. 邦訳　マーク・ブキャナン、歴史は「ベキ乗則」で動く。早川書房。2009.

[12] 佐藤健一，加法過程、紀伊国屋数学叢書 33. 1990.

[13] T. Hida and Si Si, An innovation approach to random fields. Application of white noise theory. World Sci. Pub. Co. 2004.

[14] N. Wiener and A. Wintner, The discrete chaos. Amer. J. of Math. 65 (1943), 279-298.

[15] M. Shlessinger et al ed. Lévy flights and related topics in Physiscs, L.N. in Phys, 450, Springer (1995).

[16] T. Hida, Si Si and Win Win Htay, A new noise of Poisson type and its gneralized funxtionals. to appear

[17] V.M. Zolotarev, One-dimensional stable distributions. Transl. Math. Monographs vol. 65. American Math. Soc.1986. Russian Original Nauka 1983.