行列式の転置不変性について江戸好みの証明

小松彦三郎 (東京大学・大学院数理科学研究科・名誉教授)
酒井勇輔 (東京理科大学・大学院理学研究科数学専攻・修士)

関孝和 [1] と Étienne Bézout [6] は二つの代数方程式

$$f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = 0, \tag{1}$$
$$g(X) = p_0 + p_1 X + \cdots + p_m X^m = 0, \tag{2}$$

から共通の未知数 X を消去した結果が係数 a_i, p_j から計算できる行列式 $= 0$ で表されることを示し、方程式論、広くは代数学に画期を齎したのであるが、両者ともに行列式一般に名前を与えることすらせず、ましてや行列式自体の性質を調べることも殆どしなかったために、行列式は、いわば、同時代人はおろかその後約150年もの間放置されたままになっていた。われわれはその後の大発展を知っているのでずるいのであるが、ここではわれわれの知識を江戸時代初期のものに制限し、行列式の定義から始めて連立代数方程式の未知数消去の理論が展開できるまでの道筋を述べたい。また、関からわずかに遅れて関西在住の数学者田中由真の著書『算学紛解』[2] および井関知辰の『算法発揮』[3] でも行列式を用いた消去の理論が展開されているが、これらの著書では行列式の行と列の役割が取り代わっている。それでもうまくゆくのは行列式は転置で値が変わらないためであるが、昔の本に証明はない。ここでは、19世紀イギリスの数学者 J. J. シルヴェスターの一定理を和算で許される論法のみを用いて証明し、これを用いて古今東西の行列式が同じである事を示す。

1 関孝和著「解伏題之法」での行列式の定義

$A, B, C, \cdots$ を可換環 $\mathbf{K}$ の元とする。消去の理論の場合には消去したい文字 X 以外の文字に関する数係数多項式全体をとっておけばよい。関

の『解伏題之法』[1] (1683) の第 13–15 丁ではこれらの元の正方行列に対してその行列式を行列の次数に関して帰納的に次のように定義する：

$$|A| := A, \quad \begin{vmatrix} D & B \\ C & A \end{vmatrix} := B|C| - D|A|, \tag{3}$$

$$\begin{vmatrix} I & F & C \\ H & E & B \\ G & D & A \end{vmatrix} := C \begin{vmatrix} H & E \\ G & D \end{vmatrix} - F \begin{vmatrix} H & B \\ G & A \end{vmatrix} + I \begin{vmatrix} E & B \\ D & A \end{vmatrix}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} P & L & H & D \\ O & K & G & C \\ N & J & F & B \\ M & I & E & A \end{vmatrix} &:= D \begin{vmatrix} O & K & G \\ N & J & F \\ M & I & E \end{vmatrix} - H \begin{vmatrix} O & K & C \\ N & J & B \\ M & I & A \end{vmatrix} \\ &\quad + L \begin{vmatrix} O & G & C \\ N & F & B \\ M & E & A \end{vmatrix} - P \begin{vmatrix} K & G & C \\ J & F & B \\ I & E & A \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{vmatrix} Y & T & O & J & E \\ X & S & N & I & D \\ W & R & M & H & C \\ V & Q & L & G & B \\ U & P & K & F & A \end{vmatrix} := E \begin{vmatrix} X & S & N & I \\ W & R & M & H \\ V & Q & L & G \\ U & P & K & F \end{vmatrix} - J \begin{vmatrix} X & S & N & D \\ W & R & M & C \\ V & Q & L & B \\ U & P & K & A \end{vmatrix} \pm etc.. \tag{6}$$

ここで $A, B, C, \cdots$ で表したものは実際には月が天球を一周する間の毎日の宿である二十八宿:角, 亢, 氐, 房, 心, 尾, 箕 , $\cdots$ を順序を保存してローマ字の大文字に置き換えたものである。これらを縦に並べた $\begin{Bmatrix} C \\ B \\ A \end{Bmatrix}$ 等は本来、方程式

$$C + BX + AX^2 = 0 \tag{7}$$

等を意味した。未知数 X は書かない。これは宋、元の時代に代数方程式を始めた中国数学の記号に倣ったものである。従って、行列 $\begin{Bmatrix} I & F & C \\ H & E & B \\ G & D & A \end{Bmatrix}$

は三つの連立２次方程式

$$\begin{cases} C + BX + AX^2 = 0 \\ F + EX + DX^2 = 0 \\ I + HX + GX^2 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

を意味した。行列では一番上の定数項を「実」、次の１次の項の係数を「方法」、一番下の最高次の係数を「隅法」と言う。中間の項の係数は「廉法」と言った。３次以上の高次方程式では「廉法」を増やし、３次方程式では「上廉」「下廉」、これより次数が高いときには「初廉」「次廉」「三廉」等々と言った。これらは一般的には「級」と言い、上下で区別した。また、方程式相互は右から左に番号を付けて区別した。

宋元の代数学は李冶 (1192–1279) が著書『測円海鏡』(1248) と『益古演段』(1259) で数係数の代数方程式の立て方である天元術を述べたものと、秦九韶 (1202?–1261?) が『数書九章』(1247) でこれらの方程式の数値解法を述べたものが今日まで伝えられている。しかし、これらの書物が直接日本の数学に影響を与えた証拠は残っていない。日本人の数学者達を目覚めさせたのはこれらより約50年後に出版された朱世傑著の『算学啓蒙』(1299) である。中国で名を残した数学者達は殆どすべて官職をもち、数学の研究や執筆はいわば余技として行ったのであるが、朱世傑は民間にあって、数学を教えることを生業としていた。生没年が分かっていないのはそのためである。『算学啓蒙』は題名が示すように数学の入門書であるが、もう一つの著書『四元玉鑑』(1303) は四つまでの未知数をもつ連立代数方程式についての専門書であり、現在では中国代数学の最高峰の著作と評価されている。しかし、こちらは日本に来なかったとされている。ともかく、この二つの本は中国では次の明代に伝を失う。

この頃までの中国および周辺諸国の計算道具は算木であったが、この頃から代って算盤が使われるようになった。おかげで、計算の速度は前代とは比較にならないほど速くなった。これに見合って、掛算ばかりでなく割算のための九九などが工夫された。これらは交易の範囲が全ユーラシア大陸に拡がった宋元の時代が必要とした変化であり、これに応じて数学の教科書も書き直された。その中で最も成功を収めたのは程大位 (1533–1606) の『算法統宗』(1592) である。

我が国では安南（現ヴィエトナム）との交易の朱印状を持っていた角倉

吉田家の一員吉田光由（1598–1672）がこの『算法統宗』を換骨奪胎して書いた『塵劫記』(1627) が江戸時代を通じて標準的な数学入門書となった。これには平方根および立方根の計算法とその応用が述べられているが、一般の二次あるいは三次方程式は扱っていない。むしろ『算法統宗』の方にこれらの方程式の算盤による解法が書かれている。しかし、方程式に対する一般の知識は衰えていて、数値解法の基本である、未知数 X を定数 c だけずらせた $Y = X - c$ の方程式として書き改めるときに使われるパスカルの三角形を『算学啓蒙』は折角昔の本から引用しながらこれが何の為に使われるか分からないと書く有り様である。

もっと不可解なのは李氏朝鮮 (1392–1910) の文教政策である。折角の算盤を拒否し、中国では使われなくなっていた算木を用いた数学の教科書、安止斉の『詳明算法』(1373)、楊輝の『楊輝算法』(1275) および朱世傑の『算学啓蒙』(1299) をわざわざ新しく銅活字を作って復刻させ、引き続き士太夫選抜のための科挙に用いた。英名を謳われた世宗 (在位 1418–1450) の施策である。おかげで中国では無くなってしまった『算学啓蒙』を秀吉の軍は日本に持ち帰ることができ、これが江戸時代日本の新しい数学の出発点となった。

関と Bézout はこれらが共通解を持つならば対応する行列式は 0 でなければならないことを示した。逆に、 $\mathbf{K}$ が代数的閉体で $A \neq 0$ の場合には対応する行列式が 0 ならばこの連立方程式に共通解が存在する。

実際問題では、始めに掲げた (1), (2) のように二つの方程式の連立になることが普通であるが、この場合には $n \geq m$ として (1), (2) の一次結合で $n-1$ 次のものを n 個作り、これに対し上の判定条件を当てはめる。凡そ 80 年の時間差と 15000km 以上の距離がありながら、関が換式と呼んだこの n 個の方程式の作り方も関と Bézout で殆ど同じである。ここでこの結論を完全に証明する所まで行けないのは残念であるが (後藤–小松 [17] を参照せよ。)、大体の筋道を示せば以下のようになる。

関が『解伏題之法』第 13 丁でまず示したことは二つの連立 1 次方程式

$$\begin{cases} B + AX = 0, \\ D + CX = 0 \end{cases} \tag{9}$$

に共通解 $X = \xi$ があれば、第一式の両辺に C を掛け、第二式の両辺に

A を掛けて辺々引き算をすれば、1次の項は打ち消して 0 となり、行列式

$$\begin{vmatrix} C & A \\ D & B \end{vmatrix} = AD - BC = 0 \tag{10}$$

でなければならないことである。そして、三つの連立2次方程式および四つの連立3次方程式に対しても同様の結論が成り立つことを実際に計算してみせた。

2 上2級に関する Laplace 展開とその帰結

(I) 実と方の2級に関する Laplace 展開

4次の行列式の定義式 (5) に表れる3次の行列式を定義 (4) に従って展開すれば

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} P & L & H & D \\ O & K & G & C \\ N & J & F & B \\ M & I & E & A \end{vmatrix} &= DG\begin{vmatrix} N & J \\ M & I \end{vmatrix} - DK\begin{vmatrix} N & F \\ M & E \end{vmatrix} + DO\begin{vmatrix} J & F \\ I & E \end{vmatrix} \\
&\quad - HC\begin{vmatrix} N & J \\ M & I \end{vmatrix} + HK\begin{vmatrix} N & B \\ M & A \end{vmatrix} - HO\begin{vmatrix} J & B \\ I & A \end{vmatrix} \\
&\quad + LC\begin{vmatrix} N & F \\ M & E \end{vmatrix} - LG\begin{vmatrix} N & B \\ M & A \end{vmatrix} + LO\begin{vmatrix} F & B \\ E & A \end{vmatrix} \\
&\quad - PC\begin{vmatrix} J & F \\ I & E \end{vmatrix} + PG\begin{vmatrix} J & B \\ I & A \end{vmatrix} - PK\begin{vmatrix} F & B \\ E & A \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} H & D \\ G & C \end{vmatrix}\begin{vmatrix} N & J \\ M & I \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} L & D \\ K & C \end{vmatrix}\begin{vmatrix} N & F \\ M & E \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P & D \\ O & C \end{vmatrix}\begin{vmatrix} J & F \\ I & E \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} L & H \\ K & G \end{vmatrix}\begin{vmatrix} N & B \\ M & A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P & H \\ O & G \end{vmatrix}\begin{vmatrix} J & B \\ I & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P & L \\ O & K \end{vmatrix}\begin{vmatrix} F & B \\ E & A \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{11}$$

5次の行列式 (6) を定義 (5) に従って展開すれば

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} Y & T & O & J & E \\ X & S & N & I & D \\ W & R & M & H & C \\ V & Q & L & G & B \\ U & P & K & F & A \end{vmatrix}
&= EI \begin{vmatrix} W & R & M \\ V & Q & L \\ U & P & K \end{vmatrix} - EN \begin{vmatrix} W & R & H \\ V & Q & G \\ U & P & F \end{vmatrix} \\
&\quad + ES \begin{vmatrix} W & M & H \\ V & L & G \\ U & K & F \end{vmatrix} - EX \begin{vmatrix} R & M & H \\ Q & L & G \\ P & K & F \end{vmatrix} \\
&\quad - JD \begin{vmatrix} W & R & M \\ V & Q & L \\ U & P & K \end{vmatrix} + \cdots + OD \begin{vmatrix} W & R & H \\ V & Q & G \\ U & P & F \end{vmatrix} - \cdots \\
&= \begin{vmatrix} J & E \\ I & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} W & R & M \\ V & Q & L \\ U & P & K \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} O & E \\ N & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} W & R & H \\ V & Q & G \\ U & P & F \end{vmatrix} + \cdots .
\end{aligned}
\tag{12}
$$

(II) 隣合う級の互換によって符号が替る。

上の計算で判るように、隣合う級は行列式の定義の中であるときは実級と方級になるので実級と方級の交換について証明すれば十分。従って、

$$
\begin{vmatrix} Y & T & O & J & E \\ X & S & N & I & D \\ W & R & M & H & C \\ V & Q & L & G & B \\ U & P & K & F & A \end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix} X & S & N & I & D \\ Y & T & O & J & E \\ W & R & M & H & C \\ V & Q & L & G & B \\ U & P & K & F & A \end{vmatrix}
= 0 \tag{13}
$$

等を示せばよい。

左辺は5次の行列式から得られる式 (12) により

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} J & E \\ I & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} W & R & M \\ V & Q & L \\ U & P & K \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} O & E \\ N & D \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} W & R & H \\ V & Q & G \\ U & P & F \end{vmatrix} + \cdots \\
&+ \begin{vmatrix} I & D \\ J & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} W & R & M \\ V & Q & L \\ U & P & K \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} N & D \\ O & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} W & R & H \\ V & Q & G \\ U & P & F \end{vmatrix} + \cdots \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{14}
$$

もっと一般に違う級の互換は奇数回の隣り合う級の互換で実現できるから、

(III) 行列式は異なる級の互換によって符号が替る。

3 関西の行列式の定義

一方、関とほぼ時を同じくして関西に在住した田中由真 [2]、島田尚政と井関知辰 [3] 達は関とは違う消去の理論を発表している。一番の違いは行列式の定義で、関が第一級の元に関して展開した所を第一式の元に関して展開している。すなわち、田中たちは次の展開を用いる。

$$
|A|^t := A, \begin{vmatrix} D & B \\ C & A \end{vmatrix}^t := |C|^t B - |D|^t A, \tag{15}
$$

$$
\begin{vmatrix} I & F & C \\ H & E & B \\ G & D & A \end{vmatrix}^t := \begin{vmatrix} H & E \\ G & D \end{vmatrix}^t C - \begin{vmatrix} I & F \\ G & D \end{vmatrix}^t B + \begin{vmatrix} I & F \\ H & E \end{vmatrix}^t A, \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} P & L & H & D \\ O & K & G & C \\ N & J & F & B \\ M & I & E & A \end{vmatrix}^t &:= \begin{vmatrix} O & K & G \\ N & J & F \\ M & I & E \end{vmatrix}^t D - \begin{vmatrix} P & L & H \\ N & J & F \\ M & I & E \end{vmatrix}^t C \\
&+ \begin{vmatrix} P & L & H \\ O & K & G \\ M & I & E \end{vmatrix}^t B - \begin{vmatrix} P & L & H \\ O & K & G \\ N & J & F \end{vmatrix}^t A,
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$\begin{vmatrix} Y & T & O & J & E \\ X & S & N & I & D \\ W & R & M & H & C \\ V & Q & L & G & B \\ U & P & K & F & A \end{vmatrix}^t := \begin{vmatrix} X & S & N & I \\ W & R & M & H \\ V & Q & L & G \\ U & P & K & F \end{vmatrix}^t E - \begin{vmatrix} Y & T & O & J \\ W & R & M & H \\ V & Q & L & G \\ U & P & K & F \end{vmatrix}^t D \pm etc.. \tag{18}$$

これらの右辺を更に展開してゆけば、関の定義に一致する。すなわち、行列式は行と列を取り換えた転置行列の行列式と同じ値をもつ。これは低い次数の時にはすぐに確かめられるが、次数が高くなると上の二つの表示だけから証明するのは難しくなる。

ここでは高木貞治の代数学講義 [13] に紹介されているシルヴェスターの定理の特殊な場合を用いることとする。

4 シルヴェスターの定理

3次の行列式に対するシルヴェスターの定理

$$A\begin{vmatrix} I & F & C \\ H & E & B \\ G & D & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} I & C \\ G & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} F & C \\ D & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} H & B \\ G & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} E & B \\ D & A \end{vmatrix} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

証明　右辺は2次の行列式の関の定義 (3) により

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} F & C \\ D & A \end{vmatrix}\begin{vmatrix} H & B \\ G & A \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} I & C \\ G & A \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E & B \\ D & A \end{vmatrix} \\ &= -AF\begin{vmatrix} H & B \\ G & A \end{vmatrix} + CD\begin{vmatrix} H & B \\ G & A \end{vmatrix} + AI\begin{vmatrix} E & B \\ D & A \end{vmatrix} - CG\begin{vmatrix} E & B \\ D & A \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{20}$$

これに

$$+AC\begin{vmatrix} H & E \\ G & D \end{vmatrix} - CA\begin{vmatrix} H & E \\ G & D \end{vmatrix} = 0 \tag{21}$$

を加え、左辺右辺を別に加えれば、関の定義 (4) により

$$
= A\begin{vmatrix} I & F & C \\ H & E & B \\ G & D & A \end{vmatrix} - C\begin{vmatrix} G & D & A \\ H & E & B \\ G & D & A \end{vmatrix}. \tag{22}
$$

第2項は二つの同じ級を持つ行列式として0である。　証明終。

4次の行列式に対するシルヴェスターの定理

$$
A^2\begin{vmatrix} P & L & H & D \\ O & K & G & C \\ N & J & F & B \\ M & I & E & A \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} P & D \\ M & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} L & D \\ I & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} H & D \\ E & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} O & C \\ M & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} K & C \\ I & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} G & C \\ E & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} N & B \\ M & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} J & B \\ I & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} F & B \\ E & A \end{vmatrix} \end{Vmatrix}. \tag{23}
$$

<u>証明</u>　右辺は3次の行列式の関の定義 (4) および3次の行列式に対するシルヴェスターの定理 (19) により

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} H & D \\ E & A \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} O & C \\ M & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} K & C \\ I & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} N & B \\ M & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} J & B \\ I & A \end{vmatrix} \end{Vmatrix} - \begin{vmatrix} L & D \\ I & A \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} O & C \\ M & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} G & C \\ E & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} N & B \\ M & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} F & B \\ E & A \end{vmatrix} \end{Vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} P & D \\ M & A \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} K & C \\ I & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} G & C \\ E & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} J & B \\ I & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} F & B \\ E & A \end{vmatrix} \end{Vmatrix} \qquad (24) \\
&= -A^2H\begin{vmatrix} O & K & C \\ N & J & B \\ M & I & A \end{vmatrix} + DEA\begin{vmatrix} O & K & C \\ N & J & B \\ M & I & A \end{vmatrix} + A^2L\begin{vmatrix} O & G & C \\ N & F & B \\ M & E & A \end{vmatrix} \\
&\quad - DIA\begin{vmatrix} O & G & C \\ N & F & B \\ M & E & A \end{vmatrix} - A^2P\begin{vmatrix} K & G & C \\ J & F & B \\ I & E & A \end{vmatrix} + DMA\begin{vmatrix} K & G & C \\ J & F & B \\ I & E & A \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

再び

$$+A^2D\begin{vmatrix} O & K & G \\ N & J & F \\ M & I & E \end{vmatrix} - DA^2\begin{vmatrix} O & K & G \\ N & J & F \\ M & I & E \end{vmatrix} = 0 \tag{25}$$

を加え、左辺右辺を別に加えることにより

$$= A^2\begin{vmatrix} P & L & H & D \\ O & K & G & C \\ N & J & F & B \\ M & I & E & A \end{vmatrix} - DA\begin{vmatrix} M & I & E & A \\ O & K & G & C \\ N & J & F & B \\ M & I & E & A \end{vmatrix}. \tag{26}$$

第２項は同じ級を持つ行列式ゆえ０である。　証明終。

５次の行列式に対するシルヴェスターの定理

$$A^3\begin{vmatrix} Y & T & O & J & E \\ X & S & N & I & D \\ W & R & M & H & C \\ V & Q & L & G & B \\ U & P & K & F & A \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} Y & E \\ U & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} T & E \\ P & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} O & E \\ K & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} J & E \\ F & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} X & D \\ U & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} S & D \\ P & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} N & D \\ K & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} I & D \\ F & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} W & C \\ U & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} R & C \\ P & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M & C \\ K & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} H & C \\ F & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} V & B \\ U & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} Q & B \\ P & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} L & B \\ K & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} G & B \\ F & A \end{vmatrix} \end{Vmatrix}. \tag{27}$$

<u>証明</u> 右辺は４次の行列式の関の定義 (5) により

$$= \begin{vmatrix} J & E \\ F & A \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} X & D \\ U & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} S & D \\ P & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} N & D \\ K & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} W & C \\ U & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} R & C \\ P & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M & C \\ K & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} V & B \\ U & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} Q & B \\ P & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} L & B \\ K & A \end{vmatrix} \end{Vmatrix} - \begin{vmatrix} O & E \\ K & A \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} X & D \\ U & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} S & D \\ P & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} I & D \\ F & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} W & C \\ U & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} R & C \\ P & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} H & C \\ F & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} V & B \\ U & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} Q & B \\ P & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} G & B \\ F & A \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

$$
+\begin{vmatrix} T & E \\ P & A \end{vmatrix}
\begin{Vmatrix}
\begin{vmatrix} X & D \\ U & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} N & D \\ K & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} I & D \\ F & A \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} W & C \\ U & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M & C \\ K & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} H & C \\ F & A \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} V & B \\ U & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} L & B \\ K & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} G & B \\ F & A \end{vmatrix}
\end{Vmatrix}
-\begin{vmatrix} Y & E \\ U & A \end{vmatrix}
\begin{Vmatrix}
\begin{vmatrix} S & D \\ P & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} N & D \\ K & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} I & D \\ F & A \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} R & C \\ P & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M & C \\ K & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} H & C \\ F & A \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} Q & B \\ P & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} L & B \\ K & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} G & B \\ F & A \end{vmatrix}
\end{Vmatrix}. \tag{28}
$$

第1因子で右向に下がる積をとって4次の行列式に対するシルヴェスターの定理 (23) を適用すれば、これは

$$
\begin{aligned}
&= -A^3J\begin{vmatrix} X & S & N & D \\ W & R & M & C \\ V & Q & L & B \\ U & P & K & A \end{vmatrix} + A^2EF\begin{vmatrix} X & S & N & D \\ W & R & M & C \\ V & Q & L & B \\ U & P & K & A \end{vmatrix} \\
&\quad + A^3O\begin{vmatrix} X & S & I & D \\ W & R & H & C \\ V & Q & G & B \\ U & P & F & A \end{vmatrix} - A^2EK\begin{vmatrix} X & S & I & D \\ W & R & H & C \\ V & Q & G & B \\ U & P & F & A \end{vmatrix} \\
&\quad - A^3T\begin{vmatrix} X & N & I & D \\ W & M & H & C \\ V & L & G & B \\ U & K & F & A \end{vmatrix} + A^2EP\begin{vmatrix} X & N & I & D \\ W & M & H & C \\ V & L & G & B \\ U & K & F & A \end{vmatrix} \\
&\quad + A^3Y\begin{vmatrix} S & N & I & D \\ R & M & H & C \\ Q & L & G & B \\ P & K & F & A \end{vmatrix} - A^2EU\begin{vmatrix} S & N & I & D \\ R & M & H & C \\ Q & L & G & B \\ P & K & F & A \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{29}
$$

これに

$$
+A^3E\begin{vmatrix} X & S & N & I \\ W & R & M & H \\ V & Q & L & G \\ U & P & K & F \end{vmatrix} - A^2EA\begin{vmatrix} X & S & N & I \\ W & R & M & H \\ V & Q & L & G \\ U & P & K & F \end{vmatrix} = 0 \tag{30}
$$

を加え、左辺右辺を別に加えれば、5次の行列式の関の定義 (6) に従って

$$= A^3 \begin{vmatrix} Y & T & O & J & E \\ X & S & N & I & D \\ W & R & M & H & C \\ V & Q & L & G & B \\ U & P & K & F & A \end{vmatrix} - A^2 E \begin{vmatrix} U & P & K & F & A \\ X & S & N & I & D \\ W & R & M & H & C \\ V & Q & L & G & B \\ U & P & K & F & A \end{vmatrix}. \tag{31}$$

第2項は同じ級を持つ行列式ゆえ0である。　証明終。

4次の行列式の転置不変性について。シルヴェスターの定理 (23) により

$$A^2 \begin{vmatrix} P & L & H & D \\ O & K & G & C \\ N & J & F & B \\ M & I & E & A \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} P & D \\ M & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} L & D \\ I & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} H & D \\ E & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} O & C \\ M & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} K & C \\ I & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} G & C \\ E & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} N & B \\ M & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} J & B \\ I & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} F & B \\ E & A \end{vmatrix} \end{Vmatrix}. \tag{32}$$

3次行列式の転置不変性により

$$= \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} P & D \\ M & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} O & C \\ M & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} N & B \\ M & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} L & D \\ I & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} K & C \\ I & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} J & B \\ I & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} H & D \\ E & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} G & C \\ E & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} F & B \\ E & A \end{vmatrix} \end{Vmatrix}. \tag{33}$$

更に2次行列式の転置不変性により

$$= \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} P & M \\ D & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} O & M \\ C & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} N & M \\ B & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} L & I \\ D & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} K & I \\ C & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} J & I \\ B & A \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} H & E \\ D & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} G & E \\ C & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} F & E \\ B & A \end{vmatrix} \end{Vmatrix}. \tag{34}$$

再びシルヴェスターの定理 (23) により

$$
= A^2 \begin{vmatrix} P & O & N & M \\ L & K & J & I \\ H & G & F & E \\ D & C & B & A \end{vmatrix}. \tag{35}
$$

故に $A \neq 0$ で unique factorization domain ならば、4次の行列式の転置不変性が成立する。　証明終。

5次の行列式の転置不変性について。シルヴェスターの定理 (27) と4次までの行列式の転置不変性により

$$
\begin{aligned}
A^3 \begin{vmatrix} Y & T & O & J & E \\ X & S & N & I & D \\ W & R & M & H & C \\ V & Q & L & G & B \\ U & P & K & F & A \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix}
\begin{vmatrix} Y & E \\ U & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} T & E \\ P & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} O & E \\ K & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} J & E \\ F & A \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} X & D \\ U & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} S & D \\ P & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} N & D \\ K & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} I & D \\ F & A \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} W & C \\ U & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} R & C \\ P & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M & C \\ K & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} H & C \\ F & A \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} V & B \\ U & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} Q & B \\ P & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} L & B \\ K & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} G & B \\ F & A \end{vmatrix}
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
\begin{vmatrix} Y & U \\ E & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} X & U \\ D & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} W & U \\ C & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} V & U \\ B & A \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} T & P \\ E & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} S & P \\ D & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} R & P \\ C & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} Q & P \\ B & A \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} O & K \\ E & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} N & K \\ D & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} M & K \\ C & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} L & K \\ B & A \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} J & F \\ E & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} I & F \\ D & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} H & F \\ C & A \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} G & F \\ B & A \end{vmatrix}
\end{vmatrix} \qquad (36) \\
&= A^3 \begin{vmatrix} Y & X & W & V & U \\ T & S & R & Q & P \\ O & N & M & L & K \\ J & I & H & G & F \\ E & D & C & B & A \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

が成立。　証明終。

参考文献

[1] 關孝和: 解伏題之法, 重訂 (1683), 松永貞辰写, 東北大学付属図書館蔵林集書648 松永文庫2490; 小松彦三郎: 「解伏題之法」山路主住本の復元と「關孝和全集」との比較, 数理解析研究所講究録 **1392**(2004), 225–245; 訓読は 数理解析研究所講究録 **1858**(2013), (33–63) を見よ。

[2] 田中由眞: 算學紛解, 8巻中 巻之一〜四, ca. 1690, 大阪府立中之島図書館 618/204.

[3] 井関知辰: 算法発揮, 上、中、下巻. 1690, 東北大学付属図書館 狩野文庫,7.20306.

[4] L. Euler: Démonstration sur le nombre des points où deux lignes des ordres quelquonques peuvent se couper, Mémoires Acad. Sci. Berlin, **4**(1748), 234–248; Opera Omnia **I-XXVI**(1953). 46–59.

[5] L. Euler: Introductio in Analysin Infinitorum. tom. II, Lausannæ, (1748) ; Opera Omnia **I-IX**(1945); 高瀬正仁訳: オイラーの解析幾何, 海鳴社, (2005).

[6] E. Bézout: Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations, Mémoires Acad. Royale Sci. Paris, (1764), 288–338.

[7] L. Euler: Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations, Mémoires Acad. Sci. Berlin, **20**(1764), 91–104; Opera Omnia **I-VI**(1921), 197–211.

[8] A. Cauchy: Mémoire sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques, Exercices d'analyse et de physique mathématique, **1**(1840), 91–104; Œuvres Complètes **II-XI**(1913), 466–509.

[9] D. E. Smith and Yoshio Mikami: A history of Japanese mathematics, Open Court Publishing, Chicago, 1914; Dover, Mineola, N.Y., 2004.

[10] Yoshio Mikami: On the Japanese theory of determinants, Isis **2**(1914), 9–36.

[11] B.L. van der Waerden: Moderne Algebra, zweiter teil, Verlag von J. Springer, Berlin, 1931.

[12] 三上義夫: 關孝和の業績と京阪の算家並びに支那の算法との關係及び比較, 東洋学報 **20**(1932), 217–249, 543–566, **21**(1933), 45–65, 352–373, 557–575, **22**(1935), 54–99.

[13] 高木貞治: 改訂代数学講義, 共立出版, 1948.

[14] 藤原松三郎著, 日本学士院編: 明治前日本数学史, 第二巻, 岩波書店, 1956.

[15] 藤原松三郎著, 日本学士院編: 明治前日本数学史, 第三巻, 岩波書店, 1957.

[16] 竹之内脩: 田中由真の終結式について The construction of resultant due to Tanaka Yoshizane, 和算研究所紀要, **2**(1999), 3–18.

[17] 後藤武史–小松彦三郎: 17世紀日本と18–19世紀西洋の行列式、終結式及び判別式,「数学史の研究」, 数理解析研究所講究録 **1392**(2004), 117–129; 西北大学学報 (J. of Northwest University, Xi'an, (Natural Science Edition)), **33**(2003), 363–367 & 376–380.

[18] 小松彦三郎: 関東の消長法と関西の冪乗演段,「数学史の研究」, 数理解析研究所講究録 **1583**(2008), 19–39.

[19] 小松彦三郎: 田中由真著『算学紛解』の消去理論,「数学史の研究」, 数理解析研究所講究録, **1787**(2012), 1–17.

[20] 小松彦三郎: 何故終結式は田中由真の方法で計算できるのか, 日本数学会2012年度年会, 数学基礎論および歴史講演アブストラクト, 7–8.