オイラーの積分計算と微分積分学の基本定理

高瀬正仁（九州大学）

第24回数学史シンポジウム
於：津田塾大学　数学・計算機科学研究所
平成26年（2014年）10月12日(日)

はじめに

オイラーの解析学三部作のひとつ『積分計算教程』（全3巻）を概観し，それを踏まえて微積分の基本定理の由来を考察する．観念的に考えると接線法と求積法はまったく関係がないにもかかわらず，互いに他の逆演算になっている．この事実の淵源について所見を述べてみたい．

微分積分学には長い歴史があるが，それだけに理論の構造が複雑で，諸概念のひとつひとつも謎に包まれている．不思議な学問であり，学びはじめた当初から素朴な疑問につきまとわれて悩みがつきなかったものであった．今日の微積分では微分法と積分法は別々に構成される．微分法についていうと，極限の概念を基礎にして，その上に理論が構築され，典型的な応用例として接線法と極大極小問題が語られるが，観念的に考えるとこれらの二問題の間にはいかなる関係も感知されない．そはれにもかかわらずこの二つの世界の間に「微分積分学の基本定理」という橋が架かるのはなぜなのであろうか．

微積分の謎は多い．今日の微積分の対象は関数であり，関数を微分し，関数を積分する．だが，関数概念が数学史上に明示的に現れたのはオイラーの著作『無限解析序説』においてであり，その刊行年は1748年である．微積分の黎明期すなわちライプニッツとベルヌーイ兄弟（兄のヤコブと弟のヨハン）の時代には関数概念は存在せず，微分計算と積分計算の対象は方程式もしくは変化量であった（方程式 $f(x,y)=0$ が書き下されたとき，ここに現れる文字 x,y は変化することもあれば，変化しないこともある）．オイラーの無限解析を通じて観察されるのは，「変化量もしくは方程式の微積分の時代」から「関数の微積分の時代」への移り行く微積分の姿である．

今日のような「関数の微積分の時代」の原型を提示したのはコーシーである．だが，黎明期にも移行期にも，後年の「微積分の基本定理」に該当する事実は確かに存在した．では，その自覚的認識はいかにしてもたらされたのであろうか．微積分の謎はこの問いに集約されている．

1. 曲線の理論

微積分の黎明期はライプニッツとベルヌーイ兄弟によってもたらされたが，この時期の微積分は同時にデカルトに始まる「曲線の理論」の完成された姿を示している．曲線の理論というのは曲線の正確な姿を知ることをめざす理論様式を指すが，具体的には接

線法，すなわち曲線上の任意の点において自在に接線を引く方法を確立することを意味している．接線法は法線法と同じであり，デカルトは幾何学的曲線の名のもとに代数曲線の範疇を設定し，代数曲線の法線法を模索した．その際，曲線は方程式で表されていることが，出発点において課されている．

デカルトの視線は古代ギリシアの作図問題に向けられていて，パップスの『数学集成』に紹介されている未解決の作図問題を解くために，曲線を方程式で表し，法線法によりその正確な形を知ることをめざしたのである．

デカルトは曲線の世界から代数曲線の小世界を切り取って曲線の理論を構築したが，ライプニッツはデカルトが代数曲線に限定したところに批判を加え，超越曲線をも対象として「万能の接線法」を確立した．微分法の誕生を告げるのはこの一事だが，ライプニッツには作図問題への関心が見られない．この点がデカルトとライプニッツのもっとも基本的な相違である．

その代わりライプニッツの微分法にはデカルトにはない二つの大きな利点がある．ひとつは極大極小問題が解けるようになったことである．

デカルトと同時代のフェルマは独自の接線法を手にしていたが，同時に極大極小問題にも関心を寄せ，しかも接線法と極大極小問題を同じ手法で取り扱った．どうしてそのようなことが可能なのか，フェルマはそれについては何も語らないが，ライプニッツの接線法はこの疑問を明瞭に解き明かした．何かある極大極小問題を取り上げたとして，極大もしくは極小になってほしい量を文字 x で表すと，x と定量を用いて組み立てられる式 $f(x)$ が現れる．そこでもうひとつの文字 y を導入して，この式を y と等置すると，方程式

$$y = f(x)$$

が得られる．今日の微積分の目にはこの等式は関数記号のように映じるが，これを曲線の方程式と理解するところにライプニッツの創意が光っている．この曲線は方程式のみを頼りにして認識の目にかかる曲線，いわば「仮象の曲線」であり，存在するともしないとも言えないが，ライプニッツは強い実在感を抱いたのである．方程式で表された曲線であれば接線法を適用することができて曲線の正確な形状が判明し，それを観察すれば，極大点と極小点の位置が明らかになる．それらの点の位置を示す二つの数値 x, y のうち，x は極大極小問題に解を与え，y は求められている極大値もしくは極小値を与えるのである．

ライプニッツの微分法は 1684 年の論文

> 「分数量にも無理量にもさまたげられることのない極大・極小ならびに接線を求めるための新しい方法，およびそれらのための特異な計算法」（学術論叢，アクタ・エルディトールム，1684 年 10 月，467-473 頁．以下,「ライプニッツ 1684」と略称する.）

において表明されたが，ベルヌーイ兄弟の支援を得て大きく進展し，具体的な適用例も大幅に増加した．

2. 逆接線法と求積法

ライプニッツの万能の接線法ももたらすもうひとつの利点は，求積法の確立がもたらされたことである．求積法というのは曲線で囲まれた領域の面積の算出を可能にする方法のことだが，ライプニッツはこれを逆接線法の一区域として認識した．逆接線法というのは，接線に関する諸情報が与えられたとき，それらに手掛かりを求めて曲線の全体像を復元する方法である．

ある曲線で囲まれた領域の面積を算出しようとすると，曲線の方程式に対して微分法を適用することにより，無限小部分の面積が求められる．それは $f(x)dx$ という微分式の形で与えられる．そこでもうひとつの文字 y を導入して，この微分式を y の微分 dy と等置すると，

$$dy = f(x)dx$$

という形の等式が現れる．今日の目には変数分離型の微分方程式に見えるが，ライプニッツはこれを何かある曲線の接線の方程式と見た．その曲線の存在はアプリオリに確かなのではないが，ライプニッツの抱く強固な実在感に支えられてはじめて存在する「仮象の曲線」の一種である．極大極小問題の際に出会う仮象の曲線に比して，与えられているのは局所的な情報の集成であり，繋ぎ合わせて大域的な全体像を思い描くのは遥かに困難である．

ライプニッツはこの曲線を求積線と呼んだ．求積線を描くことができれば懸案の領域の面積が求められるが，この事実こそ，後年の「微積分の基本定理」の原型である．求積線は一般に超越曲線である．ライプニッツがデカルトを越えて超越曲線の世界に分け入ることを決意した理由がそこにある．

幾何学的イメージの鮮明さに支えられて，曲線とその接線の間に往還路が開かれる．曲線があれば接線を引くことができると思い，随所で接線が指定されれば，それらを生成する曲線が存在すると思う．ライプニッツはこの往還路を発見したが，往路も還路も次の二つの計算式に集約されている．

$d(x+y) = dx + dy$（和の微分）
$d(xy) = xdy + ydx$（積の微分．ライプニッツの公式）

x, y はただの文字と見るのも可，変化量と見るのも可．dx, dy はそれぞれ x, y の微分であり，無限小量という感じが伴うが，意味のない記号と見てもよいし，有限量と見てさしつかえないこともある．この二つの等式はさながら「微分計算の公理系」のようであり，ライプニッツの曲線の理論の土台である．

3. 逆接線法から微分方程式へ

曲線の理論がデカルトからライプニッツの手にわたされたとき，作図問題への関心は失われたが，代わって極大極小問題と求積法が大きく取り上げられるようになった．ライプニッツの積分法は 1686 年の論文

「深い場所に秘められた幾何学，および不可分量と無限の解析について」(学術論叢，アクタ・エルディトールム，1686 年 7 月，292-300 頁．以下，「ライプニッツ 1686」と略称する．)

において表明されたが，ここで語られているのは逆接線法であり，積分法という言葉は見あたらない．今日の語法では求積法を指して積分法と呼ぶことがあるが，そライプニッツは求積法を逆接線法の一区域として認識し，まさしくそこにライプニッツの創意が認められるのである．計算法という見地から見ると，ライプニッツにとって本質的なのは微分計算であり，積分計算は微分計算を逆向きにたどるだけのことであった．積分計算という言葉もライプニッツには不要であり，ただ単に微分計算の手順の向きを逆にするだけのことであるから，特別の呼称はいらないのである．計算の背後にはつねに実在する曲線もしくは仮象の曲線が控えているという一事がポイントである．

ライプニッツとベルヌーイ兄弟の次の世代のオイラーの時代に移ると，微積分の姿はまたも大きく変容した．オイラーの語法にならって微積分ではなく無限解析という言葉を使うことにするが，オイラーの無限解析では曲線の影は完全に払拭された．計算の対象は変化量であり，変化量を微分し，変化量を積分することになるが，オイラーはその定義を書き下した．

オイラーは解明の対象の特質に応じて関数概念を三種類まで提案した．そこには変化量から離れていこうとする趨勢さえ観察されるが，第一の関数は「変化量と定量を用いて組み立てられる解析的な表示式」というものであり，それ自身もまた変化量である．今，x は変化量とし，$y = f(x)$ は x の関数とするとき，オイラーは差 $dy = f(x + dx) - f(x)$ を微分式 Xdx と等置することにより y の微分 dy を定義した．ここで，X は x の関数である．

逆に，積分は微分式から出発する．オイラーの無限解析では，積分の対象は Xdx という形の微分式であり，その実体は dx を伴う無限小の変化量である．微分式 Xdx の積分とは，微分等式

$$dy = Xdx$$

を満たす変化量 y のことであり，それをオイラーは積分記号を用いて

$$y = \int Xdx$$

と表記した．この定義は「微積分の基本定理」そのものであり，微分計算（変化量の微分を作る計算）と積分計算（与えらた微分を生成する変化量を見つける計算）ははじめから互いに他の逆演算として規定されている．ライプニッツが発見した基本定理を，オイラーは定義に採用したのである．もうどこにも曲線の姿は見られない．

オイラーの段階で微積分はまたも変容し，何かしら曲線の理論とは全く別の理論になった．それは微分方程式の理論である．

ライプニッツの逆接線法の対象はあくまでも曲線であり，微分等式 $dy = f(x)dx$ は「仮象の曲線」の接線の方程式として認識された．求積法の成功もその点に求められるが，オイラーはこれを微分方程式と見た．今日の目には階数 1 の常備分方程式に見える

が，そのように見ることにするならば，高階常微分方程式，1 階偏微分方程式，高階偏微分方程式と，「微分方程式の世界」が広々と目に映じてくることであろう．

微分式の積分の概念基底は上述の通りだが，オイラーは微分方程式の一般概念も規定した．『積分計算教程』第一巻の「序文」の冒頭には，積分計算の定義が配置され，次のように書かれている．

> 積分計算というのは，いくつかの変化量の微分の間の与えられた関係から，それらの量の関係を見つけ出す方法のことである．それを達成する手順は積分という名で呼ばれる習わしになっている．

「いくつかの変化量の間の関係」というのは微分方程式のことであり，変化量の個数が 2 個なら 1 階もしくは高階の常微分方程式，2 個よりも多ければ 1 階もしくは高階の偏微分方程式である．「それらの量の関係」というのは微分方程式の解を指す言葉だが，その関係はいくつかの方程式で表されることもあり，変化量相互の関係がパラメータを用いて表示されることもある．方程式もしくは相互関係そのものがすでに解である．

オイラーの言葉は積分計算と微分計算との関連にも及び，

> 微分計算は，いくつかの変化量の間の与えられた関係から，（それらの変化量の各々の）微分の間の関係を教えるのであるから，積分計算はその逆の方法を与えてくれるのである．

と明記された．オイラーの無限解析の世界では作図問題も曲線の理論も消失し，新たに微分方程式の解法理論が出現した．「微積分の基本定理」は微分計算と積分計算の概念規定に溶け込んで，無限解析全体の土台になった．コーシーに移ると，今日に続く「関数の微積分」の原型が成立し，微分と積分は再び分離して「微積分の基本定理」は一個の独立した定理になった．

4. 今後の課題－微分方程式論の解明に向けて

デカルトとともに開かれた微積分の黎明期はライプニッツとベルヌーイ兄弟の時代，オイラーの時代を経てコーシーに及んだ．コーシーの微積分の古層には二つの層が重なっている．オイラーが開いた微分方程式論の世界を精密に観察することが，今後の課題として課されるであろう．

参考文献

高瀬正仁『dx と dy の解析学』（日本評論社，2000 年 10 月 10 日発行）
高瀬正仁『微分積分学の史的展開』（講談社，2017 年 1 月 30 日発行）