レヴィの数学とホワイトノイズ理論

飛田 武幸

Oct. 11-12, 2014

始めに

P. レヴィ(以下レヴィのみ敬称を省略する) の数学は、**連続無限変数の関数解析**に基づく。そこから変数をランダムにして、自然に確率解析へと導かれる。それは時空のパラメータに依存し、科学の中で重要な位置を占める。

P. レヴィの数学と言っても、その全体に亘る話の紹介は到底及ぶところではないので、その内特にホワイトノイズ理論に関係の深いところに重点をおいた。これまで P. レヴィ のことはしばしば報告してきたが、本研究会での公式報告は今回をもって最終回としたい。そのような事情から、この際、お話の他に私の持っている多くのレヴィに関する資料もご紹介したいと思う。

§履歴など

レヴィ自身のこと:

Sept. 15, 1886 生、

Dec. 15, 1971 没、

祖父　Polytechnicien

父　Lucien Lévy, Polytechnicien, 著書　楕円関数論 1898 等,

レヴィ自身も、勿論 Polytechnicien.

実は、嘗てレヴィに差し上げた手紙の中で、彼のご家族のことで、皆さんに紹介しても差し支えないことを、教えて頂きたいと書いたら、ご丁寧な文章を頂いた。

数年前のことである。数学史の e-journal にレヴィのことを報告したいので何か珍しい資料はないかということで、当時 Rutgers 大学にいた Mazliak 教授（私のプリンストン時代の学生だった）が訪ねて来られた。レヴィの自己紹介のある私への書簡の内容に興味をもち、それをレヴィのご遺族のご了解も得て、同教授による英訳が同 journal に掲載された。今お目にかける資料は その英訳のコピーである。

「レヴィの数学」についての紹介を目指したのが本稿であるが、準備し始めてみて、到底目標には達し得ないことを、あらためて認識する次第である。それでも、私のベストを尽くしたい。

彼による数学の研究成果については、非常に高く評価されているのは周知のことであるが、それにしても、尚且つ余りにも多くの誤解があったり、また理解されていないことが多すぎることを大変残念に思っている。この儘放置すれば、数学界にとって大きな負の遺産となるのではないかという焦燥感を抑えきれない。

では、彼についての伝記とか、それに類似するものをできるだけ多く書けばよかろうということにもなるが、私には到底それは出来そうにない。これまで、他にそのような目的で書かれた文章を読んだが、それらにはもどかしさを禁じ得ない。例外としては、L.Schwartz 著
"Un mathématicien aux prises avec le siécle." Odile Jacob 1997.

においてレヴィが卓越した数学者であることに言及した優れた文献があるが、まだ物足りない。期待に沿うものが誰かの手によって記録されることを強く望みながら、私の拙文が少しでもそれに対するお手伝いにでもなれば幸いと考えて、僭越ながら敢えて一文を綴る次第である。

§事の始め

学生時代に、レヴィの著書 Processus stochastiques et mouvement brownien を薦めて頂いて（吉田耕作先生だったと思う）、それを入手して　"ツンドク"していたが、たまたま卒業研究のゼミでこの本がテキストになった。指導教官は伊藤清先生で

あった。フランス語は習ったことがないので、躊躇していたら、あっさりと「辞書を買ったらよかろう」ということで、忠実に、そのご指示に従うことにした。待望のゼミが始まったのは、無情にも、始めからではなく、この本の第6章の「1次元ブラウン運動」からであった。

辞書と文法書と首っ引きの悪戦苦闘もさることながら、それに数倍増しで難解なのは、勿論数学の内容であった。一年間で読み進むことができたページ数は僅かであって、その数はとても恥しくて言えないが、何よりも圧倒されたのは、著者の数学的な洞察力であった。一見平易そうに見える主張も、証明はもとより、その内容に重厚さがあり、著者による深い内容の記述、それらに、すっかり圧倒されてしまった。レヴィにとっては当然で、しかし我々にとっては難解な主張の例が多い。今では当然と思われるブラウン運動の強マルコフ性にあたる事実が手短かな言葉で説明されているのは驚きであった。当時私には証明も理解もできなかった。同様なことが、彼の論文にも随所に見られる。本質的なことを見抜く直感と洞察力には敬服するのみであるが、それが時には人によっては誤解を招くこともあった。

このあたりで、レヴィの初期の業績内容に触れたい。学位論文は、1911 年タイトルは ”Les equations intégro-différentielles définissant des fonctions de lignes. 指導教授：J. Hadamard であった。

時を追って、多くの論文や著書が発表されたが、数少ない共著論文を除いて、ほとんどすべて単著である。

まず主な著書を上げる。

1. Leçons d’analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars,1922, J. Hadamard の Préface がある。

2. Calcul des probabilités, Gauthier-Villars,1925. Préface は自分自身による。

3. Cours de méchanique, Gauthier-Villars, 1928.

4. Notice sur les travaux scientifique de M. Paul Lévy. Hermann & C^{ie} Editeurs. 1935.

5. Théorie de l'additions des variables aléatoires Gauthier-Villars, 1937 改訂版 1954.

6. Processus stochastiques et mouvement brownien. Gauthier-Villars, 1948 改訂増補版 1965.

7. Problémes concrets d'analyse fonctionnelle. 1951. Gauthier-Villars,

7. P. Lévy et al, La vie et l'Œuvre de Jacques Hadamard. Monographie N°16 de l'Enseignement Math. 1967.

8. Quelques aspects de la pénseé d'un mathematician, Blanchard 1970.

著書に準ずるものとして

9. Nouvelle notice sur les travaux scientifiques. 1964.

これは 4. に続くものである。Academy 会員の候補となったとき提出された自己業績の説明文であろうと推測される。これはガリ版刷りである。

10. Random functions: General theory with special reference to Laplacian random functions. Univ. of Calif. Pub. in Statistics. 1. no.12. 1953,331-390.

11. Random functions: A Laplacian random function dpending on a point of Hilbert space. loc.cit. 2, no.10.1956, 195-206.

その他小冊子多数あり。

この著書1から2へ移るところに着目したい。主テーマを関数解析から確率論に移している。いくつかの事実と想像を交えてこの注意すべき変化を見てみよう。

i) 著書2の付録に無限次元（ヒルベルト空間）の一様測度の話がある。ヒルベルト空間には、勿論ルベーグ式の測度は存在しない。n 次元の体積要素は距離の n 乗に比例するから、n を大きくすれば、単位空面の内部はほとんど無視できる。また外部は n とともに大きくなり、発散してしまう。単位球面だけが残る．しかしそれを1次元に射影してみれば、両端しか残らない。

これでは役に立たない。ここでアイディアが生まれた。近似するとき n 次元なら半径 $\sqrt{n}$ の球面にする。そうすれば、n が大きい時、球面上の一様な測度を 1 次元に射影すれば、それは十分に標準ガウス分布に近い。各方向への射影は、それぞれ独立なガウス分布に近づく。n を逐次大きくして、無限次元の標準ガウス分布に相当するものが構成される。

解析と言っても無限次元になれば、自然にガウス分布の系が生まれて確率論、ホワイトノイズ解析に走ってしまうことになった。これは夢物語ではなく、厳密な数理の帰結である。

3mm ii) もう一つは、いくらか形式的なことである。

1919 年に勤務 École Polytechnique の教務主任から、確率論と誤差論についてのの３つの講義を依頼されたこと、それは容易に引き受けられたと述べている（自伝 28 節）。一方、この事実について裏話がある。レヴィの生誕 100 年祭（実際は 1 年おくれの 1987 年に開催）における L. Schwartz 教授 によるレヴィの思い出の一節である。

レヴィが確率論の講義の担当を依頼されたとき（1919 年)、担当する学期が始まるまでに僅か２ヶ月しかなかったので、「既存の確率論を勉強して講義するのには時間が足りない、確率論を自分で retrouver （再構築）するならできます」と答えたと紹介している。同じ話を別な人からも聞いているので、これは事実であろう。レヴィが新しい確率論の構築に大きな意欲をもっていたことが伺われる。また、古い確率論に聊か批判もあったのかとも推測したが、彼の自伝で述べている内容のトーンからみて、それは下司の勘ぐりに過ぎないようだ。

このあたりの時期からレヴィの確率論の本格的研究が始まったと想像する。第５回名古屋レヴィーセミナー資料、谷川澄子さんの報告記事によれば

論文　丁度３００篇

著書　１９冊

である。

§ずっと昔のこと

レヴィの学風に強い憧れをもったのが、事の始めである。卒業後しばらくして、思い切ってレヴィに直接手紙を書いたのが1954年（頃、何年か、はっきりとした記憶がない）であった。思いがけず、ご返事を頂いた。これこそ「知遇を得た」好運のはじめといってよいのであろうか？

その後、折にふれて、主として数学の話で手紙を差し上げると、いつも必ず親切なご返事が来た。論文の draft を送ったら数式の訂正をした返事を貰ったこともあった。終わり頃には、お願いしてご家族の紹介文まで頂くようになった。私のガウス過程の標準表現についての論文（オリジナルなアイディアはレヴィにある）についてもコメントがあり、その発展となった学位論文(1960) も激励され、結果について暖かい評価も頂いたのであった。これを裏付けるものとして、彼の著書 mouvement brownien の1965年の改訂増補版、またアカデミー会員になったときの業績の自己紹介においても、さらに1970年出版の自叙伝でも私のことに触れている。こういったレヴィによる暖かい評価を受けたことは何にも増して嬉しく、また励ましになったのである。

これは余談であるが、しばらく私宛の手紙（いつも封書であった）の宛名に "Miss T. Hida" となっていた。じつは私は Mr. であると書いたら、Hilda という女性名がよく知られているので、Miss と思ったとのことであった。

話は少し遡るが、1950年代のことである。レヴィの仕事をフォローしている内に、彼の関数解析の改訂増補版が欲しくなって、この本を買った。4,000円を超える定価で、当時の助手の月給の6割程の値段であった。当然生活に影響するものであったが、当時も今も後悔はない。この書物が私の研究に及ぼした影響は計り知れない。

同じ頃であるが、関西には確率論の若い活発な研究者が多く、その人達が参加して京都大学での伊藤教授のセミナーが毎週開催されていた。私もこれに出席することが多かった。レヴィの論文に関すること、また関連した話題についての私の勉強結果も聴いて頂いた。

§ガウス過程の表現

前節のエピソードに関して、その数学的内容に触れたい。1950年代の頃、レヴィの第3回バークレー・シンポジュウムの論文は私に極めて大きな興味を引きつけるものであった。ガウス過程の表現の問題である。ガウス過程 $X(t), t \geq 0$, が与えられたとする。平均値は 0 としておく。この $X(t)$ からブラウン運動 $B(t)$ を構成して

$$X(t) = \int_0^t F(t,u)dB(u)$$

と表現しようというのである。今なら、この式で $dB(u)$ は, いろいろな意味から $\dot{B}(u)du$ と書きたいところである。$F(t,u)$ はランダムでない通常の関数で積分作用素の役割を演ずる。このように表現することの意義は深い。$X(t)$ は t の動きに従って変化する偶然量を表すものであり、それは相互に、一般には複雑に、関連しあって変化する。簡単にその行動を規定することはできない。共分散関数を計算すればよかろうという意見もあろうが、いろいろ多次元の同時分布をみることになるだけで、t の動きに応じた変化の様子は簡単にはわからない。しかし上式のように表現してみると、ブラウン運動が時間の変化に応じて逐次独立な偶然量を加えていき、しかもそれはガウス分布にしたがうこと等が使える。その変化量は、ランダムでない係数 $F(t,u)$ のウエイトがかかって、時間進行に応じた $X(t)$ の変化の様子が明らかになる。

簡単に言えば、与えられた偶然量 $\{X(t)\}$ から「独立」な確率変数系 $\{\dot{B}(t)\}$ を選んで、その関数であらわされたことになる。これこそ我々が主張する **独立還元論** の思想に沿うものである。

[Note] もっとも、我々の思考の経過は逆で、ガウス過程の表現を一つの典型として、独立還元論に至るのであるが。その底流には、レヴィの関数解析の方法がホワイトノイズ解析に繋がるものがあった。

さて、ここで問題がおこる。こんな好都合な表現がいつでも存在するのか？　存在しても一意的か？　など当然考えなければ理論にならない！　これらは自明なことではない。研究対象である。前述のレヴィの第3回バークレー・シンポジュウムの論文を

理解し敷衍してみると、それが明らかになる。問題は簡単なことではない。次の例をみてみよう。

$B(t)$ をブラウン運動とするとき、それから定義される二つのガウス過程

$$X_1(t) = \int_0^t (2t-u)dB(u)$$

と

$$X_2(t) = \int_0^t (3t-4u)dB(u)$$

をとり上げる。誰が見てもこの二つは異なるものだと思う。しかし、レヴィは両者は同じガウス過程であると主張する。それをレヴィの言い損ないと思って通過するならば、そこでは何も学んでいない。実際レヴィの主張の正しさを認識するのは、一見簡単なようでも、実は極めて奥深い内容を含んでいるのである。レヴィらしい問題提起ではなかろうか。彼による解説はない。そのほか、この論文は考えさせる多くの話題を含んでいて、読み応えがあった。そして更なる発展を促している。

これに応える理論には、いくつかの基本的な概念が必要であるが、中でも重要なのは **重複度** の概念の導入である。他の場面でも応用できる。たとえば、後述のレヴィ過程の分解である。

これらのことがわかっても、レヴィを超えたと自惚れてはいけないことは勿論である。

上の議論は、ガウス過程の標準表現の問題へのアプローチにおける視点に関連するが、もう一つの話題がある。パラメータが多次元ユークリッド空間のブラウン運動から導かれる、ある重要なガウス過程の性質で、パラメータの次元が奇数か偶数かによって全く異質になることがある。レヴィもそれをふまえて議論しているが、この奇数か偶数かの違いに対する説明はしない。我々が考えることであろうが、解決の見込みはなかった。恩師の小野勝治先生に相談したら、すぐに、それは self- dual な部分空間があるか否かの違いではないだろうか、ということであった。ヒントになったことは言うまでもない。

$アメリカでの経験を通じて}

1964-65 年度、私は P. マサニ教授に招かれて、アメリカの中西部に在るインディアナ大学で一年間、研究員として過ごす幸運に恵まれた。彼に直接知遇を得た結果である。

幸運はさらに続く。1965 年の夏、カリフォルニア大学のバークレー校で第 5 回のバークレー・シンポジュウムが開催されることになっていて、これに招かれた。レヴィも当然招待されると思って手紙を書いたら、いま報告できるような成果を持っていないから欠席するとのことであった。もし出席されたら、それこそ最高の礼遇をうけての上で、基調講演だと思ったのだが。レヴィの謙虚さには只管敬服するばかりであった。

ここでレヴィのバークレー・シンポジュウムへの関わりを見よう。カリフォルニア大学のバークレー校で開催されるこの研究会は当時では確率・統計の最高のものと言われるほどの高い学問的評価を得ていた。レヴィはどういうわけか、1945-6 年の第 1 回には出席していないようである。1950 年の第 2 回には出席して

Wiener's random functions, and other Laplacian functions

と題して講演している。報告集　Univ. of Californian, 1951, pp 171-187, のタイトルに出ている Laplacian はフランス式で、勿論ガウス型のことである。ガウス過程 $X(t)$ の時間変分 $\delta X(t)$ は dt の項と $\xi\sigma(t)\sqrt{dt}$ が出ていることに注意したい。ξ は $N(0,1)$ に従うガウス変数である。当時は　$\sqrt{dt}$ などを使って厳密な数学ができるのだろうか？と言って首をかしげた人もあった程である。

第 3 回は、1955 年の開催で、

A special problems of Brownian motion and a general theory of Gaussian random functions, 報告集、同出版社　pp133-175.

ここではガウス過程の標準表現を提唱していて、前節で詳しく述べた通りである。これは私達を 独立還元論 (Reductionism) に導いたパイロットであった。

レヴィは 1960 年開催の第 4 回のシンポジュームにも出席し、

An extension of the Lebesgue measure of linear set. 報告集、同出版社、pp273–287.

を発表している。そこでは同方向の角谷先生の論文が引用されている。

私は第5回に出席し、非線形確率解析に関する Hida-Ikeda の論文を発表した。付け加えて、私は今でいう Reductionism を考えていることに軽く触れた。確率論は課題をみつけては、その度毎に数学的な手法を開発しているように思われるかもしれないが、偶然現象を表す確率変数や確率過程など、「独立」確率変数系を構成し、その関数として元の偶然現象を記述して、統一的方法で解析を行うべきである。この時、独立変数系は、元の確率変数や確率過程と同じ情報を持たねばならない。これもレヴィの innovation（新生過程）の考え方に影響されていたと思う。1937年の著書で彼は離散パラメータの場合の試み（あまり成功はしていないが）も、その発想は学ぶべきであろう。

連続パラメータの場合には、レヴィは1953年のカリフォルニア大学バークレー校での講演記録において、確率過程 $X(t)$ の infinitesimal equation

$$\delta X(t) = \Phi(X(s), s \leq t, Y, t, dt)$$

を提唱している。Y は Y_t と書きたいところで、innovation に相当する。そこには強い causality に対する配慮が伺われる。

1960年ごろの確率論では予測理論が盛んに議論されていたこと、また問題を易しくして、線形予測でヒルベルト空間の知識を借用する風潮もあって、その改革も叫ばれていた時代である。ある外国の研究者は "not projection, but prediction" と言った。当時を知る人は些か苦笑するかもしれないが、軽々しく言う言葉ではないだろう。

いずれにしても、私は causality は第一義的に考えたいと思った。バークレーシンポジュウムの晴れ舞台でこんな本音が言える筈はない。しかし、講演の最後に、いくらか真意を漏らしたような気がする。

講演が済むと、早速 W. フェラー に呼び止められた。そして、最後の主張の真意を尋ねられた。レヴィの思想との絡み合い、勿論レヴィは私にとっては師である。そして自分の考えも話した。３０分以上、１時間近かったような気がする。聴き終わって一言「すぐプリンストンへ来ないか」であった。夢かと疑った。それも研究所での研究ではなく、数学教室で講義をせよとのこと、若い研究者としてこれほどの栄誉が他にあるであろうか。プリンストン訪問は２年伸ばしていただいて別れた。

このあたりのくわしい事情は他所でも書いているので、このあたりで止める。ここで補足したいことは、reduction という考えに至って、やっと レヴィの innovation（彼はこの言葉は使わないが）と同じ目線に並ぶことができた。レヴィをフォローするなら、バトンタッチではなくて、同じ出発点に立たせてもらって、自分の考えで、新しく出発することでなければならない。それがレヴィを師と仰ぐ所以である。

§アメリカ時代の続き。プリンストン時代とレヴィ

1967-8 年の プリンストンの数学教室のことを述べたい。ここでも「レヴィ」がキーワードであった。フェラーの代わりに講義をすることになった。

学部講義の他に、大学院の講義は週２回であった。講義のタイトルは Stationary stochastic processes とした。気取って基礎から出発したが、数人いた院生の数は減らなかった。講義ノートはシルバーシュタイン (Silverstein) 助教授が英語も直してくれた。それは、後に講義録として出版されることになった (Princeton University Press, 1970).

中心的な話題は、ホワイトノイズの非線形汎関数の扱いとその解析、加法過程のレヴィ分解である。いずれも源はレヴィと同じにしたかった。

レヴィの関数解析から確率論への移行が潜在的に私の頭の中にあって、それと私の考える reductionism とにより、大学院の講義も自ずからその方向に傾斜していった。

今となっては、もっとスマートに述べられるが、レヴィにウエ

イトをおいて昔の理解のレベルで言うと、レヴィが $L^2([0,1])$ の要素として表す関数 $x(t)$ は $\dot{B}(t)$ の実現とみなされる（補足説明が必要であるが）。乱暴に考えれば $x(t)$ は理想的な要素であり、連続無限個の系 $\{x(t), t \in [0,1]\}$　がベクトルである。連続無限個の成分からなる。そして単項式 $\prod_{t\in[0,1]} x(t)$ があり、それらの和（連続和）としての**多項式**

$$\int \cdots \int F(u_1, \cdots u_n) \prod x(u_j) du^n$$

がある。

この「多項式」という認識は重要である。表現の形式にこだわってはいけない。このような理解は次の展開に続く。

レヴィは各 $x(u)$ がガウス分布にしたがうとして上式の平均値を求めたりする。これらの形式的な関係の趣旨を付度して正当なものにしたい。たとえば $x(t)$ を $\dot{B}(t)$ の見本関数と見て、形式の正当化が考えられる。S-変換を適用するのは有効な手段であろう。その結果は興味深いものに違いない。

いくらか目的に近づいたけれども、やはりレヴィの意図の理解が不十分であるらしい。

ここで、連続無限個の独立確率変数ということにこだわった。そのままではうまくいく筈はない、第一に可分性が保証されない。しかし理想は追いたい（今の時点で説明すると）。それに対する答えがあった。

加法過程を時間微分すれば、連続個の（各 t で）独立変数列が得られる。　ここで、レヴィが加法過程を重視する理由も推察できる。加法過程は特別な役割を持つ確率過程で、単なる確率過程の分類の一種ではない。独立変数系の源でもある。

思考は次の段階に移る。加法過程は多種多様で、reduction の趣旨に沿う「素」(atomic) なものはどれくらいあるのか？　換言すれば加法過程の分解である。整数の素因数分解のようなものである。当時は、これらについてのレヴィの考えはよくわからなかった。プリンストンの講義では、決して誤魔化しではないが、苦し紛れに記号 P_{du} などを使った。

[参考]　例えば　[?] 参照。

最近レヴィについての本が出版された（岩波書店の吉田宇一氏に教えて頂いた）。それは三人のフランスの数学者によるものである。

M. Barbut, B. Locker and L. Mazliak, Paul Lévy and Maurice Fréchet. Springer, 2004.

実は、これは期待には十分応えてはくれなかった。前置きとして、延々と解説が続くが腑に落ちないこともある。レヴィの記号では $x(t)$ で、$L^2([o,1])$ の元を広義に解釈してすでに説明したように無限次元球面（半径は $\sqrt{\infty}$）の点としている。実質はホワイトノイズの非線形関数、特に多項式を扱うのであるが、ガウス分布が背後にあるのだからエルミート多項式（直交性が重要）が登場する筈である。その視点で見たとき必要な「くりこみ」をうまく解除していることもわかる。

今、我々が見る解説本では、それらを重複ウイーナー積分にしてしまって、無理に解説しており、些かピントはずれの説明になっているようだ。読者をまどわしてはいけない。重複ウイーナー積分は、それなりの意義と目的をもって定義されているのである。しかし参考になる内容も多い。レヴィからフレッシェーへの手紙の頻度を見るとき、次の各期間に集中していることがわかる：

1925-1928,　1943-45,　1951,　1961-1962,　1064-1965,

集中した思考の時期を思わせる。但し、特に 1930 年代の手紙を期待するのであるが、レヴィが書かなかったのか、紛失したのか、いずれにしても残念である。

§加法過程の分解

加法過程（詳しくはレヴィ過程）の分解についてのレヴィの研究は 1934 年から始まっている。初期の C.R. 誌の 3 篇の論文から始まり、1934 年の Pisa　J. ついで 1935 年の Journal のそれぞれ大作の論文で、彼の試行の跡を伺うことが出来るが、真意を推察するのは容易ではない。多くの人々はレヴィの 1937 年の

本の第7章を引用したり、その解説を試みたりするが、本当は今述べた初期 (1934-5) の論文を見なければ、その真の意味を理解できないと思う。そこにはパイオニアとしての思想の輝きを見ることができるのである。

当初の目的は、独立増分を持つ確率過程、すなわち加法過程を取り上げて、その基本的なものを決めることにあったようで、我々の独立還元論 (reductionism) の考え方と相通じるものがあると考えるのは僭越であろうか。時間微分すれば、独立変数系に移り、しかも可分性が保証される。従って、レヴィ過程は、種々のクラスの確率過程の中の一つではない。独立変数列、あるいはその和につての話の連続無限個の場合への移行であって、これは別格の確率過程である。

連続無限個の場合への移行の方法の一つとして、レヴィはしばしば離散近似法を用いる。そこでは、ガウス変数（分布）の占める重要な位置を繰り返し強調している。これは彼の思想の傾向を追うのに好都合と考え、[?], [?] に従って、いくらかその内容を紹介しよう。

記号もレヴィに従う。区間 $[0,1]$ でほとんど確実に連続な見本関数を持ち、時間的一様な増分をもつ加法過程、すなわちレヴィ過程を $x(t)$ と書く。この時は $x(t)$ はガウス過程、平均を 0 とすれば、定数倍を除いてブラウン運動になる。レヴィ過程から連続な見本関数の部分を除けば、複合ポアソン過程になる というのが云いならされた事実である。

これを、そのまま鵜呑みにするのは如何がなものであろうか。以下において、この結果に向けた一つの道筋を考えたい。いくつかの段階に分かれる。

i) 最初は i.e.r.v. (idealized elemental random variables) の系の種類である。"有限から無限へ"のアイディアにより、いくらか強い主張にして、有限個の独立確率変数列 i.i.d. で近似し、逐次細かくしていく。各段階での変数列は consistent であることを要求しないで、分布のみを追う。理想的な（レヴィは **extremal** なものという）分布の一つは、中心極限定理によりガウス分布、途中の連続した要素の部分和も同様な分布に従い、結局、定数

を除きブラウン運動となる。もう一つの分布はポアソン分布を定める。実際ポアソン過程を得る。これらはレヴィ過程で、時間微分して、ガウス型およびポアソン型の標準的なノイズを得る。

ここで重要な注意がある。ポアソン分布を得るときに、同じく extremal なものが多数出てきて、実際連続無限個存在し、それらにパラメータがつけられる。これは**空間のパラメータのノイズ**として認識される。実際そのノイズの各要素はポアソン分布の強度 (intensity) に相当する。このパラメータの値が違えば、同じポアソン分布でも分布のタイプは異なる。この事実がレヴィ過程の分解の指針となったのである。

一般に分解という以上は、整数の素因数分解のように、素なものという概念を明確にしなければならない。レヴィ過程の分解は、タイプについて素な加法過程の集まりになるように表現できなければならない。

ここで「素」という意味を明らかにしておきたい。確率分布 (確率変数の分布) をタイプで分ける。X と Y の分布が同じタイプというのは、実数 $a > 0$ と b とが存在して X と $aY + b$ とが同じ分布に従うときをいう。確率変数を正の Affine 変換で分類すれば、それに応じて分布がタイプで分類される。

例 1. 自明でないすべてのガウス分布は同じタイプである。

例 2. ポアソン型の分布 (ポアソン変数を定数倍した変数の分布) のタイプによる分類は強度の分類と一致する。スケールにはよらない。

これら二例を注意として、レヴィ過程の分解の筋書きができる。レヴィのアイディアに従おう。

レヴィ過程は加法的という性質のほかに、見本関数が第一種不連続性のみをもつことを仮定している。そこで、

1) すべての見本関数が連続な場合、定数倍をのぞき、それはブラウン運動である。レヴィは 1934 年 Pisa J. の論文で短い証明を書いている。深い内容であるが。

2) 一定の大きさのみの跳びをもつとき、マルコフ性から、一定値を保つ時間の分布は指数分布であり、この過程は、やはり定

数倍を除きポアソン過程である。

3) 連続な見本関数をもつ部分を除く。残りを、レヴィ過程の時間的一様性に注意して、跳びのみによって変化する関数の集合となることに注意して、一定の跳びを持つ関数を要素とする分解にいたる。それらはすべてポアソン型の確率過程である。すなわち、残りと言った部分は「複合ポアソン過程」になる。この過程の分解にあたり、レヴィはポアソン型の過程は強度が違う時のみ異なるタイプであることを認識している。しかし、このとき、見本関数について目に見える跳び u によって分解することは可能であるが、それと強度によるものとの整合性に注意して、集合 $N(t,u)$, 時刻 t で跳びが u となる点集合を用意する。そして、跳びと強度との双射的対応、すなわち実質上、強度の重複度 1 であることを仮定して分解している。(1964 年の文献の内容とは少し意味が異なるようだが。)

例. (Si Si)。$P_i(t,\lambda), i=1,2,$ を独立でおなじ強度をもつポアソン過程とする。$X(t)$ を

$$X(t) = P_1(t,\lambda) + \sqrt{2}P_2(t,\lambda)$$

とすれば、$X(t)$ はレヴィ過程で、強度の重複度は 2 となる。

重複度が 1 の場合、強度の構造を u の言葉で表現して、いわゆる強度のスペクトル分解が **レヴィ測度** $dn(u)$ として表される。

[註 1] これについての注意に関して、レヴィの 1937 の著書の 53 節の記述に注目したい。

なお、話は時間のパラメータの枠内で進められるが、そこに自然に空間パラメータの独立変数系がでてくるのは興味深い事実である。

[註 2] 上記の分解において、跳びは目に見えるが、すなわち by hand で処理されるが、強度は可視的ではない。それは抽象的に決めなければならない。分解にあたり注意すべきことである。詳しくは、下記論文参照。

Si Si, New noise depending on the space parameter and the concept of multiplicity. IDAQP and their applications. Singapore, March 2014.

§再びブラウン運動へ

1937 年の著書より、レヴィの興味はブラウン運動を中心とし、確率論の種々の種々のテーマに亘っている。特にブラウン運動の見本関数の研究では連続性やハウスドルフ測度、極限的行動、さらにマルコフ性、そして名前はつけなかったが実質的には強マルコフ性など、あるいは最適性が内在する行動など、確率論固有であって普通では思いつかないような特性を見出している。多次元値のブラウン運動と解析学との関連などユニークな研究もあり、これをフォローした研究者も多い。

特に、1960 年代には多次元パラメータを持つブラウン運動の重要性を認め、パラメータがユークリッド空間でも次元に依存する従属性、また多様体の場合に、その幾何学的構造故に内蔵しうる偶然性など、広い視野に立った研究がみられる。

以前、報告したが、私が 1968 年のプリンストン時代に、semester break を利用して、パリのレヴィの自宅を訪れた。そのときの印象は鮮やかに私の脳裏に残っている。彼は二つの課題を取り上げた。一つは、前述の、確率過程 $X(t)$ の infinitesimal equation である。これは私が熱心に語りかけた。もう一つは多次元パラメータのブラン運動の重要性を強調さたことである。この少し前に、レヴィがアカデミー会員に選ばれた時ガウンを整える費用がアカデミーから支給されたが、それを基金にして「レヴィ章」を設定した。それは多次元パラメータのブラウン運動の研究成果が対象となる。私に応募するよう勧められたが、当時私には、それに値する成果はなかったので、彼の期待に沿うことはできなかった。後にレヴィ賞はワシントン大学（シアトル）のガンゴリィ教授に与えられたことを知った。

訪問時のことで、余談になるが、テーブルに小さな鈴が置かれていて、夫人に用事があるときは、それを振って合図をしておられた。まことに、優雅な佇まいであった。

再び多次元パラメータのブラウン運動を取り上げる。それから

導かれるガウス過程の標準表現に関連して、すでに 1960 年代にH.P. マッキーン教授の結果があり、1980 年代には,同じく表現に関係してシィシィ教授の貢献もあった。それぞれ奇数次元と偶数次元を扱うものであった。

レヴィに戻る。1956 年には、パラメータが無限次元、特にヒルベルト空間の場合を論じている。なぜ無限次元にするのか。無限次元の理想的な測度からガウス分布がでてきたように、彼の初期の仕事のような掘り出しものを期待したのか、それは今も謎である。

レヴィの晩年の仕事はガウス系ばかりではなく、複合ポアソン型の確率過程とか、一般の確率変数の非線形関数など、幅広く、いわゆる確率解析と呼ばれる内容を広く手がけている。

最後の論文は、1971 年（すなわち亡くなった年）モスクワで開催された第 8 回国際科学史学会に提出されたもので（多分出席はしなかったと推察される）ある。タイトルは

Fonctions de lignes et équations aux dérivées fonctionnelles.

であった。学位論文と同じ分野,即ち関数解析・関数方程式への回帰であろうか？　これがレヴィの最後の論文となった。

§終わりに

まとめの一助として、レヴィの学風の特徴について、いくらか追加して感想を述べてみよう。

レヴィは数学の内容を、より一般化するとか、抽象化することには、余り興味を持たなかったようである。しかし、新しく見つけた内容はその述べ方も含めて、彼固有のアイディアに満ちていて,簡にして要をえたいる。表面とは違って奥深いものがある。しかし、しばしば簡であり過ぎることが多い。例をあげれば、前述の強マルコフ性（レヴィはこの述語は用いていないが）である。単にマルコフ過程といえば、ある時点でその値がわかれば、過去と未来は独立になる過程である。この時点を一般化して、その過程からきまる”適当な”ランダムな時間にしても同様な独立性があるという性質である。とにかくブラウン運動は

この性質をもつ。より一般の確率過程にも、マルコフ性より強いこの性質をもつものは詳しい構造をもつものとして広く確率解析に用いられている。

もう一つの例は、独立な確率変数 X, Y の和 $X+Y$ がガウス分布にしたがえば、X も Y もガウス分布に従うというのである。レヴィは証明を与えずにこれを主張したが、後に H. クラメールによって証明された。これは レヴィ-クラメールの定理とよばれる。証明は簡単ではないが、この事実を認識していたこと (単なる予想ではなく) には唯敬意を表するのみである。他にポアソン分布について同様な問題の時にも直感的な短い証明を述べている。こんなことは稀ではない。

別なことであるが、レヴィの personality についてである。1911 年の学位論文は指導教授の J. アダマール の方向の内容であった。つづいて 1922 年の「関数解析」の著書にはアダマールの Préface がある。しかし、1925 年の「確率論」の本には彼自身の (アダマールでなく) 序文のほかに付録の"Note"に無限次元空間の理想的な測度を考えようとして、自然にガウス測度の出てくる話がある。これは 1919 年の論文で 1924 年のアダマール-セミナーでの報告内容という。

1919 年に確率論の講義を依頼されたときのエピソードは前に述べた通りであるが、彼が確率論に興味を持ち始めた理由の一部を伺うことができるが、同時に、そのような転向をアダマールが不快に思いレヴィを阻害し初めたことの理由も推察できる。但しアダマール自身は、確率論についての、いくつかの短い論文も書いている。

考えてみれば当然であるが、レヴィは数学史にも関心をもっていた。1967 年にフランス科学アカデミー３００周年記念の特別企画の出版物がある： Troisième centenaire 1666-1966 である。レヴィはここに Les mathématiques の項に、幾何学から始まって確率論に終わる 70 ページの論説を展開している。彼の広い分野に亘る深い見識に敬意を表するのは当然であるが、単なる歴史的事実の紹介ではなくて、セオリーを訪ねてての回顧である。確率についても、ギャンブルではなくて、J. Bernoulli の思想と

貢献とを評価しているところが嬉しい。

参考文献

[1] T. Hida, Analysis of Brownian functionals. Carleton Univ. Math. Notes 13, 1975,

[2] T. Hida and Si Si, Lectures on white noise functionals. World Sci. Pub. Co. 2008.

. Springer,1980.

[3] T.Hida, White noise (in Japanese). Maruzen Pub. Co.,2014. english translation (by Si Si) to appear.

[4] T. Hida ed. The 5th Nagoya Lévy Seminar, 2006, Meijyo Univ.

[5] P.Lévy, Sur les intégrales dont les eléménts sont des variables aléatoires indépendants. Ann. della R. Scoula Normale Superior di Pisa. Ser. II, III (1934) 337 - 366. Also three C.R. papers (1934).

[6] P. Lévy, Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires indépendantes ou enchainées. Journ. de Math. XIV, Fasc IV, (1935), 347-402.

[7] P. Lévy et al, La vie et l'œvre de Jaques Hadamard. Monogr. n 16 de l'Enseignement Math. 1967.

[8] P. Lévy 著, 飛田・山本訳、一確率論研究者のの回想。 岩波書店、1973.

[9] D. Mumford, Dawnings of probability theory. 1999.

[10] Si Si, Graded rings of homogeneous chaos generated by polynomials in noises depending on time and space parameters, respectively. Moscow Conf. (2013).

[11] Si Si, IDAQP,Singapore Workshop paper (2014)

[12] M. Grothaus and L. Streit, Quadratic actions, semi-classical approximation, and delta sequences in Gaussian analysis. Report on Math. Phys.44 (1999), 381- 405.

[13] 谷川澄子、ポール・レヴィの全集からの話。The 5th Nagoya Lévy Seminar, 2006, Nagoya. 95-100.

[14] N. Wiener, Nonlinear problems in random theory, MIT, 1958, Lecture 2, Homogeneous polynomials and their average.