2014年10月11日　第25回「数学史シンポジウム」　　於　津田塾大学

天文学者マチンが見つけた円周率公式たち

東京海洋大学名誉教授

中　村　　　滋

§0　はじめに

初めて「数学史シンポジウム」で話すことになった中村です．東京商船大学（定年前に東京水産大学と統合して今は「東京海洋大学」）で39年間数学を教え，定年退職後学習院大学で教えていましたが，昨年古希を迎えたので非常勤講師も終わり，46年間の数学教師生活にピリオドを打ちました．15年間日本フィボナッチ協会の代表をしていました．6年前から朝日カルチャーで一般の方を対象にした数学の講座を持っています．「高校数学Ⅰ」から始めて，今は「高校数学Ⅲ」，また「数学カフェ」では「テイラー展開の発見物語」など，「数学ワンポイント講座」では，「マクロ―リン展開」，「ベータ関数・ガンマ関数」，「イプシロン・デルタ論法」などを講義しています．『数学セミナー』に連載していた「数学史の小窓」は間もなく単行本になります（補：2015年1月刊行）．また室井和男さんから届いた「古代オリエントの数学からギリシア数学への移行」をまとめた草稿を、何とか生かしたいと思って，無謀にも私が残りを書き，共立出版から『数学史―数学5000年の歩み―』として近く刊行の予定です（補：2014年11月刊行）．

さて，今日これからお話しするのは，『数学セミナー』連載の最終回「数学史の小窓　余滴４」（2012. 12.）で紹介した話題の一つ，円周率計算に使われる「マチンの公式」についての話です．昨年の第3回九州数学史シンポジウムで「数学史における最近の発券から」として，フェルマーの生年（実は1601年ではなく1607年でした）などと共に簡単に報告し，今年の9月には共立出版の「数学文献を読む会」でも同じ話題をお話ししました．その時の資料を一部改変してレジュメとします．

§1　天文学者マチン１６８０－１７５１．６．９．

円周率を計算するときに使われる「マチンの公式」は良く知られていますが，マチンその人についてはほとんど知られていません．生年･没年についてすら，様々な情報間には大きな混乱が見られます．そこで先ずマチンについてまとめておきましょう．

ジョン·マチン（John Machin ; 1680－1751）は 1680 年にイギリスで生まれました．若い頃の様子はほとんど分かりません．テイラー展開で有名なテイラー（Brook Taylor;1685－1731）がケンブリッジ大学のセント·ジョンズ·カレッジに入る 2 年前（1701）から，彼に数学を教えました．当時の普通のスタイルで，ロンドン市内のコーヒー·ハウスで だったようです．テイラー展開を思いついたのも，コーヒー·ハウスでのマチンとの会話で話されたマチンのアイディアがヒントになったと，テイラーの定理を知らせるマチンへの手紙（1712. 7. 26）で書いています．

いわゆる「マチンの公式」は，1706 年のジョーンズ（William Jones ; 1675－1749）の著書『数学への新入門』（“Synopsis Palmariorum Matheseos, or A New Introduction to the Mathematics”）で紹介されました．この公式は高く評価され，ニュートンをも魅了したのでした．1710 年 11 月に王立協会のフェローに選出され，1712 年には，その頃ニュートン側とライプニッツ側の間で争われていた「微分積分学」の先取権論争に深くかかわることになり，王立協会内に作られたニュートン側の委員会の一員になります．これは実質的にニュートン自身がリードする委員会で，マチンの他にハリー，ジョーンズなど全部で 6 人，そして後にドゥ·モアヴルやテイラーなど 5 人が加わりました．マチンは，ライプニッツを名指しで「剽窃」と糾弾したケイルと，テイラーとともに，「微分積分学」の先取権論争に関連した書簡集の出版に関わりました．これらの人たちが，ニュートンの信頼が特に厚かった人々です．

1713 年 5 月にロンドンのグレシャム·カレッジの天文学教授に就任し，この地位は 1751 年の彼の死まで，38 年間に渡って保持し続けました．彼が書いた月の交点［天球上で月の軌道と太陽の軌道が交わる点，ノード］についての短い論文は，晩年のニュートンが力を入れて改訂した“*プリンキピア*”第 3 版（1726）の第 3 巻命題 33 の後に載せられています．マチンはまた 1718 年から 47 年まで王立協会の書記を務めています．チャーミングで美しいと評判だったニュートンの姪のカトリーヌ（Catherine Conduitt;1679－1739 ; 1700 年頃から 20 年ほどニュートンと暮らした）が嫁いだコンデュイット（John Conduitt ; 1688－1737）は，ニュートンの死（1727）の後，ニュートンから聞いたことなどをまとめましたが，その中で次のように書いています．

「サー I.［アイザック·ニュートン］は私にこう語った：マチンは誰よりも良く*プリンキピア*を理解している，ハリーは最高の天文学者だ［が］，マチンは最高の幾何学者だ.」

マチンはまた 1722 年に，ニュートンの講義録『普遍算術（Arithmetica universalis)』(1707 年ラテン語初版 ; 1720 年ラフソンによる英訳出版）のラテン語第 2 版を編集·出版しています．

§2　マチンが見つけた円周率公式たち

この論文の目的は，ほとんど知られていないロバート・シムソンによるπの級数についての手稿を論じ，それによって標準的な数学史において著しい混乱があるジョン・マチンの貢献を明らかにすることである．（Ian Tweddle, "John Machin and Robert Simson on Inverse-tangent Series for π", *Arch. Hist. Exact Sci.* 42(1991) pp.1-14)

マチンの公式たち

円周率を求めるときに便利な，いわゆる「マチンの公式」は，

（1）　$\pi/4=4\mathrm{Arctan}(1/5)-\mathrm{Arctan}(1/239)$　……（M1）

という公式です．マチンが1706年に発見し，この公式で円周率πを100桁計算したということは有名で，どの本にも書いてあります．マチンはこの公式の他に，いくつもの公式を求めていた，ということが最近になって明らかになりました．すぐ後に述べる（M1－M7）です．そのうち，

（2）　$\pi/4=\mathrm{Arctan}(1/2)+\mathrm{Arctan}(1/3)$　……（M2）

（3）　$\pi/4=2\mathrm{Arctan}(1/2)-\mathrm{Arctan}(1/7)$　……（M3）

（4）　$\pi/4=2\mathrm{Arctan}(1/3)+\mathrm{Arctan}(1/7)$　……（M4）

については，普通（2）はオイラー(1737)に，（3）はヘルマン(1706)に，（4）はハットン(1776)に帰せられています．

しかし，じつはオイラー（Leonhard Euler；1707－1783）はこのときの論文で公式（1）（2）（4）を含めて様々な公式を導いていました．ハットン（Charles Hutton；1737－1823）もこのときの論文でアークタンジェント公式を求めるアルゴリズムを与えて，応用として公式（1－4）と後述の公式（M5）を求めていましたし，ヘルマン（Jakob Hermann；1678-1733）はヨーハン・ベルヌーイ（Johann Bernoulli；1667－1748）から「マチンの公式」のことを聞くと，それが確かに円周率に収束することを証明し，公式（4）の他にもいくつかの公式を見つけていたようです．

したがって，マチンが1706年(まで）にいわゆる「マチンの公式」を含むいくつもの公式を見付け1たこと，そして同じ年に「マチンの公式」を知ったヘルマンは証明と共にいくつかの公式を見つけた，というのが歴史的に正しい事実です．マチンはこのとき王立協会に論文を送ったのですが，後でそれを取り下げました．1706年にジョーンズが自著『数学への新入門』の中でいわゆる「マチンの公式」だけを紹介したので，それが有名になったのでした．ジョーンズはこの本で，マチンが同じ目的の公式をいくつか持っていると書いていましたが，最近になって同時代人の手紙や証言などを基にマチンが発見した公式たちが明らかになりました．重複をいとわずにそれらをまとめておきます：

(1)　$\pi/4 = 4\mathrm{Arctan}(1/5) - \mathrm{Arctan}(1/239)$　……(M1)

(2)　$\pi/4 = \mathrm{Arctan}(1/2) + \mathrm{Arctan}(1/3)$　……(M2)

(3)　$\pi/4 = 2\mathrm{Arctan}(1/2) - \mathrm{Arctan}(1/7)$　……(M3)

(4)　$\pi/4 = 2\mathrm{Arctan}(1/3) + \mathrm{Arctan}(1/7)$　……(M4)

(5)　$\pi/4 = 3\mathrm{Arctan}(1/4) + \mathrm{Arctan}(5/99)$　……(M5)

(6)　$\pi/4 = 3\mathrm{Arctan}(1/4) + \mathrm{Arctan}(1/20) + \mathrm{Arctan}(1/1985)$　……(M6)

(7)　$\pi/4 = 8\mathrm{Arctan}(1/10) - \mathrm{Arctan}(1/100) - \mathrm{Arctan}(11/5637) + \mathrm{Arctan}(10893/41480222056636)$　……(M7)

どうしてマチンが（２－４）のように簡単な式を見落として，素晴らしい式（１）一つを発見したのか？と不思議で仕方がなかったのですが，事実は全く違っていたのでした．

トゥウェドゥルの大手柄

何故これらの古い事情が最近になって明らかになったのかというと，トゥウェドゥル（Ian Tweddle）がシムソン(Robert Simson;1687-1768；"シムソン線"で知られる人)の生誕300年を記念して，マチンとシムソンのアークタンジェント公式をめぐる話をまとめたときに，古い文献や王立協会（ロイヤル・ソサイアティー）の記録を詳しく調べたためです．幸運にもいくつかの資料が残っていました．先ず，マチンが後の大数学者テイラーの若い頃に数学を教えた縁で，長い間手紙のやり取りがあったことがあげられます．また，グラスゴー大学のシムソンがいくつもの円周率の計算公式を見つけ，それらを王立協会に送ったところ，当時の王立協会の書記ジュリン（James Jurin；1684－1750）が，マチンが取り下げた論文の抜粋をシムソンに送り，シムソンが自分の結果がマチンの何番目の公式なのか，書き残していたこと(1723-4)が大きかったのです．さらに，後に大部の対数表を出版するマセレス（Francis Maseres;1731－1824）が学位論文の附録にマチンの証明法を解説していたこと(1758)と，王立協会の日録（Journal Book）なども役立ちました．

トゥウェドゥルが調査した結果，マチンが上記（１－７）の公式たちを見つけていたことと，マチンが円周率を小数点以下１００桁まで計算したときに使った公式が通説通り（１）だったこと，が確かめられました．

円周率計算のための級数展開公式小史

これらのことを説明する前に，円周率計算のための級数展開公式について，ざっとまとめておきましょう．微分積分学が出来上がる直前の高揚した時期に，「双曲線下の面積」，今の記号で $\int_1^k (1/x)\,dx$ が対数の性質を持つことが分かり（グレゴワール・ド・サンヴァンサンおよびサラサ），孤独な青年ニュートン(Isaac Newton；1642－1727）は独自に見つけた，$\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 \pm \cdots$ を使って繰り返し対数計算を行ないました．さらに自分が見つけた一般二項定理を用いて，$1/\sqrt{(1-x^2)}$ の展開式を項別に「積分」して，

(8)　$\mathrm{Arcsin}\,x = x + (1/2)\cdot x^3/3 + (1\cdot3/2\cdot4)\,x^5/5 + (1\cdot3\cdot5/2\cdot4\cdot6)\,x^7/7 + \cdots$　$(|x|<1)$

という級数展開を求めました．これを逆に解くことにより，ニュートンはヨーロッパ世界で最初に $\sin x$ の級数展開を求めています．その少し後に，メルカトール（Nicolaus Mercator；1619－87）は $\log(1+x)$ の展開式を公刊し(1668)，そのまた少し後にグレゴリー（James Gregory；1638－75）が $\mathrm{Arctan}\,x$ の展開公式を見つけました(1671)．同じ展開式をライプニッツ（Gottfried Leibniz；1646－1716）も独立に見つけたのでした：

（9）　$\mathrm{Arctan}\,x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + x^9/9 \pm \cdots \quad (|x| < 1)$

これらの公式はインドのケーララ学派では知られていたのですが，約 250 年遅れてヨーロッパでも発見されたのです．

円周率を最初に級数展開で表したのは，ヨーロッパではニュートンが最初のようです．1665－6 年に逆正弦関数をうまく使って小数点以下 16 桁を $\pi = 3.1415926535897928\cdots$ と計算しました．最後の 2 桁は丸め誤差で 28（正しくは 32）となっていましたが，見事なものです．その後にグレゴリーとライプニッツの公式，

（10）　$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 \pm \cdots$

が続きます．これは美しい公式ですが，計算には全く適しません．これに続いて，ハリー（Edmond Halley；1656－1742）は（9）式に $x = 1/\sqrt{3}$ を代入して次の「ハリーの公式」を求めました：

（11）　$\pi/6 = (1/\sqrt{3})(1 - 1/3\cdot 3 + 1/5\cdot 3^2 - 1/7\cdot 3^3 + 1/9\cdot 3^4 - \cdots)$　　$\cdots$ (H)

1699 年に，シャープ（Abraham Sharp；1653－1742）はこの公式で円周率を 72 桁まで計算しています（内 71 桁が正しい）．収束を早めるために，複数個のアークタンジェントを組み合わせるようになります．その最初は「ニュートンの公式(N)↓」です．ライプニッツに送ることを意図して，王立協会書記のオルデンブルグに宛てて書いたいわゆる“後の手紙”(1676 年 10 月 24 日付け)の中に次の効率的な円周率計算公式が書かれています：

（12）　$\pi/4 = \mathrm{Arctan}(1/2) + (1/2)\mathrm{Arctan}(4/7) + (1/2)\mathrm{Arctan}(1/8)$　　$\cdots$ (N)

以上が 17 世紀中の進歩です．そして 18 世紀に入るとすぐに，マチンの公式たちが見つかるのでした．中でもいわゆる「マチンの公式」（1）は衝撃と共に伝えられ，受け入れられました．ドゥ・モアヴル（Abraham de Moivre；1667-1754）からヨーハン・ベルヌーイへの手紙（1706.7.8）の中に（1）が書かれていて，これがヨーハンからヘルマンに伝えられると，ヘルマンはすぐに（1）が円周率に収束することを証明し，ライプニッツへの手紙（1706.8.21）で報告しています．2 年後のドゥ・モアヴルからヨーハン・ベルヌーイへの手紙（1708.7.6）では，（1）に対する 2 つの異なる証明が書かれています．

マチン，ドゥ・モアヴル，ヘルマンにつぐ動きは，上述のシムソンによる円周率公式の発見です．彼の論文には 6 つの公式が例題として与えられていて，最初の例 1 は（5）式，例 3 は（1），例 4－6 が順に（3）（4）（2）です．例 2 は，次の形のいわゆる「クリンゲンシェルナの公式」（クリンゲンシェルナ（SamuelKlingenstierna；1689－1785）の 1730.4.7.の手稿に書かれていた公式）です：

（13）　$\pi/4 = 8\mathrm{Arctan}(1/10) - 4\mathrm{Arctan}(1/515) - \mathrm{Arctan}(1/239)$　　$\cdots\cdots$ (SmK)

「シムソン・クリンゲンシェルナの公式」と呼ぶのが正しいと思いますので，（SmK）と書きました．後にマチンとシムソンは手紙を交換し，マチンからシムソンへ送られた手紙の中に（6）（7）が書かれています．マチン自身もさらに円周率公式を探求していたのですね．やがてオイラーも参戦して公式は豊かになりました．

ジョーンズによるマチンの公式の紹介

18 世紀の中頃までの雰囲気を見るために，ジョーンズによるマチンの公式の紹介，シムソンの論文，そしてマセレスの学位論文の附録に載せられたマチンの方法の紹介を見ておきます．

ジョーンズは自著『数学への新入門』p. 263 で“マチンの公式”を次のように紹介しています：

> 「特定の*曲線*や*平面*の*長さ*や*面積*を見出す様々な他の方法があり，それらは実践を非常に容易にする．例えば円において，直径が円周に対するように 1 が
> $\overline{16/5-4/239}-(1/3)\overline{16/5^3-4/239^3}+(1/5)\overline{16/5^5-4/239^5}-$,&c. = 3.14159, &c. $=\pi$
> に対するのである．この*級数*（同じ目的のために同じ原理で得られた他のものたちの中でも）を，私は並はずれた解析者であり，私が高く評価する友人ジョン・マチン氏から受け取った．」

円周の長さを表すために最初にギリシア文字「π」を使ったのは，イギリスの数学者オートリッド(William Oughtred ; 1575－1660）の有名な著書『数学への鍵』（1631)ですが，半径に無関係な「定数としての円周率」に対して「π」を使ったのはジョーンズのこの本が最初です．それはこの少し前の p. 243 に出てきます（次図）．上記のハリーの公式（1 1），すなわち，$t=1/\sqrt{3}$ に対するアークタンジェントを計算した後，図に見られるように，

38, Sec. t, a $=\left(\frac{rs}{s}\right)\frac{rs}{\sqrt{r^2-s^2}}=$ (if a be 30°) $\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

And 6a, or 6× $\overline{t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5}$, &c. $=\frac{1}{2}$ Periphery (π)

But 6× $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{3}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, and $t^2=\frac{1}{3}$; Let

$\alpha=2\sqrt{3}$, $\beta=\frac{1}{3}\alpha$, $\gamma=\frac{1}{3}\beta$, $\delta=\frac{1}{3}\gamma$, &c.

Then $\alpha-\frac{1}{3}\beta+\frac{1}{5}\gamma-\frac{1}{7}\delta+\frac{1}{9}\epsilon$, &c. $=\frac{1}{2}\pi$, or

$\alpha-\frac{1}{3}\frac{3\alpha}{9}+\frac{1}{5}\frac{\alpha}{9}-\frac{1}{7}\frac{3\alpha}{9^2}+\frac{1}{9}\frac{\alpha}{9^2}-\frac{1}{11}\frac{3\alpha}{9^3}+\frac{1}{13}\frac{\alpha}{9^3}$, &c.

Theref. the (*Radius is to ½ Periphery, or*) *Diameter is to the Periphery*, as 1,000, &c. to 3,141592653.58979323 84.6264338327.9502884197.1693993751.0582097494.4592307816.4062862089.9862803482.5342117067.9+, True to above a 100 Places; as Computed by the Accurate and Ready Pen of the Truly Ingenious Mr. *John Machin*: Purely as an Instance of the Vast advan-

ジョーンズ著『数学への新入門(Jones,"Synopsis Palmariorum Matheseos, or A New Introduction to the Mathematics")』，π が出る箇所（上から 2 行目）と，マチンが計算した π の 100 桁（下の方）

$\overline{6\times t-t^3/3+t^5/5,\ \&c.}=(1/2)\mathrm{Periphery}\ (\pi)$ と，意外にあっさりと導入しました（級数の上に引かれた線は「括線」で，今なら括弧を使うところですが，弧の代わりに上に線を引いたものです．Arctan の記号はまだ無かったので，上記の公式たちはこのように級数の形で表記されました．後にオイラーは『力学』(1736) において $\dot{A}t$ を用い，その後 $\overline{\mathrm{Atag}}$ を用いて，次第に現在の記号になっていきました．イギリスでは 19 世紀以降，ハーシェルによる $\tan^{-1}$ が急速に普及しました）．“Periphery” はもちろんここで問題にしていた単位円の円周です．そしてその６行下から３行に渡って π の値をピッタリ小数点以下１００桁まで書き記しています．ここで，ハリーの公式（１１）の直後に円周率１００桁を書いたために，マチンの円周率計算がハリーの公式によって行なわれたと主張する人が出てきたのでした．これが間違いだったことも，今回トゥウェドゥルが確かめたのです．彼は王立協会に行き，王立協会の日録 (Journal Book) を詳しく調べました．そしてそこに記録されていた 1717 年 11 月 14 日の会合におけるハリーの話を見つけたのです：

「･･･マチン氏によって級数の 28 項までを使って 42 桁まで正しい値が計算されて以来，何度か円の求積を行った．それはタンジェントが半径の１／５になる角度は四分円の１／８に極めて近いことから求められて，そして，4 倍されると八分円をわずかにタンジェントが半径の１／２３９分 だけ超過するのである．これは与えられたタンジェントから弧を求めるジェームズ･グレゴリー氏の定理を応用する非常に簡潔な方法であり，円の周長を 10 進法で丸々100 桁までの計算を遂行するときにマチン氏を誘ったもので，他の人の手によって 73 桁までは確かめられていたものである．」

実際に，いわゆる「マチンの公式」（１）で 28 項を計算すると，誤差は $4\times4\times\{5^{-57}/57\}\fallingdotseq4\times10^{-41}$ です．なおここで述べられた「他の人の手によって 73 桁までは確かめられていた」と書かれた計算は，シャープがハリーの示唆によって，上述のハリー公式 147 項を用いて 1699 年に行ったものです．丸め誤差で，小数点以下 72 桁目 6 が 5 になっていました（理論上の誤差は $(6/295)\times3^{-147.5}\fallingdotseq9\times10^{-73}$）．だから正確には 71 桁を正しく計算したことになります．

シムソンの論文

次に，自分の論文に書いた公式とマチンの見つけた公式を並べた上で，コメントも残してくれたシムソンの論文を紹介します．これがなかったら，マチンの貢献は埋もれてしまっていたでしょう．シムソンは 1723 年 2 月 1 日（旧暦）にこの論文をジュリンに送りました．その手紙で，アークタンジェントで円の周を計算する級数を一般的に求める方法を探して，2 つの命題とその系から次々に公式を見つけたと書いています．彼の言う命題は，タンジェントの加法定理や “2 倍角の公式”，また角度を半分，半分，･･･ としたときのタンジェントの漸化式などで，ヘルマンが既に 1706 年に求めていたものです．でも，シムソンは文献の中に見つけられなかったので自分で証明したと書いています．彼は自分が見つけた公式について，「すでに誰かが求めているかどうか全く分からないが，あなたならすぐ

にお分かりでしょう」と書き送りました．論文は上記の命題と系を証明した後に，自分が見つけた級数を例１～６に書き並べたのです．ジョーンズの本で知った，いわゆる「マチンの公式」（１）に感銘を受けて，類似の公式を探したのです．そして上述のように，ジュリンに，マチンの公式たちのうちの５個の公式と，クリンゲンシェルナの公式を書き送っています．添えられたコメントでは，いわゆる「マチンの公式」例３に対して，「マチン氏の発見した級数で最良のもの」と書き，例４では（２）式に対して「これがすべての中で最もシンプル」と書きました．最後に自分の見つけたタンジェント公式から得られる展開公式，

$$\pi/6=2\mathrm{Arctan}(1/2\sqrt{3})-\mathrm{Arctan}(1/15\sqrt{3}) \qquad \cdots(\mathrm{Sm})$$

を，他のすべての公式と同様に，級数の形で示して論文を終えています．

マセレスの学位論文附録

1758年に出版されたマセレスの学位論文は，「代数学における負の記号の使用についての学位論文：それに関して通常与えられる規則の証明を含み，２次と３次の方程式が負の根を考えることなしに如何に説明されるかを示している.」という表題を持つ300ページほどの長大なものです．表紙は11行に渡ってこのタイトルが印刷されていて，その下に小さく，「マチン氏の 円の求積 を附録として付け加える」と添えられています．幸運にもこの論文を入手できたので，18世紀半ばの「マチンの公式」に対する感動と情熱を感じることが出来るこの附録を翻訳して，この小論においても「附録として付け加え」て，最後に載せることにします．

トゥウェドゥルの論文の顛末

以上のように，「標準的な数学史において著しい混乱があるジョン・マチンの貢献」を明らかにしたトゥウェドゥルの論文も数奇な経過をたどりました．シムソンの300回目の誕生日の頃，1987年10月にホワイトサイド教授によって受理されたのですが，論文が編集者に送られる途中で失われてしまい，複製が必要なことに気付き，印刷されるまでに３年も掛かったのでした．それだけでなく，この論文が明らかにした衝撃的な事実も，不思議なことに，まだ一般的には十分に知られてはいません．残念なことです．私自身もうっかりしていて，最近になるまで気付かなかったほどなので，これから「正しい事実」を「新しい常識」にするべく，頑張って行きたいと思います．

（以上，一部『数学セミナー』巻頭連載「数学史の小窓　余滴４」（2012.12月号），九州大学数学史シンポジウム（2013.2.12－15）レジュメ「数学史における最近の発見から――フィボナッチ，フェルマー，そしてマチン」，および拙著『円周率 ― 歴史と数理』（共立出版；2013）も利用）

文献：

（１）Francis Maseres ; "A Dissertation on the use of the negative sign in ALGEBRA" (1758) ; Gale ECCO Print Edition (print-on-demand by digital scans)
（２）IanTWEDDLE ; John Machin and Robert Simson on Inverse-tangent Series

for π ; *Arch. Hist. Exact Sci.*,42, (1991); pp.1-14

≪附録≫

マチン氏の円の求積　　(マセレスの学位論文 (1758) 附録)

ART *1*　以下に述べる円の正方形化，すなわち円の周長の直径に対する比の値を見出す方法に関して，才能に富んだ故マチン氏，グレシャム・カレッジの天文学教授，によって考案された方法は驚くほど便利で迅速で，ハリー博士の 30° のタンジェントを使う方法さえも含めて，その目的のためにこれまでに発見されたすべての方法ばかりか，この種のものとして期待され得るすべての方法をはるかに超えるものであり，その上さらに極めてエレガントで独創的であって，この好機をとらえてそれを読者に伝えるのを避けることが出来ない，それが上述の学位論文の主題とほとんど，いや何の関係もないとしても．それは次の 3 つの原理，すなわちレンマに基礎を置いているが，その証明は，すべてよく知られた命題であり，すでにある沢山の数学書で証明されているのでここでは省略する．

2　これらのレンマの最初のものは，もしもａが 45° より小さい円の弧で，ｔがその弧のタンジェントであり，ｒが円の半径のとき，弧ａが２倍のときのタンジェントは＝2ｒｒｔ／(ｒｒ－ｔｔ)，あるいは，もしも半径ｒを＝１とすると，2ｔ／(１－ｔｔ) である．

２番目のレンマは，もしも四分円以下の任意の円弧のタンジェントがＴで，ｔが同じ円の先の弧より小さな別の弧のタンジェントで，ｒが円の半径のとき，これらの弧の差のタンジェントは，Ｔとｔをタンジェントとして，＝ｒｒ×(Ｔ－ｔ)／(ｒｒ＋Ｔｔ)，あるいは，もしも半径ｒを＝１とすると，(Ｔ－ｔ)／(１＋Ｔｔ) である．

したがって，小さい方の弧が＝45° だとすると，そのタンジェントｔは半径ｒに等しく，これがここで考えている場合であるが，これらの弧の差のタンジェントは ＝ｒｒ×(Ｔ－ｒ)／(ｒｒ＋Ｔｒ)，あるいは，もしも半径ｒを＝１とすると，(Ｔ－１)／(１＋Ｔ) である．

３番目のレンマは，もしもａが 45° 以下の円の弧で，ｔがその弧のタンジェント，ｒが円の半径のとき，弧ａは無限級数 $t-t^3/3rr+t^5/5r^4-t^7/7r^6+t^9/9r^8-t^{11}/11r^{10}+t^{13}/13r^{12}$&c. あるいは，もしも半径ｒを＝１とすると，$t-t^3/3+t^5/5-t^7/7+t^9/9-t^{11}/11+t^{13}/13$, &c. ここで継続の法則は極めて明瞭である．

3　ＡＥをその接線ＡＢが半径ＭＡの１／５であるような弧とし，ＡＦをＡＥの２倍，ＡＧを４倍，とし，ＡＫを４５° の弧，ＡＣ，ＡＤ，ＡＬを弧ＡＦ，ＡＧ，そしてＡＫの接線とする．ＡＭ＝１，ＡＢ＝ｂ，ＡＣ＝ｃ，そしてＡＤ＝ｄとおく．すると上述の最初のレンマにより，ｃ＝2ｂ／(1－ｂｂ)＝2／5／(1－1／25)＝2／5／(24／25)＝2／5×(25／24)＝5／12 であり，ｄ＝2ｃ／(1－ｃｃ)＝10／12／(1－25／144)＝10／12／(119／144)

＝(10／12)×(144／119)＝10×12／119＝120／119　となる．したがってｄ，すなわちＡＤ，は１，すなわちAM，より大きく，したがってＡＬより大きい．したがってＡＧはＡＫ，すなわち45°より大きい．弧ＡＧ，ＡＫの差ＧＫの接線ＫＯを引き（というか，余りにも小さいので，それが引かれたものとし），それをｅと呼ぶと，（レンマ２によって），ｅ＝（ｄ－1)／(1＋ｄ)＝(120／119－１)／(1＋120／119)＝(1／119)／(239／119)＝1／239となる．そこで，弧ＡＥ，ＧＫの長さを，その接線ｂとｅから，すなわち1／5と1／239，前述の最後のレンマから求める；そしてはじめの弧の２倍から後者の弧を引くと，余りは45°の弧になり，それは４倍すると半円周の長さを与える．

4　計算過程は次の通りである．ｂ＝1／5，すなわち[0.]2 だからｂｂは＝ [0.]04，だから弧ＡＥを表す級数 $b - b^3/3 + b^5/5 - b^7/7$，&c. のｂの奇数乗は，最も簡単に次々に [0.]04 を掛けることで得られる．

b =.2

b^{3}=.　8,

b^{5}=.　,32

b^{7}=.　,　12,8

b^{9}=.　,　,512,

b^{11}=.　,　,　20,48

b^{13}=.　,　,　,819,2

b^{15}=.　,　,　,　32,768,

b^{17}=.　,　,　,　1,310,72

b^{19}=.　,　,　,　,　52,428,8

b^{21}=.　,　,　,　,　2,097,152,

b^{23}=.　,　,　,　,　,　83,886,08

b^{25}=.　,　,　,　,　,　3,355,44

b^{27}=.　,　,　,　,　,　,134,21

b^{29}=.　,　,　,　,　,　,　5,36

b^{31}=.　,　,　,　,　,　,　,21

したがって弧ＡＥの級数の正の項は，

b　＝ 2

$b^{5}/5$=.　,　64,

$b^{9}/9$=.　,　,　56,888,888,888,888,8

$b^{13}/13$=.　,　,　,　63,015,384,615,3,.

$b^{17}/17$=.　,　,　,　,　77,101,176,4

$b^{21}/21$=.　,　,　,　,　,　99,864,3

$b^{25}/25$=.　,　,　,　,　,　,134,2

$b^{29}/29$=.　,　,　,　,　,　,　,　,1,　したがって，

それらの和，　.200, 064, 056, 951, 981, 474, 679, 1　は＝ＡＥの値の正の部分である．

そして負の項は，

$b^3/3$＝.　2, 666, 666, 666, 666, 666, 666, 6

$b^7/7$＝.　　, 1, 828, 571, 428, 571, 428, 5

$b^{11}/11$＝.　　,　　, 1, 861, 818, 181, 818, 1

$b^{15}/15$＝.　　,　　,　　, 2, 184, 533, 333, 3,

$b^{19}/19$＝.　　,　　,　　,　　, 2, 759, 410, 5

$b^{23}/23$＝.　　,　　,　　,　　,　　, 3, 647, 2

$b^{27}/27$＝.　　,　　,　　,　　,　　,　　, 4, 9

$b^{31}/31$＝.　　,　　,　　,　　,　　,　　,　　, 0,　したがって，

それらの和，.002, 668, 497, 102, 100, 716, 309, 1　は＝ＡＥの値の負の部分である．

200, 064, 056, 951, 981, 474, 679, 1　から，

002, 668, 497, 102, 100, 716, 309, 1　を引いて，

余り　197, 395, 559, 849, 880, 758, 370, 0　が＝ＡＥとなる．

4

それゆえ　789, 582, 239, 399, 523, 033, 480, 0　＝ＡＧである．

ｅ，すなわち 1／239，の奇数乗は，次々にｅｅ，すなわち 1/57121 を掛けること，あるいは 57121 で割ることで得られ，次のようになる．

ｅ　＝.　4, 184, 100, 418, 410, 041, 841, 0

e^3＝.　　,　　, 73, 249, 775, 361, 251, 4

e^5＝.　　,　　,　　, 1, 282, 361, 572, 1

e^7＝.　　,　　,　　,　　,　　, 22, 449, 9

e^9＝.　　,　　,　　,　　,　　,　　,　　, 3

したがって弧ＧＫを表す級数　$e - e^3/3 + e^5/5 - e^7/7$, &c. の項は，

ｅ　＝.　4, 184, 100, 418, 410, 041, 841, 0

$e^5/5$＝.　　,　　,　　,　　, 256, 472, 314, 4

$e^9/9$＝.　　,　　,　　,　　,　　,　　,　　, 0

その和　,　004, 184, 100, 418, 666, 514, 155, 4　は＝ＧＫの値の正の部分である．

そして負の項は：

$e^3/3$＝.000, 000, 024, 416, 591, 787, 083, 8

$e^7/7$＝.　　,　　,　　,　　,　　, 3, 207, 1

その和，　000, 000, 024, 416, 591, 790, 290, 9　は＝ＧＫの値の負の部分である．

004, 184, 100, 418, 666, 514, 155, 4　から，

000, 000, 024, 416, 591, 790, 290, 9．を引いて，

余り　　　　004, 184, 076, 002, 074, 723, 864, 5　が＝ＧＫとなる．

最後に，　　789, 582, 239, 399, 523, 033, 480, 0　＝ＡＧから

　　　　　　004, 184, 076, 002, 074, 723, 864, 5　＝ＧＫを引いて，

　　　　　　785, 398, 163, 397, 448, 309, 615, 5　＝ＡＫ，すなわち 45°の弧である．

　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　4

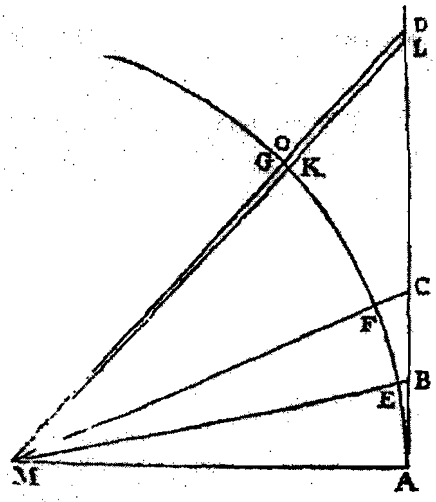
したがって 3 141, 592, 653, 589, 793, 238, 462, 0 が，半径 1 の円の半円周の長さであり，この数値は小数点 21 桁まで正しく，誤差は 22 桁目が，ゼロではなく 6 になることである．

終わり

infinite ſeries $t - \frac{t^3}{3rr} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \frac{t^{11}}{11r^{10}} + \frac{t^{13}}{13r^{12}}$, &c. or, if the radius r be put $= 1$, $t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11} + \frac{t^{13}}{13}$, &c. in which the law of continuation is very manifeſt.

Theſe things being premiſed, the method itſelf may be explained as follows.

3 Let AE be an arc whoſe tangent AB is $\frac{1}{5}$ of the radius MA, and let AF be double, and AG quadruple, of AE, and AK be an arc of 45°, and let AC, AD, AL, be the tangents of the arcs AF, AG, and AK, reſpectively. Put AM $= 1$, AB $= b$, AC $= c$, and AD $= d$. Then, by the firſt of the foregoing lemmas, we ſhall have $c = \frac{2b}{1-bb} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{2}{5} \times \frac{25}{24} = \frac{5}{12}$, and $d = \frac{2c}{1-cc} = \frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{\frac{10}{12}}{\frac{119}{144}} = \frac{10}{12} \times \frac{144}{119} = \frac{10 \times 12}{119} = \frac{120}{119}$. Therefore d, or AD, is greater than 1, or AM, and conſequently than AL, and conſequently AG is greater than AK, or 45°. Draw KO the tangent of GK, the difference of the arcs AG, AK,



(or rather, becauſe it is ſo extremely ſmall, conceive it to be drawn) and call it e, then (by lemma 2) we ſhall have $e = \frac{d-1}{1+d} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{\frac{1}{119}}{\frac{239}{119}} = \frac{1}{239}$. Find now the lengths of the arcs AE, and GK, from their tangents

マセレスの附録の２ページ目にある図