完全数の歴史と究極の完全数

飯高 茂

平成 27 年 2 月 11 日

目次

1 はじめに

自然数 a の約数の和を $\sigma(a)$ で表すことは現在ほぼ確定した記号であるが, これを a の関数と見てユークリッド関数と言いたい.

a, b が互いに素ならば

$$\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b)$$

が成り立つ. これを $\sigma(a)$ は乗法性を持つと言う.

2 等比数列の和

$a=2^e$ とし, 等比数列の和の公式を用いると

$$\sigma(a)=\sigma(2^e)=2^{e+1}-1=2a-1.$$

と書けるから $a=2^e$ なら $\sigma(a)=2a-1$ を満たす.

これはごく初等的なことであるが, 等比数列の和の公式が用いられたことに注意を払いたい.

そこで数学の世界によくあることだが, この逆を問題として考える.

$\sigma(a)=2a-1$ を満たす自然数 a は $a=2^e$ に限るか?

ごく自然な発想で生まれた問題である. 一般に $\sigma(a)-2a=-1$ を満たす自然数を概完全数 (almost perfect number) と呼ぶそうだ. そこで 200(実際には $a \leq 200000$) までの範囲で概完全数をパソコン君に探してもらうと次の表ができた.

概完全数として 2 のべきだけがでてきた. しかし 2 のべき以外に概完全数があるかは, 未だに解決されることなく, 一見やさしそうで意外に難しい問題として残されている.

表 1: 概完全数

a	$\sigma(a)$	素因数分解
2	3	[2]
4	7	[2^2]
8	15	[2^3]
16	31	[2^4]
32	63	[2^5]
64	127	[2^6]
128	255	[2^7]

2.1 概完全数問題の $s(a) = 1, 2$ での解決

$\sigma(a) - 2a = -1$ を条件 $s(a) = 1, 2$ の下で解いてみよう.

$s(a) = 1$ のとき. $a = p^e$ とかける. $\overline{p} = p - 1$ とおくと $\sigma(a) = \frac{pa-1}{\overline{p}}$ となので,

$$\frac{pa-1}{\overline{p}} = 2a - 1.$$

よって

$$pa - 1 = (2a - 1)\overline{p}.$$

$$a(p - 2\overline{p}) = 1 - \overline{p} = 2 - p.$$

$p - 2\overline{p} = 2 - p$ により

$$2 - p = a(2 - p).$$

$a > 1$ なので, $p = 2$. よって $a = 2^e$.

$s(a) = 2$ のとき. 概完全数はないことを背理法で示す.

$a = p^e q^f (p < q), \overline{p} = p - 1, \overline{q} = p - 1$ とおく.

$X = p^e, Y = q^f$, $A = pX - 1, B = qY - 1$, $\rho' = \overline{pq}$ とおくと

$\sigma(a) = \frac{AB}{\rho'}, a = XY$ と書けるので,

$$\frac{AB}{\rho'} = 2XY - 1.$$

これを整理して

$$AB - 2\rho' XY = -\rho'.$$

左辺の XY の係数を R とおくと $R = pq - 2\rho' = 2 - (p-2)(q-2)$.

$$RXY - (pX + qY - 1) = -\rho'. \tag{1}$$

しかし $RXY = (pX + qY - 1) - \rho' > q^2 - 1 - \rho' > 0$ により $R > 0$.

$0 < R = 2 - (p-2)(q-2)$ を使うと $p = 2$, よって $\rho' = \overline{q}, R = 2$.

式.(1) より

$$2XY - (2X + qY - 1) = -\overline{q}.$$

これを変形して

$$0 = 2XY - (2X + qY) + 1 + \overline{q} = 2XY - (2X + qY) + q.$$

一方 $2XY - (2X + qY) + q = (2X - q)(Y - 1)$ により
$0 = (2X - q)(Y - 1)$. $Y \neq 1$ なので $q = 2X = 2^{e+1}$, 矛盾.

$s(a) \geq 3$ の場合は複雑になりなかなかできない.

3 3点セット

関連して次の問題を合わせ考え,$a = 2^e$ に関しての 3 点セットと言う.

1. $\sigma(a) - 2a = 0$ を満たす自然数は何か,
2. $\sigma(a) - 2a = -1$ を満たす自然数は何か,
3. $\sigma(a) - 2a = 1$ を満たす自然数は何か.

全体を把握するため $\sigma(a) - 2a$ の順に並べた表を観察して見よう.

表 2:

a	素因数分解	$\sigma(a)$	$\sigma(a) - 2a$
7	[7]	8	-6
15	[3, 5]	24	-6
9	$[3^2]$	13	-5
5	[5]	6	-4
14	[2, 7]	24	-4
44	$[2^2, 11]$	84	-4
3	[3]	4	-2
10	[2, 5]	18	-2
2	[2]	3	-1 (2 のべき)
4	$[2^2]$	7	-1
8	$[2^3]$	15	-1
16	$[2^4]$	31	-1
32	$[2^5]$	63	-1
6	[2, 3]	12	0 (完全数)
28	$[2^2, 7]$	56	0
20	$[2^2, 5]$	42	2
18	$[2, 3^2]$	39	3
12	$[2^2, 3]$	28	4
40	$[2^3, 5]$	90	10

4 完全数

完全数 (perfect number) とは $\sigma(a)-2a=0$ を満たす 自然数 a のことである.

偶数の完全数はオイラーによってその形が決められたが, 完全数は無限にあるか奇数の完全数は存在するかなどは大難問である.

4.1 オイラーによる証明

a を偶数の完全数とし, $a=2^eL(L:$ 奇数$)$ の形に書く.

$$\sigma(a)=\sigma(2^e)\sigma(L)=(2^{e+1}-1)\sigma(L)=2^{e+1}L$$

となるので $N=2^{e+1}-1$ とおけば $N\sigma(L)=(N+1)L$ となり

$$N(\sigma(L)-L)=L.$$

$d=\sigma(L)-L$ とおくとき $Nd=L$. したがって d は L の約数である. つぎの 3 つの場合がある.

(1) $d=1$. $N=L.d=1=\sigma(L)-L$ により L は素数 p であり, $p=L=N=2^{e+1}-1$. $p=2^{e+1}-1$ は素数で $a=2^ep$. これは完全数の形. これを特にユークリッドの完全数という.

(2) $d=L$. $N=1=2^{e+1}-1$ になるので $e=0$. a が奇数になり仮定に反す.

(3) $1<d<L$. d は $1,L$ 以外の約数なので $\sigma(L)>1+L+d$. よって $d=\sigma(L)-L>1+d$. これは矛盾.

$\sigma(a)-2a=1$ を満たす自然数は pseudo perfect number (疑似完全数) と呼ばれることがある.
これは果たして存在するかどうかが問われている.

$\sigma(a)-2a=-1,0,1$ を満たす自然数 a を求める問題はどれも未解決の難問である. 完全数の問題が 2300 年かかっても解けない難問だが, その前後の問題 (3 点セット) も未だに解けない. 実は, これらの問題は解けないで残されている点に価値がある, ということである.

1995 年にフェルマーの大定理の証明が確認されて,350 年におよぶ数論の難問が解けて目標を失った人は数知れない. しかし 3 点セット問題が手つかずに残されているのは大きな励みになるであろう.

5 完全数の歴史

L.E.Dickson 著の Theory of Numbers I,1919/20(Chelsea Publishing Company 版 1992) の第 1 章を参考にして完全数の歴史について書いて簡単にふれる.

ユークリッドは原論 IX,prop.36 において $p=1+2+2^2+\cdots+2^n$ が素数なら $a=2^np$ は完全数になることを示した.

a の約数は

$$1,2,2^2,\cdots,2^n,1\cdot p,2\cdot p,2^2\cdot p,\cdots,2^n\cdot p$$

であってこれらの和が等比数列の和の公式を使うと $2a$ になる.

AD 100 年の頃 Nichomchus はすべての偶数を 過剰数 $(\sigma(a)-a>a)$, 不足数 $(\sigma(a)-a<a)$, 完全数 $(\sigma(a)-a=a)$ に分類した.

完全数は稀少性があり, 6,28,496,8128, などでこれらの末尾の数が 6,8 であることに注目した. (6,8 は交互にきて、さらに桁が上がる度に 1 つずつあることを観察したがこれらは正しくなかったことが後にわかった).

1456 年の文書に 5 番目の完全数 33550336 が記載された.

Luca Paciuolo (1494 年 ?) は $1+2+2^2+\cdots+2^n$ が素数になることは実行して初めてわかることだが無限にあるだろう, と述べた.

Cardan (1501–1576) は完全数はユークリッドが与えた方法ですべて構成されるだろう.

Tartaglia (1506–1559) $1+2+4, 1+2+4+8, 1+2+4+8+16, \cdots$ は交互に素数か合成数になる, と述べた.

F.Maurolucus (1494– 1575) は完全数は三角数になることを注意した.

$q=2^{e+1}-1$ とおくと $q+1=2*2^e$ によって

$$1+2+3+\cdots+q=\frac{q(q+1)}{2}=2^e q=a$$

等比数列の和で定義された完全数が等差数列の和として書ける三角数であった.

R.Descartes は 1638 年の Mersenne への手紙で偶数完全数はユークリッドが与えた形になることは証明できたと思う. しかし奇数完全数は ps^2 の形になる.

Fermat は 1640 年の Mersenne への手紙で n が合成数なら 2^n-1 も合成数. n が素数なら 2^n-2 は $2n$ で割れる.

L.Euler は 1752 年の Goldbacher への手紙で 7 個の完全数は $2^{p-1}(2^p-1), p=2,3,5,7,13,17,19$ であるが $p=31$ のときは分からない, と述べた.

L.Euler は Bernoulli への手紙で $p=31$ のときは完全数であることを確認した.

L.Euler は死後出された論文で 偶数完全数は $2^{p-1}(2^p-1)$ と表せることの証明を与えた.

Sylvester はオイラーの証明を確認した.

Servaias とともに奇数の完全数は 4 個以上の素因子を持つ事を示した.

Dickson にある証明:

$(2^{e+1}-1)\sigma(L)=2^{e+1}L$ により

$$\frac{2^{e+1}-1}{2^{e+1}}=\frac{L}{\sigma(L)}.$$

左辺は既約分数だから $L=c(2^{e+1}-1), \sigma(L)=c2^{e+1}$ を満たす自然数 c がある. $c=1$ なら $\sigma(L)=L+1$ になるので L は素数.

$c>1$ なら $1, L$ 以外の L の約数.

$$c2^{e+1}=\sigma(L)\geq 1+L+c=1+c(2^{e+1}-1)+c=1+c2^{e+1}$$

となり矛盾.

6 $s(a)=2$ のときの完全数の証明

ここでは $s(a)=2$ のときだけ扱う.

a を素因数分解し $a = p^e q^f$ とする. $X = p^e, Y = q^f$ とおくと $a = XY$ となる. すると $\overline{p} = p-1, \overline{q} = q-1$ を使うと

$$\sigma(a) = \frac{(pX-1)(qY-1)}{\overline{pq}}$$

であり,$A = pX-1, B = qY-1, \rho' = \overline{pq}$ とおけば

$$\frac{AB}{\rho'} = 2XY.$$

書き直して

$$AB = 2\rho' XY.$$

$AB - 2\rho' XY$ の XY の係数を R とおくとき $R = pq - 2\rho'$ となり

$$RXY = pX + qY - 1.$$

この式を基本等式という.

$R = pq - 2\rho' = 2-(p-2)(q-2)$ であり基本等式から $R > 0$ なので $p = 2$ かつ $R = 2$. したがって $2XY = 2X + qY - 1$ が成り立ち, $Y \geq q$ によって,

$$\begin{aligned} 0 = 2XY - (2X + qY - 1) &= (2X-q)Y - (2X-1) \\ &\geq (2X-q)q - (2X-1) \\ &= 2X(q-1) - (q^2-1) \\ &= \overline{q}(2X-q-1) \end{aligned}$$

よって

$$q + 1 \geq 2X.$$

一方, $(2X-q)Y = (2X-1)$ によれば $2X - q \geq 1$. すなわち $2X \geq q+1$. よって $2X = q+1.q = 2^{e+1}-1, a = XY = 2^e q$. したがって,$a$ はユークリッドの完全数.

7 完全数の平行移動

$q = 2^{e+1}-1$ が素数のとき $2^e q$ は完全数になる. この平行移動を考えよう.

別のパラメータ m に対して $q = 2^{e+1}-1+m$ が素数のとき $a = 2^e q$ を m だけ平行移動した完全数という. ただし m は偶数の整数.

$$\sigma(a) = \sigma(2^e q) = (2^{e+1}-1)(q+1), q+1 = 2^{e+1}+m$$

によれば

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= \sigma(2^e q)\\ &= (2^{e+1}-1)(q+1)\\ &= (q-m)(2^{e+1}+m)\\ &= q(2^{e+1}+m) - m(2^{e+1}+m)\\ &= 2a + qm - m(q+1)\\ &= 2a - m.\end{aligned}$$

かくして $\sigma(a) = 2a - m$ がえられた.
そこで
方程式 $\sigma(a) = 2a - m$ の解は偶数完全数の平行移動となるか?
という問題がある. m が少し大きいと反例が出やすい.
次に $m = 4$ の場合を扱う.

7.1 $\sigma(a) = 2a - 4$

$\sigma(a) = 2a - 4$ を満たす解の表を作った.

表 3: $\sigma(a) = 2a - 4$

a	素因数分解	$\sigma(a)$
5	$[5]$	6
14	$[2, 7]$ 24	
44	$[2^2, 11]$	84
110	$[2, 5, 11]$	216
152	$[2^3, 19]$	300
884	$[2^2, 13, 17]$	1764
2144	$[2^5, 67]$	4284
8384	$[2^6, 131]$	16764
18632	$[2^3, 17, 137]$	37260

110,884, 18632 は $s(a) = 3$ なので反例になる.

7.2 $m=0$; 完全数の場合

表 4: 完全数の場合

$e \bmod 4$	e	$e+1$	$2^e * q$	a	$a \bmod 10$
1	1	2	$2*3$	6	6
2	2	3	2^2*7	28	8
0	4	5	2^4*31	496	6
2	6	7	2^6*127	8128	8
0	12	13	$2^{12}*8191$	33550336	6
0	16	17	$2^{16}*131071$	8589869056	6
2	18	19	$2^{18}*524287$	137438691328	8
2	30	31	A	B	8
0	60	61	C	D	6
0	88	89	E	F	6

$A = 2^{30} * 2147483647$
$B = 2305843008139952128$
$C = 2^{60} * 2305843009213693951$
$D = 2658455991569831744654692615953842176$
$E = 2^{88} * 618970019642690137449562111$
$F = 191561942608236107294793378084303638130997321548169216$
a の末尾の数は 6 か 8. これは完全数の持つ周知の性質のひとつ.

数表を観察すると次の結果がわかる. ここで $e>1$ の場合しか扱わない.
$e=1$ は例外の場合として考える.
6 になる e は 4,12,16 (4 の倍数; $4k$ と書ける);
8 になる e は 2,6,18,30 ($4k+2$ と書ける)
Proof. (金子元さんの援助による)

$2^4 = 16 \equiv 1 \mod 5$ を以下用いる.

1). $e=4k$. $q = 2^{e+1}-1 \equiv 1 \mod 5$ によって $q = 1+5L$. これは奇数なので L は偶数. $q \equiv 1 \mod 10$.

$a = 2^e q \equiv q \equiv 1 \mod 5$; $a = 1+5L$. a は偶数なので $L = 2m+1$. $a = 1+5(2m+1) \equiv 6 \mod 10$.

2). $e = 4k+1$. $c = 2^{2k+1}$ とおくとき
$q = 2^{e+1}-1 = 2^{4k+2}-1 = c^2-1 = (c-1)(c+1)$ は素数なので $c-1=1$. ゆえに $k=0, e=1$. これは例外的な場合.

3). $e=4k+2$. $q = 2^{e+1}-1 \equiv 2 \mod 5$ によって $q = 2+5L$. L は奇数になり, $q \equiv 7 \mod 10$.

$a = 2^e q \equiv -q \equiv 3 \mod 5$; $a = 3+5L$. a は偶数なので $L = 2m+1$. $a = 3+5(2m+1) \equiv 8 \mod 10$.

4). $e=4k+3$. $q=2^{e+1}-1\equiv 0 \mod 5$ によって $q=5$. しかし $q=2^{e+1}-1=5$ とは矛盾する.

偶数完全数の末尾の 1 桁は 6, または 8 になるという結果は完全数の中でもやさしいが美しい性質である. このとき q の末尾の 1 桁は 1 (最初だけ 3), または 7 になるという性質は取り上げられていなかった.

7.3 $m=-2$

$q=2^{e+1}-3$ が素数の場合これらは指数 e の擬素数 $\mathbf{p}_e$ である. 完全数と比べると数が断然多い.

表 5: $q=2^{e+1}-3$ が素数

$e \bmod 4$	e	$2^e * q$	a	$a \bmod 10$
2	2	2^2*5	20	0
3	3	2^3*13	104	4
0	4	2^4*29	464	4
1	5	2^5*61	1952	2
0	8	2^8*509	130304	4
1	9	2^9*1021	522752	2
3	11	$2^{11}*4093$	8382464	4
1	13	$2^{13}*16381$	134193152	2
3	19	A	B	4
1	21	C	D	2
3	23	E	F	4
0	28	G	H	4
1	93	I	J	2

$A=2^{19}*1048573, B=549754241024$
$C=2^{21}*4194301, D=8796086730752$
$E=2^{23}*16777213, F=140737463189504$
$G=2^{28}*536870909, H=144115187270549504$
$I=2^{93}*19807040628566084398385987581$
$J=196159429230833773869868419445529014560349481041922097152$
a の末尾の数は 0,2 か 4.
q の末尾の数は 1,3 か 9.

8 3^e のとき

$a=3^e$ とおくとき $\sigma(a)=\sigma(3^e)=\frac{3^{e+1}-1}{2}$, なので $2\sigma(a)=3^{e+1}-1=3a-1$.
取りあえずこの式を満たす a を探索させた結果は次の通り.

表 6: $2\sigma(a) = 3^{e+1} - 1 = 3a - 1$

a	$\sigma(a)$	素因数分解
3	4	[3]
9	13	[3^2]
27	40	[3^3]
81	121	[3^4]
243	364	[3^5]
729	1093	[3^6]
2187	3280	[3^7]
6561	9841	[3^8]
19683	29524	[3^9]

8.1 P を素数とし

一般に P を素数とし $E > 0$ について $a = P^E$ とおくと $\sigma(a) = \sigma(P^E) = \frac{aP-1}{\overline{P}}$ によって

$$\overline{P}\sigma(a) - aP = -1.$$

これが $a = P^E$ に関しての方程式である.

$P = 5$ のときは $4\sigma(a) - 5aP = -1$

表 7: $4\sigma(a) - 5aP = -1$

a	$\sigma(a)$	素因数分解
5	6	[5]
25	31	[5^2]
77	96	[7, 11]
125	156	[5^3]
625	781	[5^4]
3125	3906	[5^5]
15625	19531	[5^6]

驚いたことに 5 のべきでない数 $77 = 7 * 11$ が登場した. 懐かしの昭和歌謡曲を聞いていたら, そこに AKB が出てきたような衝撃である.

$s(a) = 1$ を期待していたところに $s(a) = 2$ の例が出てきたのだから.

8.2 $s(a)=2$ のときの証明

方程式 $4\sigma(a)-5a=-1$ の解を $s(a)=2$ のときに求めよう.

a を素因数分解し $a=p^e q^f (2<p<q)$ とする. $X=p^e, Y=q^f$ とおくと $a=XY$ となる. すると $\overline{p}=p-1, \overline{q}=q-1$ を使うと

$$\sigma(a)=\frac{(pX-1)(qY-1)}{\overline{pq}}$$

であり,$A=pX-1, B=qY-1, \rho'=\overline{pq}$ とおけば

$$\frac{4AB}{\rho'}=5XY-1.$$

書き直して

$$4AB=5\rho' XY-\rho'.$$

$4AB-5\rho' XY$ の XY の係数を R とおけば

$$R=4pq-5\rho'=20-(p-5)(q-5).$$

$-\rho'+4(pX+qY-1)=RXY$ によって $R>0$. $0<R=20-(p-5)(q-5)$ により 次の場合がある.

1. $p=5, R=20$. $\rho'=4\overline{q}$,
2. $p=3, R=30+2q$. $\rho'=2\overline{q}$,
3. $p=7, R=30-2q; q=11,13$. $\rho'=6\overline{q}$.

次の基本等式

$$RXY-4(pX+qY-1)=-\rho'$$

を各場合ごとに調べる.

1. $p=5, R=20$. $\rho'=4\overline{q}$ の場合.
基本等式を 4 で割って

$$5XY-(5X+qY-1)=-\overline{q}.$$

$(5X-q)Y-5X=-\overline{q}-1=q'$ により

$$(5X-q)(Y-1)=0.$$

よって $5X=5^{f+1}=q$ となり矛盾.

2. $p=3, R=30+2q$. $\rho'=2\overline{q}$.
$R_1=R/2=5+q$ とおくと

$$R_1XY-2(3X+qY-1)=-\overline{q}.$$

変形して

$$(R_1X-2q)Y=6X-q-1.$$

$Y=q$ のとき,
$(R_1X-2q)q=6X-q-1$ によって $X\geq 3$ により

$$(R_1q-6)X=2q^2-q-1\geq 3(5+q)q-6q=3q^2+15q-6q=3q^2+9q.$$

これから矛盾が出る.
$Y\geq q^2$ のとき,

$$(R_1X-2q)Y=6X-q-1\geq (R_1X-2q)q^2=((5+q)X-2q)q^2=(5+q)Xq^2-2q^3.$$

$$2q^3-q-1\geq 3((5+q)q^2-6)=3q^3+15q^2-18.$$

これから矛盾が出る.

3. $p=7, R=30-2q; q=11,13; \rho'=6\overline{q}$.

$$R_1XY-2(7X+qY-1)=-3\overline{q}.$$

$q=11$ のとき, $R_1=4$.

$$4XY-2(7X+11Y-1)=-30.$$

$4XY-2(7X+11Y)=-32$ を変形して

$$2(2X-11)Y=14X-32=7(2X-11)-32=7(2X-11)+45.$$

$(2X-11)(2Y-7)=45$ の解として $2X-11=3, 2Y-7=15$ があり, $X=7, Y=11$. ここで $a=77$.
かくして 5 のべきでない解が発見された.

9　3 が底の完全数

$\sigma(3^e)$ が素数 q になったとする. $\alpha = \sigma(3^e)q$ とおき 3 が底の完全数と言う.

9.1　3 が底の完全数の数表

表 8: $m = 0$

e	素因数分解	a
2	$3^2 * 13$	117
6	$3^6 * 1093$	796797
12	$3^{12} * 797161$	423644039001
70	A	B
102	C	D

$A = 3^{70} * 37547332574898624019733579791 28773$

$B = 939868122326695556888433629151289424673228917359519725450340403327 7$

$C = 3^{102} * 69575965298821529689922252518358871814784515470 13$

$D = 32272099648418784474661930627347224659751864497385 11$

$- - 20620675638003100735694242699380905814499971 17$

- $e \equiv 2 \mod 4$ のとき q の末尾の数は 3, a の末尾の数は 7.
- $e \equiv 0 \mod 4$ のとき q の末尾の数は 1, a の末尾の数は 1.

$3^2 = 9 \equiv -1 \mod 5$ により $3^4 \equiv 1 \mod 5$. これを以下使う.
$2q = 3^{e+1} - 1$ となる素数 q についてその末尾の数は 3 または 1 を証明する.
1. $e = 4k+2$ のとき

$$2q = 3^{e+1} - 1 = 2q = 3^{4k+3} - 1 \equiv -3 - 1 \equiv 1 \equiv 6 \mod 5.$$

よって $q \equiv 3 \mod 5$. $q = 3+5L$ となるが q は素数なので奇数. L は偶数になるので $q \equiv 3 \mod 10$.
$a = 3^e q \equiv -q \equiv 2 \mod 5$ により $a = 2 + 5L$. L は奇数になるので $a \equiv 7 \mod 10$.

2. $e = 4k$ のとき

$$2q = 3^{e+1} - 1 = 2q = 3^{4k+1} - 1 \equiv 3 - 1 \equiv 2 \mod 5.$$

よって $q \equiv 1 \mod 5$. $q = 1 + 5L$ となるが a は奇数. L は偶数になるので $a \equiv 1 \mod 10$.
$a = 3^e q \equiv -q \equiv 2 \mod 5$ により $a = 2 + 5L$. L は奇数になるので $a \equiv 7 \mod 10$.

3. $e = 4k+3$ のとき $A = 3^{k+1}$ とおくとき

$$2q = 3^{e+1} - 1 = 2q = 3^{4k+4} - 1 = A^4 - 1 = (A-1)(A^3 + A^2 + A + 1).$$

$A-1=3^{k+1}-1=2(3^k+3^{k-1}+\cdots 1)$ なので $k>0$ なら $\frac{A-1}{2}>1$. よって q が素数に矛盾.

$k=0$ なら $e=3$ なので $2q=3^4-1=80. q=40$; これは.

4. $e=4k+1$ のとき $A=3^{2k+1}$ とおくとき

$$2q=3^{e+1}-1=2q=3^{4k+2}-1=A^2-1=(A-1)(A+1).$$

$A-1=3^{2k+1}-1=2(3^{2k}+3^{2k-1}+\cdots 1)$

$$q=(A^2-1)/2=(A-1)/2(A+1)=(3^{2k}+3^{2k-1}+\cdots 1)(A+1).$$

q が素数に矛盾.

9.2 3 が底の完全数の方程式

α を 3 が底の完全数とする. $q=\sigma(3^e)$ は素数で $\alpha=\sigma(3^e)q$ と書かれるとき $\sigma(\alpha)$ を計算する.

$$\sigma(\alpha)=\sigma(aq)=\sigma(a)\sigma(q)=\sigma(q)(q+1)$$

になる. $q=\sigma(3^e)=\frac{3^{e+1}-1}{2}$ より

$$q+1=\frac{3^{e+1}+1}{2}=\frac{3a+1}{2}$$

なので

$$\sigma(\alpha)=\sigma(a)(q+1)=\frac{\sigma(a)(3a+1)}{2}=\frac{(3\alpha+q)}{2}.$$

これから

$$2\sigma(\alpha)=3\alpha+q.$$

ここから q を消すことができないので a の最大素因子 $\mathrm{Maxp}(a)$ と書くことにすると

$$2\sigma(a)=3a+\mathrm{Maxp}(a)$$

を満たす.

問題はこの式を満たす a は $\sigma(3^e)$ が素数 q になるのを用いて $a=\sigma(3^e)q$ とかけるか, である.

9.3 $s(a)=2$ のときの証明

ここでは $s(a)=2$ のときを扱う. $2\sigma(a)=3a+\mathrm{Maxp}(a)$ を満たすと仮定する.

ここで a は奇数である. なぜなら $\mathrm{Maxp}(a)$ は奇数で,$2\sigma(a)$ は偶数だから.

a を素因数分解し $a=p^eq^f(2<p<q)$ とする. $X=p^e, Y=q^f$ とおくと $a=XY$ となる.

すると $\overline{p}=p-1, \overline{q}=q-1$ を使うことにより

$$\sigma(a)=\frac{(pX-1)(qY-1)}{\overline{pq}}$$

であり,$A=pX-1, B=qY-1, \rho'=\overline{pq}$ とおけば

$\mathrm{Maxp}(a)=q$ なので

$$\frac{2AB}{\rho'}=3XY+q.$$

書き直して

$$2AB = 3\rho' XY + q\rho'.$$

$2AB - 3\rho' XY$ の XY の係数を R とおけば

$$R = 2pq - 3\rho' = 6 - (p-3)(q-3).$$

$q\rho' = RXY - (pX + qY - 1)$ によって $R > 0$.
$0 < R = 6 - (p-3)(q-3)$ により $p = 3, R = 6$. $\rho' = 2\overline{q}$.

$$2\overline{q}q = RXY - 2(3X + qY - 1)$$

を 2 で割って

$$\overline{q}q = 3XY - (3X + qY - 1) = (3X - q)Y - 3X + 1.$$

$3X > q$ かつ $Y \geq q$ によって

$$\overline{q}q \geq (3X - q)q - 3X + 1 = 3X\overline{q} - \widetilde{q}\overline{q}.$$

$\overline{q}q \geq 3X\overline{q} - \widetilde{q}\overline{q}$ から $\overline{q}$ を消すと

$$q \geq 3X - \widetilde{q}.$$

よって

$$2q + 1 \geq 3X.$$

ここで $Y = q$ を仮定すると $2q + 1 = 3X$ が成り立ち $q = \frac{3^{e+1}-1}{2} = \sigma(3^e)$ は素数. $a = 3^e q$ は 3 を底とした完全数になる.

$Y > q$ のとき $Y \geq q^2$ になる.

$$\begin{aligned}
\overline{q}q &= (3X - q)Y - 3X + 1 \\
&= (3X - q)Y - 3X + q + 1 - q \\
&= (3X - q)(Y - 1) + 1 - q \\
&\geq (3X - q)(q^2 - 1) + 1 - q \\
&\geq (3X - q)\overline{q}\widetilde{q} - \overline{q}.
\end{aligned}$$

よって

$$q \geq (3X - q)\widetilde{q} - 1.$$

$\widetilde{q} \geq (3X - q)\widetilde{q}$ により

$$1 \geq (3X - q) > 0.$$

ゆえに $3X - q = 1$. しかし $q = 3X - 1 = 3^{e+1} - 1 = 2\sigma(3^e)$ の右端は素数ではない. これは矛盾.

$q = 13$ のとき, $R_1 = 2$.

$$XY - (7X + 13Y) = -25.$$

$(X-7)(Y-13)=91-25=65$. しかし, X,Y は奇数なので $X-7,Y-13$ はともに偶数で矛盾.
したがって $s(a)=2$ のとき $a=77$.
しかしながら $s(a)=3$ の解がまだある可能性が残る.

10 3が底の完全数の平行移動

$q=\sigma(3^e)=\frac{3^{e+1}-1}{2}$ が素数 q のとき $a=3^eq$ が3が底の完全数である. これを m だけ 平行移動する.

$q=\frac{3^{e+1}-1}{2}+m$ が素数 q のとき $a=3^eq$ を m だけ 平行移動した3が底の完全数という.

これらが存在しなければ意味がないのでパソコンで確認する.

10.1 平行移動の 例

10.2 $P=3,m=1$

表 9: $m=1$

e	素因数分解	a
1	$3*5$	15
3	3^3*41	1107
15	$3^{15}*21523361$	308836705316427
31	$3^{31}*926510094425921$	5722806367154190562796729901 87
63	A	B

$A=3^{63}*1716841910146256242328924544641$
$B=196503076295643052858681214356932539158308401746008315969770 7$
$m=2$ なら解無し.

10.3 $P=3,m=3$

表 10: $m=3$

e	素因数分解	a
3	3^3*43	1161
5	3^5*367	89181
9	$3^9*29527$	581179941
59	A	B

$A=3^{59}*2119557913760810175714721 6603$
$B=29950171665240520173552997162026013851792610751822054540 1$

10.4 $P = 3, m = -2$

表 11: $m = -2$

e	素因数分解	a
2	$3^2 * 11$	99
6	$3^6 * 1091$	795339
8	$3^8 * 9839$	64553679
30	A	B
44	C	D
48	E	F

$A = 3^{30} * 308836698141971$
$B = 6358673741282379054361141317 9$
$C = 3^{44} * 1477156353275416849319$
$D = 1454660594681285404312770985990662195258039$
$E = 3^{48} * 1196496646153087647950 39$
$F = 954402816170391353771204372770010916506066 6079$

11 完全数の平行移動の方程式

$q = \dfrac{3^{e+1}-1}{2} + m$ が素数 q のとき $a = 3^e q$ とおく．これが満たす式を決定しよう．
$q+1 = \dfrac{3^{e+1}+1}{2} + m$ に注意して，

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= \sigma(3^e q)\\ &= (3^{e+1}-1)/2 * (q+1)\end{aligned}$$

によって

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= (q-m)(3^{e+1}+1+2m)\\ &= 3a + q(1+2m) - m(2q+1)\\ &= 3a + q - m.\end{aligned}$$

かくして $q = \mathrm{Maxp}(a)$ を使うと $2\sigma(a) = 3a+ \mathrm{Maxp}(a) - m$ がえられた．

12 平行移動の方程式を満たす例

表 12:

a	素因数分解	$\sigma(a)$
4	$[2^2]$	7
117	$[3^2, 13]$	182

12.1 $p = 3, m = 1$

表 13: $p = 3, m = 1$

a	素因数分解	$\sigma(a)$
2	[2]	3
15	[3, 5]	24
741	[3, 13, 19]	1120
1107	$[3^3, 41]$	1680
14883	$[3, 11^2, 41]$	22344
38781	$[3^2, 31, 139]$	58240

$[p = 3, m = 3]$

表 14:

a	素因数分解	$\sigma(a)$
21	[3, 7]	32
1161	$[3^3, 43]$	1760

$[p = 3, m = -2]$

表 15:

a	素因数分解	$\sigma(a)$
8	$[2^3]$	15
99	$[3^2, 11]$	156
759	[3, 11, 23]	1152

13 究極の完全数とその平行移動

P を素数とし $\sigma(P^e)$ が素数 q のとき $a=P^e q$ を底が P の究極の完全数と呼ぼう. このとき $q=\frac{P^{e+1}-1}{P}$ となる.

そこで整数 m だけ平行移動する.
$q=\frac{P^{e+1}-1}{P}+m$ は素数とするとき $a=P^e q$ を m だけ平行移動した底が P の完全数と呼ぶ.

14 例

14.1 $P=5, m=0$

表 16: $P=5, m=0$

e	素因数分解	a
2	$5^2 * 31$	775
6	$5^6 * 19531$	305171875
10	$5^{10} * 12207031$	119209287109375
12	$5^{12} * 305175781$	745058059082031 25

14.2 $P=5, m=1$

表 17: $P=5, m=1$

e	素因数分解	a
3	$5^3 * 157$	19625
5	$5^5 * 3907$	12209375
9	$5^9 * 2441407$	4768373046875
11	$5^{11} * 61035157$	2980232275390625

14.3 $P=5, m=-2$

表 18: $P = 5, m = -2$

e	素因数分解	a
2	$5^2 * 29$	725
10	$5^{10} * 12207029$	119209267578125
14	$5^{14} * 7629394529$	46566128717041015625

14.4 $P = 7, m = 0$

表 19: $P = 7, m = 0$

e	素因数分解	a
4	$7^4 * 2801$	6725201
12	$7^{12} * 16148168401$	223511436608353935601

14.5 $P = 7, m = 1$

表 20: $P = 7, m = 1$

e	素因数分解	a
3	$7^3 * 401$	137543
5	$7^5 * 19609$	A
11	$7^{11} * 2306881201$	B
35	$7^{35} * 441955140976608911963170563601$	C

$A = 329568463,$

$B = 4561457891661258343,$

$C = 16742086854484650666536922416431932606978335013856009100743$

表 21: $P = 11, m = 0$

a	素因数分解	$\sigma(a)$
16	$2^{16} * 50544702849929377$	3312497645972971651072
18	$2^{18} * 6115909044841454629$	1603248860650918282264576

15 究極の完全数とその平行移動の満たす方程式

これの満たす方程式を作る.

$$\overline{P}\sigma(a) = \overline{P}\sigma(P^e q) = (P^{e+1} - 1)(q + 1)$$

になり, $q + 1 = \frac{P^{e+1}+P-2}{\overline{P}} + m$ を用いて次のように式変形する.

$$\begin{aligned}
\overline{P}\sigma(a) &= (P^{e+1} - 1)(q + 1) \\
&= \overline{P}(q - m)(\frac{P^{e+1} + P - 2}{\overline{P}} + m) \\
&= (q - m)(P^{e+1} + P - 2 + m\overline{P}) \\
&= q(P^{e+1} + P - 2 + m\overline{P}) - m(P^{e+1} + P - 2 + m\overline{P}) \\
&= Pa + q(P - 2) - m(P - 1).
\end{aligned}$$

これより

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P - 2)\mathrm{Maxp}(a) - m(P - 1). \tag{2}$$

例えば $P = 2$ なら

$$\sigma(a) = 2a - m.$$

15.1 反例

究極の完全数とその平行移動の満たす方程式の解をすべて数え上げる方式で求めた. 時間の関係で 200000 以下しかやっていない.

それでも, $m > 0$ のとき $s(a) = 3$ の例がいくつも出てきてこれらは反例になっている.

$m = 0$ のときも反例があるとにらんでいるがこれまでのところ発見されていない.

15.2 $[p = 5, m = 1]$

表 22: $[p = 5, m = 1]$

a	素因数分解	$\sigma(a)$
2	[2]	3
35	[5, 7]	48
3059	[7, 19, 23]	3840
7469	[7, 11, 97]	9408
19625	$[5^3, 157]$	24648

$a = 2$ は確かに方程式を満たしている. このように $s(a) = 1$ の例は, 素数から定義された完全数では想定外なので, とりあえず考察の他にした.

15.3 $[p = 5, m = -2]$

表 23:

a	素因数分解	$\sigma(a)$
539	$[7^2, 11]$	684
725	$[5^2, 29]$	930
12905	[5, 29, 89]	16200

15.4 $[p = 7, m = 1]$

表 24: $[p = 7, m = 1]$

a	素因数分解	$\sigma(a)$
2	[2]	3
126293	$[17^2, 19, 23]$	147360
137543	$[7^3, 401]$	160800