アルキメデスによる螺線の接線決定

斎藤憲 *

1 『螺線について』

1.1 著作『螺線について』の位置づけ

『螺線について』(以下LSと略記)は，序文をつけてアレクサンドリアのドシテオスに送られたアルキメデスス(前287?-212)の一連の著作の4番目のものである[1]

アレクサンドリアに送られたアルキメデスの5つの著作は次のとおりである(執筆順).

1. 『放物線の求積』(QP):放物線の切片の面積を扱う．コノンの死(前246より後)の直後.
2. 『球と円柱について』第一巻(SC1):球の表面積，体積決定.
3. 『球と円柱について』第二巻(SC2):球に関する種々の問題．与えられた比への球の分割(II.4)など.
4. 『螺線について』(LS):螺線の接線，体積(級数 $1+4+9+\cdots$ の最初の使用)．コノンの死後かなり後.
5. 円錐状体と球状体について(CS):回転放物体，回転楕円体，回転双曲体の切片の体積決定.

これらの著作の序文を見ると，アルキメデスが新しい結果を得たときに，まずその結果だけを知らせ，後からその完全な証明を送っていたことが分かる．その「完全な証明」が，現存するこれらの著作ということになる.

---

*大阪府立大学人間社会学部

[1]ギリシャ語写本には *peri helikōn* という標題が見られる．ラテン語では *De lineis spiralibus*，英語では *Spiral Lines* がよく使われる標題である．本稿で用いる略称LSはラテン語標題による.

なお「らせん」という語の漢字での表記は「螺旋」であるが，ラテン語・英語の標題にならって「螺旋状の線」という意味で「螺線」という表記を用いる．この表記は[三田 1972]に従うものである(ただし三田の意図が筆者と同じであったかどうかは定かでない).

LS の序文では，SC2 の定理を列挙し，そのうち 2 つは間違っていたと述べる．以前にまず結果だけを伝えたときに，意図的に誤った命題を混入させたと見ることもできる．現存する SC2 のテクストは正しい結果と証明を伝える．なお，LS 序文にはこの後の著セクである CS の結果のうち，最も容易な回転放物体の体積も述べられている．

1.2 LS の概要

ここでは螺線の定義と主要命題を紹介する．

螺線の定義 （LS, 命題 11 と 12 の間）

1 もし，平面上に直線が引かれ [AΘ], その一方の端 [A] が止まったまま，好きな回数だけ等速で回転して，再び，動き始めた場所に戻り [AΘ]，また回転する線と同時に，ある点が，止まっている端点から出発して等速で直線上を運動するならば，この点は平面上に螺線を描くことになる [ABΓΔEΘ].

2 そこでまず，直線が運動する間，止まっている端点 [A] が**螺線の始点**と呼ばれるとしよう．

3 また直線が運動を始める線の位置が**運動の始線** [AΘ] と呼ばれるとしよう．

4 最初の一回転で，直線上を運動する点が通過する直線が，第一の直線 [AΘ] と呼ばれるとしよう....

7 そして，螺線の始点 [A] を中心とし，第一の直線を距離 [半径] として描かれる円が**第一円** [ΘKH] と呼ばれるとしよう....

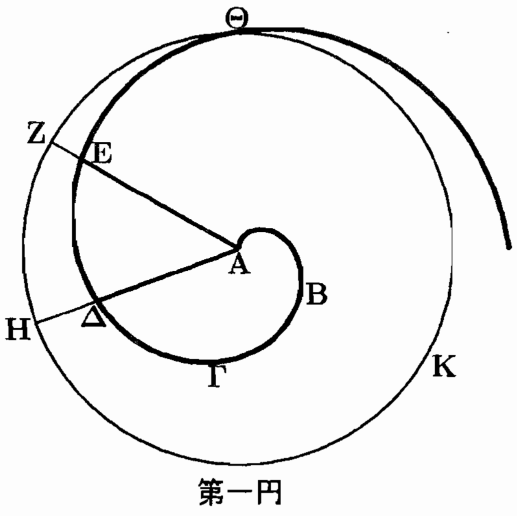

図 1: 螺線の定義と基本的性質

命題 14 （螺線の基本的性質）

最初の回転の螺線上の 2 点 [E, Δ] の，始点からの距離は [AE, AΔ]，第一円の弧 [$\Theta\overset{\frown}{KZ}$, $\Theta\overset{\frown}{KH}$] と同じ比を持つ．すなわち，

$$AE : A\Delta = \Theta\overset{\frown}{KZ} : \Theta\overset{\frown}{KH}$$

命題 18 （螺線の接線）

一回転の最後の点での接線は，原点から動径に垂直に引いた直線から，円周に等しい直線を切り取る（これが本稿のテーマである．§3 以下で詳述）．

命題 24 （螺線の囲む領域）

一回転で描く螺線の領域は，第一円の三分の一である．

テクニカルに注目すべき点

- 『原論』第 V 巻の，多倍の比較に基づく比例の定義の利用（命題 1[2].
- 平方数の和に相当する級数の評価（命題 10, 11．求積に利用）
- 「等速」という運動の条件は，動径と円弧の比例としてのみ利用される（命題 14 で比例関係を定式化）

2 ギリシャ幾何学における接線の扱い

以下，螺線の接線を扱う命題 18 と，そこで用いられる補助定理を検討するが，その前にギリシャ幾何学で接線がどのように定義され，扱われているかを概観する．

2.1 『原論』における接線の定義と円の接線

『原論』では円の接線が次のように定義されている．

> 『原論』 III. 定義 2：円に触れる直線で，延長されたとき円を切らないものはすべて円に接すると言われる．

[2]アルキメデスが『原論』第 V 巻の比例の定義をはっきり利用するのはここだけである．なお，アルキメデスは『平面のつり合いについて』I.7 で，これとは異なった比例の定義を使っているように思われる．異なった比例の定義については [斎藤 2008, 131ff.] を，『平面のつり合いについて』I.7 については [林・斎藤 2009, 229ff.] を参照されたい．

また，運動の議論にこの定義を利用した後世の例としてはガリレオの『新科学論議』がある．恐らくアルキメデスのこの箇所にヒントを得たのであろう．

この定義に基づいて，命題III.16では，円の直径の端点で，直径に直角に引かれた直線が接線であることが証明される．したがって『原論』では，円の接線の定義は円周が凸曲線であることに暗黙に依存していて,「円を一点を共有し，それ以外の点では円の外側に落ちる直線」であったことになる．

さらにこのIII.16では，この接線と円周の間に他の直線が入らないことが証明される．これは現代の術語で言えば，接線の一意性ということになる．

2.2 アポロニオス『円錐曲線論』における円錐曲線の接線

アポロニオス『円錐曲線論』（以下Ap. と書く）では，放物線，楕円，双曲線の接線を決定している．接線の定義は見られないが,『原論』の円の接線と同様に，曲線と一点を共有し，延長したとき曲線を切らない直線と考えていることが議論から分かる．しかもアポロニオスは，接線の一意性を確認している．これはエウクレイデス『原論』が円の接線を扱った『原論』III.16と同様である．

- 円錐曲線の頂点における接線 (Ap. I.17).
- 頂点における接線と曲線の間に他の直線が入らないこと (Ap. I.32)
- 頂点以外の点での接線の十分条件，すなわち特定の条件をみたす直線が接線であること（放物線．Ap. I.33, 楕円・双曲線．Ap. I.34）
- 上の条件が必要でもあること，すなわち接線の一意性（放物線．Ap. I.35, 楕円・双曲線．Ap. I.36）

2.3 円と円錐曲線からの考察：接線の暗黙の定義

以上で検討した円と円錐曲線の接線の扱いから分かることは，ギリシャ幾何学において，ある直線が接線であることを証明する場合，次の二つのことを確認していた，ということである．

- 曲線上の一点を通り，それ以外の点では曲線の一方の側（外側）にある（一方向に凸な曲線が前提）．
- 上の条件をみたす直線は一つしかない．

この2番目の条件は接線の定義として『原論』には明示されていないが,『原論』でも『円錐曲線論』でも，証明の中で確認されている．したがって，この性質は接線の定義の一部をなす性質として認識されていたと考えられる．

3　アルキメデスによる螺線の接線決定 (LS 18)

LS 命題 18 は,「最初の一回転で描かれた螺線の端点に直線が接するならば，接線影は第一円の円周に等しい」ことを主張する[3].

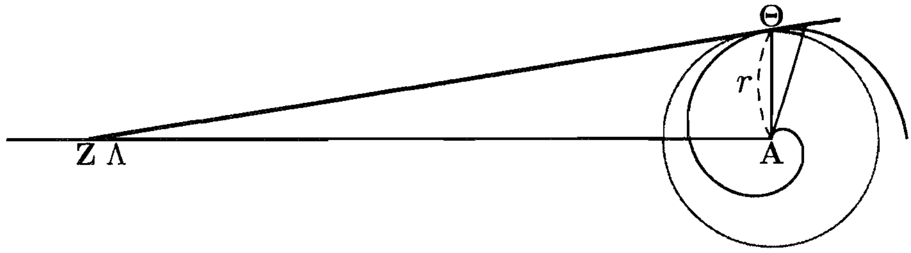

図 2: 命題 18：螺線の接線

3.1　命題 18 をめぐるさまざまな問い

この命題を検討していくと，すぐに次のような疑問が生じる.

1. どうやってこの結果を発見したのか（運動学的考察か）.

2. 命題 18 の言明に関する問題．次の A の形であり，B ではない.

   A :「ある直線が曲線に接するならば… が成り立つ」
   B :「… を満たす直線が曲線に接する」

   これは重要な違いである．A の主張は接線の一意性にかかわるものであり，厳密に言えば接線の存在を示していない．これに対して B は，ある特定の条件を満たす直線が（『原論』における定義の意味で）接線であることは示していても，それがただ一つであることは示していない.

   『原論』や『円錐曲線論』の例で見たように，接線に関する議論では，B をまず示して，次に，A を直接示す代わりに，他の直線が接線と曲線の間に落ちることがないことを示すのが普通である.

   アルキメデスがここで A だけを示していることは異例である．なぜ B のタイプの証明をしなかったののであろうか.

3. 利用命題の問題．この命題 18 は命題 7 と 8 を利用する．しかし命題 6 と 7，8 と 9 はそれぞれ密接に関連した一組の命題である．どうして命題 6–9 の 4 個の補助命題のうち 2 つだけが使われるのに 4 個とも証明されているのか.

[3]「接線影」は筆者の導入した言葉である．図で，始線 AΘ に垂直に AZ を引き（図 2)，接線との交点を Z としたとき，AZ が第一円の円周に等しい，というのがアルキメデスの命題の内容である.

4. 補助定理の証明の問題．命題6–9の証明では「ネウシス」の技法が使われるが，ネウシスの使用を避けようと思えば可能だったはずである．

5. 命題全体の目的．命題18は円の求積（円周の直線化）として解釈されてきた．果たしてアルキメデス自身にそのような意図はあったのか．

3.2 問いに対する暫定的な答

以上の問いに対して，現段階で筆者が考えていることを述べて，暫定的な答としたい．

1. アルキメデスが命題18を得るにあたって，運動学的考察をおこなったに違いないというのが[Heath 1921, 2:556–561]の意見である．Dijksterhuisは，そのような考察なしでも接線の性質が得られることを示しているが[Dijksterhuis 1957, 271ff.]，その議論では「近似」という言葉が出てくる．たとえば小さな円弧とその下の弦はほぼ等しいので，弧を弦で近似するといった意見である[4]．ここでは，運動学的考察はおろか，近似という概念なしでもこの命題が得られることを示す（本稿§4）．

2. ここでBのタイプの命題を証明することは，実はかなり容易である．実際，補助定理（命題6–9）のうち，アルキメデスが使っていない命題6, 9の議論のごく一部を利用すれば容易にBの証明を得ることができる．このことは[Heath 1921, 2:556–561]で指摘されている．

   一般に，曲線の接線に対してはAの証明の方が難しい．Aを示すには，接線とごくわずかでも向きが違う直線が，曲線と再び交わることを示さねばならないからである．『螺線について』ではアルキメデスはこのAの証明のみをおこなっていて，接線の存在証明（Bの議論）をしていない．その理由は推測によるしかないが，次のような可能性をあげておく．

   (a) 一番難しい議論は証明したから後は読者に委ねると考えた可能性．実際，エウクレイデス『原論』でも，すべての場合を証明していない命題が存在する．他の場合は注釈に存在することもあれば，本文に後から追加されていることもある（I.7, III.25など）[5]．

   (b) Bタイプの議論は円周に等しい直線の作図を前提にするので避けたかった（下の5参照）．

---

[4] なお，[Knorr 1978a]は円錐面上の螺線に関する考察がパッポスに見られることにヒントを得て，まず円柱面上の螺線（渦巻）の接線は容易に求められ，これを円錐面，ついで平面に投影して平面上の螺線の接線を得たのではないかと推測しているが，パッポスが円錐面上の螺線について考察しているわけではないので，これは憶測にすぎない．

[5] 『原論』のこれらの命題については[斎藤 2008]を参照．

(c) Bタイプの議論が存在したのだが，伝承の過程で，螺線の接線を「円周に等しい直線の作図」（これは円の求積と等価）として提示したい人が，意図的にこの証明を削除した（直接的な資料的根拠はないので，やや大胆な想定であるが）.

3. 命題6, 9については，その構成や文体から見て，後から追加されたと考えさせるような特徴はない．問題はこれらが後で使われないということである．上の2.で紹介したHeathの想定する議論でも，命題6, 9の内容の一部が必要なだけであり，その全体の証明が必要ではない．

   したがってこれら2つの命題が『螺線について』に収められた理由は明らかではない．想像でしかないがいくつか可能な状況を考えてみよう．アルキメデスがB タイプの議論を何らかの理由で意図的に省略し（上の(a)または(b)），しかしそのヒントとして命題6, 9を残し，またBタイプの議論をおこなうために必要な命題は，現存する命題7, 8よりずっと簡単なものでよいのだが，対称性（6は7と，9は8と一対をなす）のために，補助定理としての必要を越えた内容を証明した，と考えることもできるが，いずれにしても決定的な結論を得ることは困難である．

   なお，アルキメデスが実はB タイプの議論をしていたが後に削除された（上の(c)）としても，命題6, 9は，その内容全体が螺線の接線の証明に必要なわけではないという問題は残る．

4. ネウシスの使用を研究者が問題にする背景には，ギリシャにおいてネウシスは厳密な作図手段ではなく，最終的には他の作図方法で置き換えられるべき作図であったという共通了解がある．

   ここで問題となる補助定理(LS 6-9)は，特定の与えられた条件をみたす直線をネウシスによって求めている．しかし補助定理が利用される文脈を考えれば，特定の長さを持つ直線でなく，ある不等式が満たされるような直線がとれることを示せば十分である（[Knorr 1978b]の指摘）．厳密に，ある長さを持つ直線を作図することが要求されているのではないことが，ネウシスの使用を許容する動機になったというのがKnorrの推測であるが，しかしKnorr自身も指摘するように，この不等式を示すだけならば，ネウシスによらなくとも，直線と円による作図で十分である．

   結局アルキメデスは，ネウシスをできれば避けるべき方法と認識しておらず，ネウシスによって問題はきちんと解かれていると考えていたと想定し，ネウシスは最終的に他の具体的な作図に帰着されるべきであるという了解は，アポロニオスの著作『ネウシス』[6]に代表されるように，後に発展したものであった

[6]散逸したが，パッポス『数学集成』第7巻の記述により，種々のネウシスを，直線と円による作図に帰着させる議論をおこなっている．一般にはこのような作図に帰着できないネウシスも少なくない．

と考えるのが妥当なのかもしれない．

ここでこれまで十分に注目されてこなかったことを指摘しておこう．本稿付録に見るように，ここでのネウシスの導入は，接線の定義に基づいて螺線の接線を探求する議論から，ごく自然に導かれる議論である．すなわちここでは「ネウシスという技法を持ち込んで問題を解いた」のではなく，「問題の探求がネウシスに帰着する」のである．このような状況で，『螺線について』にネウシスの利用がそのまま残ったことは，自然なことかもしれない．

5. アルキメデスがLS 18 の証明中で「円周に等しい直線」を作図することを避けていることは事実である（詳細は割愛）．このことを，この命題全体でアルキメデスが「円周の直線化」を意図していたので，論点先取を避けたのである，と解釈することは不可能ではない．この解釈をさらに進めれば，接線に関する議論で，B タイプの命題が存在しないのは，このタイプの命題が「中心から円周に等しい距離の点をとって直線を引くと螺線に接する」という形になるはずであり，これでは「円周に等しい直線の作図」を前提とすることになり，螺線の接線により円周の直線化をおこなうという目的にそぐわないので，あえてこの命題をとりあげなかったという想定も可能になろう（上の (3)(b) を参照）．

   しかし，そもそも円の求積に螺線の接線を使うのは，ignotum per ignotius「分からないものをもっと分からないもので（説明する）」ことでもあり，アルキメデスがその問題点に気づかなかったはずはない，と筆者は考えたい．

   円周に等しい直線の作図を避けている理由を説明するには，螺線の接線決定の命題 18 に，円周の直線化という意義があったと考える必要はない．単に円周に等しい直線の作図は知られていないから，議論の中でそのことを前提とすることを避けたと想定すれば十分に説明できよう．

4　付録：アルキメデスによる螺線の接線の議論の再構成

以下では，『螺線について』命題 18 前半の証明を得るために，アルキメデスが行なった可能性のある解析を再構成することを試みる．

4.1　命題18の概要と再構成の対象となる議論

『螺線について』命題 18 の内容をまず説明する．図 3（図 2 を再掲）は，A を始点，AΘ を始線とする螺線であり，ちょうど一回転して螺線が点 Θ に到達している．すなわち AΘ は第一円の半径である．このとき，AΘ に垂直な直線 AZ を引く．もし直線 ZΘ が螺線の接線ならば，AZ が第一円の円周に等しいというのが，命題 18 の主張である．

以下，第一円の円周を L，半径を r と書くことにする．証明は 2 つの部分に分れる．

1. まず，$AZ > L$ のとき，直線 $Z\Theta$ は Θ の前方で螺線の内部に落ちる（命題前半）[7].

2. また，$AZ < L$ のとき，直線 $Z\Theta$ は Θ の後方で螺線の内部に落ちる（命題後半）.

ゆえに，もし $Z\Theta$ が Θ における螺線の接線ならば，$AZ = L$ である．

したがってこの証明は，AZ が円周 L に等しいときに $A\Theta$ が接線であることを示すのではない.（§3.1 でのタイプ A の命題であり，タイプ B ではない）.

以下，命題前半の議論のみを検討する（命題後半は本質的には同じ議論であるが，議論の内容が非常に複雑になる．その分析は別の機会に譲る）.

4.2 命題 18 前半の証明を得るための解析（再構成）

- 次の拡大図で考える．もとの図で $AZ > L$ のとき，N が X よりも内側に落ちて

$$NP < XP \tag{1}$$

  となるような AN を（Θ の前方のどこかに）取れることが証明される．

- 一般的に図 3 で AZ が大きくなれば直線 $Z\Theta$ が「前方」で螺線の内部に落ちることは明らかだから，そうならない AZ の上限が存在する．その上限がちょうど第一円の円周 L なのである．

- 以下では，この上限が L であることをどう発見したのか，ということを含めてアルキメデスの探求（ギリシャの術語では解析）を，命題 18 の証明から再構成することを試みる．

- 命題 14 の比例関係から（図 3, 4）

$$XA : r = L + \overset{\frown}{\Theta P} : L \tag{2}$$

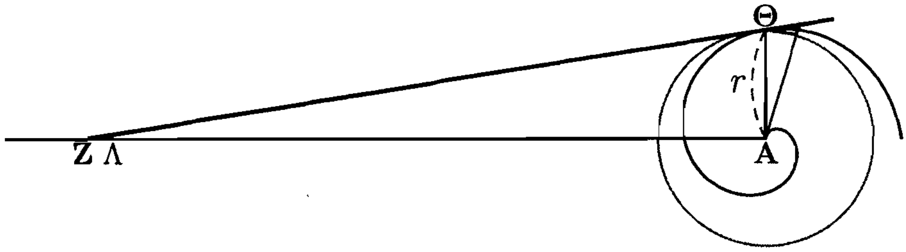

図 3: 命題 18：螺線の接線（再掲）

[7]なお，ここで前方とは，始点から出発して螺線を描く点で，Θ を通過した後に通る側，図では Θ の右方を指すために筆者が用いる表現である．この反対側（図で Θ の左側）を後方と呼ぶ．

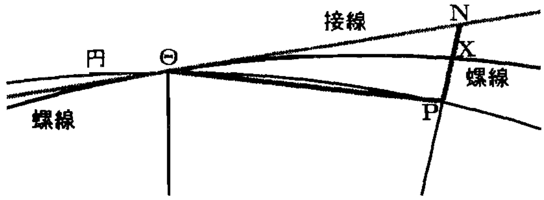

図 4: 命題18前半：接点付近の拡大図

- 分離して（前項から後項を引く），中項を入れ替えて

$$\mathrm{XP} : \overset{\frown}{\Theta\mathrm{P}} = r : L \tag{3}$$

- そこでNPとXPを比較して，NP < XPとなるNが存在する条件を探求すればよい．XPについて(3)を得ているから，この条件は

$$\mathrm{NP} : \overset{\frown}{\Theta\mathrm{P}} < r : L \tag{4}$$

と書ける．

- 問題は比 NP :$\overset{\frown}{\Theta\mathrm{P}}$ を考察する手段がないことである．ここで弧$\overset{\frown}{\Theta\mathrm{P}}$の代わりにΘPを考える[8]．

- するとΘP <$\overset{\frown}{\Theta\mathrm{P}}$より

$$\mathrm{NP} : \Theta\mathrm{P} > \mathrm{NP} : \overset{\frown}{\Theta\mathrm{P}} \tag{5}$$

が常に成り立つので，

$$\mathrm{NP} : \Theta\mathrm{P} < r : L \tag{6}$$

は，(4)の十分条件となる．すなわち(6)が成り立つ点Nが存在すれば，そのNに対して(4)も必ず成り立ち，直線ZΘNは点Nで螺線内部に落ちる．すなわち,「ZがAから遠すぎる」ためにZΘは接線にならない．

- さて，(6)の扱いであるが，比例関係の扱いの常套手段の一つは,「前項と後項を揃える」あるいは「前項どうし，後項どうしを揃える」ことである．この場合は，Aを通ってZΘに平行な直線AYΦを引くことによって（図5），

$$\mathrm{NP} : \Theta\mathrm{P} = \mathrm{AP} : \mathrm{YP} \tag{7}$$

[8]ここで，弦で弧を「近似する」という発想は必ずしも必要ない．直接扱いにくい不等式(4)の代わりに，左辺の後項$\overset{\frown}{\Theta\mathrm{P}}$を，それより小さいΘPで置き換えて，もとの不等式が成り立つための十分条件(6)を得たと考えることができる．

が得られ，比 NP : ΘP を比 AP : YP に変形できる[9]．しかも AP は円の半径 r であるから，(6) は，

$$r : \mathrm{PY} < r : L \tag{8}$$

となり，結局この条件は

$$\mathrm{PY} > L \tag{9}$$

となる．

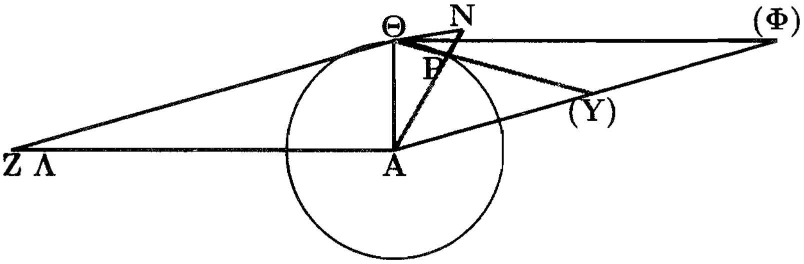

図 5: 命題 7（命題 18 の文脈で）

- ここまでの議論から，(9) が成り立つような点 P がとれれば，この P に対応する点 N は螺線の内部に落ち，したがって ZΘ は，(ZA が大きすぎるために）接線でない，ということになる．
- ここで PY は，ギリシャ幾何学のネウシスの言葉遣いでは，「円周と直線 AΦ の間に，Θ に向かって傾けられた線」である．そして図から，PY が $\Theta\Phi(= \mathrm{ZA})$ より小さい任意の直線に等しくなりうることは直観的に明らかである．ネウシスによる作図とは，このような直観を認め，ZA より少しでも小さい直線が与えられたとき，それに等しい PY がとれることを（具体的な手続きを示さずに）認めることである．そしてこれが『螺線について』命題 7 の内容である．
- したがって，ZA が L より大きいとき，

$$\mathrm{ZA} > \mathrm{PY} > L \quad \text{となる PY が引ける} \tag{10}$$

すると，上の議論から N が螺線内部に落ち，ZΘ が接線でないことになる．この対偶をとれば，ZΘ が接線のとき，

$$\mathrm{ZA} \leq L \tag{11}$$

が成り立つ．

[9]図 5 は，実は命題 18 で利用される補助定理である命題 7 をもとにして，命題 18 の文脈に合わせて修正したものである

- 命題の後半では，ZA が L より小さいとき，直線 ZΘ は，Θ の手前で螺線の内部に落ちるため，螺線の接線でないことが示される．前半と後半をあわせて，

  ZΘ が螺線の接線ならば ZA は L（第一円の円周）に等しい

  ことが示される．

- 以上の解析で分かるように，螺線の接線を得るためには，Heath の運動学的な考察も，Dijksterhuis の近似によるアプローチも，Knorr の立体図形（円柱・円錐）の螺線からの平面への投影も必要ではない．必要なのは，接線が接点以外で曲線の外側に落ちるという，ギリシャ幾何学の接線の概念だけである．そのような条件が成り立つ（あるいは成り立たない）という仮定から遡って探求する方法である「解析」は現代の研究者が想像するより強力な手段なのである．

参考文献

[Dijksterhuis 1957] Dijksterhuis, E.J., *Archimedes*. New York.（特に 257 頁以下）

[Heath 1921] Heath, T.L. *A History of Greek Mathematics*, 2 Vols. Oxford.（Dover 社のリプリントで普及している）

[Knorr 1978a] Knorr, W.R. "Archimedes and the Spirals." *Historia Mathematica*, 5: 43–75.

[Knorr 1978b] Knorr, W.R. "Archimedes' NeusisConstructions in Spiral Lines." *Centaurus*, 22:77–98.

[三田 1972] 三田博雄「アルキメデスの科学」．田村松平編『ギリシアの科学』（科学の名著 9）．東京：中央公論社，1972．383–505.

[斎藤 2008] 『原論 I–VI』．エウクレイデス全集第 1 巻．斎藤憲，三浦伸夫訳・解説．東京大学出版会．

[林・斎藤 2009] 林栄治・斎藤憲著『天秤の魔術師アルキメデスの数学』．共立出版．