対称群のスピン表現：
Schur (1911) の研究，Morris (1962) 以降の研究

平井　武　（京都）

課題設定.　2012年10月13日～14日の第23回「数学史シンポジウム」にて，「群のスピン表現(射影表現)の歴史概観」と題して，1904年にSchurが創始したスピン表現の現在までの歴史を辿り，報告集(2013年刊)で，年表をつけて[平井6]で報告した．

その際に，はっきりと認識できた歴史的現象としては，リー群（例えば回転群やローレンツ群）に関しては，スピン表現の理論は順調に成長して無限次元表現の場合まで入り込んで来たのに対して，有限群(例えば対称群やCoxeter群)に関しては，1911年のSchurの「$\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{A}_n$ のスピン表現」の研究[Sch3]以降まったく発展が無くて半世紀ほどが過ぎてしまっている．

その理由はなんなのか，を追求して，出来れば今後の自分の研究の参考にしたい．

付言．この報告の主題は，対称群のスピン表現(射影表現)であるが，話の流れとして，「対称群・交代群の線形表現」から始め，リー群や有限群のスピン表現の理論にも触れる．

1　対称群 $\mathfrak{S}_n$, 交代群 $\mathfrak{A}_n$ の線形表現

1.1　Frobenius による $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{A}_n$ の線形表現と指標

[F60,1900] *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 516–534(1900).

[F61,1901] *Über die Charaktere der alternirenden Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 303–315(1901).

[F68,1903] *Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 328–358(1903).

([F60], [F61], [F68] は全集における論文番号)

Frobeniusは論文[F68,1903]で，$\mathfrak{S}_n$ に対し，次の結果を得た：

① $\mathfrak{S}_n$ の既約表現 π(の同値類)は，いわゆる highest weight $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$,

$$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_m>0,\quad \textstyle\sum_{1\leqslant j\leqslant m}\lambda_j=n,\quad \lambda_j\ \text{正整数},$$

によってパラメーター付けされる．よって π を $\pi^{\boldsymbol{\lambda}}$, その指標を $\chi^{\boldsymbol{\lambda}}(\sigma)$ $(\sigma \in \mathfrak{S}_n)$ と書く．指標 $\chi^{\boldsymbol{\lambda}}(\sigma)$ を $\boldsymbol{\lambda}$ とその転置 ${}^t\boldsymbol{\lambda}$ を用いて，計算する第2の方法（[F60] における第1の方法より簡単）を与えた．（n の分割 $\boldsymbol{\lambda}$ の全体を P_n とおく．）

② 群環内の不変原始冪等元（charakteristishe Einheit, 現在で言う Young symmetrizer）を与えた．

③ $\mathfrak{S}_n$ の任意の既約表現の行列要素をすべて有理数に出来ること，を示した．

1.2 Schur による $\mathfrak{S}_n$ の線形表現に関する結果

[S11,1908] I. Schur, *Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1908, Physikalisch-Mathematische Klasse, 664–678.

Schur はこの論文 [S11,1908] で，次の定理を証明した．

定理 1.1 [S11,1908]**.** $n \geq 3$ のとき，対称群 $\mathfrak{S}_n$ のどの既約表現も，すべての行列要素が整数であるような行列表示を持つ．

（ただし，これはユニタリ行列による表示ではない．） □

これを証明するのに，Schur は，誘導表現 $\Pi_{\boldsymbol{\lambda}} := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}$ の表現空間に，良い性質を持つ基底を具体的に構成し，その基底に関する単純互換 s_i $(1 \leq i \leq n{-}1)$ の作用が整数係数であることを示したのである．ここに，$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{1 \leqslant j \leqslant m} \in P_n$，$\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_m} \subset \mathfrak{S}_n$ は Young 型部分群，$\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}}$ は $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の自明表現．

この論文を読むと，Chevalley が，多くの有限単純群（Chevalley 群）を与えた論文 [Che,1955] において，有限次元単純リー環の標準基（Chevalley basis と言われる）を選ぶ手法との類似性に驚かされる．あるいは，複素半単純 Lie 環の既約表現の空間に標準基底を選ぶ手続きとの類似性もある．

注． また，Schur は [S58,1927] で，$\mathfrak{S}_n$ の**スピン**既約表現 π が実数体 $\boldsymbol{R}$ 上での行列表示 T_π を持つための必要十分条件を与えている．

1.3 有限群 G の splitting field

G の体 K 上の既約線形表現 ρ が K の任意の拡大体においても既約であるとき，**絶対既約**という．G の K 上の任意の既約線形表現が絶対既約であるとき，K を G の**分裂体**（splitting field）という．K を G の分裂体とすれば，K の任意の拡大体 L に対して，L 上の G の任意の既約表現は K で実現可能である．

上で述べた $\mathfrak{S}_n$ の表現の実現に関する Frobenius や Schur の研究は，有限群 G に対する，数論的に重要な次の２つの問題の発端となった．

1. 対称群 $\mathfrak{S}_n$, 交代群 $\mathfrak{A}_n$ の線形表現

問題 A (既約表現の実現に関して) G の最小の分裂体 $F = F(G)$ を求めよ. (G の分裂体に最小のものがあるかどうかも問題である.)

G の K 上のすべての(有限次元)線形表現が完全可約であるかどうかは, これとはすこし性質の違った問題である.

問題 B (指標環に関して) 体の標数を 0 とする. 指標の $\boldsymbol{Z}$ 線形結合全体を指標環と呼ぶ. $\boldsymbol{C}$ 上の指標環のすべての元 χ の値 $\chi(g)$ $(g \in G)$ を $\boldsymbol{Q}$ に添加した有理数体 $\boldsymbol{Q}$ の拡大体 $F' = F'(G)$ を求めよ.

問題 B' 標数 0 の場合では, 体の代わりに, $\boldsymbol{Z}$ の拡大環を問題にすることも出来る. 既約表現 π の行列表示 T_π をうまく実現したとき, その全ての行列要素を含む $\boldsymbol{Z}$ の有限次拡大環で最小のものは何か?

注. M. Benard は, 論文

[Bena,1976] M. Benard, Schur indices and splitting fields of the unitary reflection groups, *J. Algebra*, **38**(1976), 318-342.

において, unitary reflection groups (今日, 複素鏡映群といわれている群) G に対して, 問題 B に答える次の定理を証明した.

Theorem 1. *Let G be a unitary reflection group and let F be the field generated over $\boldsymbol{Q}$ by the values of the characters of G. Then each representation of G is similar to an F-represenation.*

言い換えると, $F'(G) = F(G)$ である.
また, $F'(G)$ をすべて具体的に求めている.

この論文の第 1 節の終わりにあるコメント①,②を以下に引用する:
① Young [Youn,1930] showed that each representation of $\mathfrak{S}_n$ is similar to a rational representation.

[Youn,1930] A. Young, Quantitative substitutional analysis IV, V, *Proc. London Math. Soc.*, **31**(1930), 253–272, 273–288.

(**平井注.** これは attribution を間違っている. 先行する, 上の [F68,1903] および [S11,1908] の結果を無視している.)

② each representation of an irreducible Weyl group is similar to a rational representation.
(ここで, Benard は Coxeter 群を Weyl 群といっている.)

2 Schurの射影表現（スピン表現）関連の研究

全集第 I 巻

[S4,1904] J. Schur (=I. Schur), *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* J. für die reine und angewante Mathematik, **127**(1904), 20–50.
有限群のスピン表現（＝射影表現）の一般論

[S10,1907] J. Schur, *Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* J. für die reine und angewante Mathematik, **132**(1907), 85–137.
有限群の被覆群，とくに表現群について

[S16,1911] J. Schur, *Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* J. für die reine und angewante Mathematik, **139**(1911), 155–255.
対称群 $\mathfrak{S}_n$ $(n \geq 4)$, 交代群 $\mathfrak{A}_n$ の表現群を与え，スピン既約表現の完全系を構成し，既約スピン指標を具体的に求めた.

[S4], [S10], [S16] を Schur の射影表現三部作と呼ぶ.
この三部作については，2008 年，2009 年の「数学史シンポジウム」で講演し，文献 [平井 2]，[平井 3] で報告した.

全集第 III 巻

[S58,1927] J. Schur, *Über die reellen Kollineationsgruppen, die der symmetrischen oder der alternierenden Gruppe isomorph sind,* Journal für die reine und angewandte Mathematik, **158**(1927), 63–79.
対称群 $\mathfrak{S}_n$ のスピン既約表現が実数体 $\boldsymbol{R}$ 上実現出来る為の必要十分条件を与えた.

3 CartanとWeylの半単純リー群の線形表現・スピン表現とその指標の理論

複素半単純 Lie 群 G に対する線形表現とスピン表現（射影表現）との統一的な理論を Cartan と Weyl が展開した.

3.1 É. Cartan による半単純リー群の表現 (infinitesimal form)

[Car1,1913] E. Cartan, *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane*, Bull. Soc. Math. France, **41**(1913), 53-96.

[Car2,1938] E. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs,* I, II, Actualités Scientifiques et Industrielles, nos **643, 701**, 1938, Hermann, Paris.

[Car1,1913] について（[CC] より引用）.

Classification of all irreducible representations (=IRs) of semisimple Lie algebras: any IR is uniquely determined by its highest weight.

..... This is the problem of the determination of the representation of a given group; it was solved completely by Cartan for simple groups. The solution led in particular to the discovery, as early as 1913, of the spinors, which were to be re-discovered later in a special case by the physisits.

..... Cartan discovered the spin representations of the orthogonal Lie algebras, which later played such an important rôle in physics. In a book published later (*Leçons sur la théorie des spineurs,* Hermann, Paris, 1938), Cartan developed the theory of spinors from a geometric point of view.

G のリー環を $\mathfrak{g}$ とすれば，G の複素解析的有限次元線形表現には $\mathfrak{g}$ の $\boldsymbol{C}$ 上の有限次元表現が対応する．Cartan は主として，単純リー群に対して，$\mathfrak{g}$ の表現を詳細に調べた．これを群 G から見たとき，微分形（infinitesimal form）の表現，という．G の普遍被覆群を $\widetilde{G}$ は，ある中心的部分群 Z による中心拡大であって，とくに $\widetilde{G}/Z \cong G$ である．$\mathfrak{g}$ の表現は $\widetilde{G}$ の線形表現に（同値を法として）1-1 に対応する．$\widetilde{G}$ の表現で $G = \widetilde{G}/Z$ の表現に落ちてこないものが，G の（線形表現ではない）スピン表現である．

G の部分群で，コンパクト実型となっているものを G_u とする．例えば，$G = \mathrm{SL}(n, \boldsymbol{C}), \mathrm{SO}(n, \boldsymbol{C}), \mathrm{Sp}(2n, \boldsymbol{C})$ に対しては，

$$G_u = \mathrm{SU}(n), \quad \mathrm{SO}(n), \quad \mathrm{USp}(2n) := \mathrm{Sp}(2n, \boldsymbol{C}) \cap \mathrm{U}(2n),$$

ととればよい．G の普遍被覆群 $\widetilde{G}$ には G_u の普遍被覆群 $\widetilde{G_u}$ が対応する．上の G_u に対しては，$\widetilde{G_u} = \mathrm{SU}(n), \mathrm{Spin}(n), \mathrm{USp}(2n)$, である．

G の（複素解析的）既約表現は最高ウェイトによって parametrize される．そして，その表現が線形であるか，スピンであるかは最高ウェイトのパリティによって決まる．

1913 年の Cartan の論文の際には，この辺の被覆群に関する詳細が未だ解明されていなかったので，上に引用した [CC] の評価はやや褒め過ぎである．Cartan 自身も（例として見ていたはずの 3 次元回転群の場合は別として）自分が**スピン表現**を発見しているとは，はっきりとは認識していなかった，のではないか．実際，spinor 理論については，1938 年出版の「スピノール理論講義」では，講義してノートを取って貰い，それを元にして原稿を作ったとのことだが，Cartan 全集の論文リストを調べて見ても，その時期までにはスピノールについての論文は書いていない．

3.2 H. Weyl の複素古典型半単純リー群の有限次元表現の理論

[W1,1924] H. Weyl, *Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen (Aus einem schreiben an Herrn I. Schur)*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1924, 338-345.

[W2,1925–'26] H. Weyl, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I–III*, Mathematische Zeitschrift, **23**(1925), 271-301; **24**(1926), 328-376; **24**(1926), 377-395.

上に挙げた複素単純群は古典群と呼ばれる．Weyl はこれらの群の複素解析的有限次元表現の「分類，構成，指標の計算」を上掲の 3 論文で基本的にやり遂げた．それらは名著

[Wey3] H. Weyl, *The classical groups: their invariants and representations*, Princeton Univ. Press (1939, 1946, 増補第 2 版 1953)

で，不変式論とともにより詳しく述べられている．

○ **既約表現の分類と構成.**

既約表現の構成には，テンソル積表現を分解する手法を使う．$d \times d$ 型行列の群として表されている古典群 G に対して，

$$\pi^1 : \ G \ni g \longmapsto \pi^1(g) := (g_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant d} \in \mathrm{GL}(d, \boldsymbol{C})$$

を d 次元の線形表現と捉え，これを G の**自然表現**と呼ぶ．k 次のテンソル積 $\pi^k := \pi^1 \otimes \pi^1 \otimes \cdots \otimes \pi^1$ (k 回テンソル積) を作る．π^1 の働く d 次ベクトル空間を $V := \boldsymbol{C}^d$ とすると，π^k の空間は $V^k := V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$ (k 回テンソル) である．

他方, V^k には k 次対称群 $\mathfrak{S}_k$ が次のように働く：$v_j \in V$ $(1 \leq j \leq k)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, に対し,

$$J(\sigma)\bigl(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k\bigr) := v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes v_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \cdots v_{\sigma^{-1}(k)}. \tag{3.1}$$

このとき，$J(\sigma)\pi^k(g) = \pi^k(g)J(\sigma)$ $(g \in G, \sigma \in \mathfrak{S}_k)$.

すなわち，$J(\sigma)$ はすべての表現作用素 $\pi^k(g)$ $(g \in G)$ と可換になる V^k 上の作用素（π^k の相関作用素= intertwining operator）である．これらの生成する 2 つの作用素環 $\langle J(\mathfrak{S}_k)\rangle := \langle J(\sigma); \sigma \in \mathfrak{S}_k\rangle$, $\langle \pi^k(G)\rangle := \langle \pi^k(g); g \in G\rangle$ について，次が基本的に重要である：

定理 3.1 (Weyl). $G = \mathrm{SL}(d, \boldsymbol{C})$ とする．$\langle \pi^k(G)\rangle$ の各元と可換な線型作用素の全体は，$\langle J(\mathfrak{S}_k)\rangle$ である．逆もまた真. □

この双対定理を踏まえれば，環 $\langle J(\mathfrak{S}_k)\rangle$ の中から極小冪等元 P_β (β は添字) を求めれば，$V(P_\beta) := P_\beta V^k$ 上に G の既約表現が得られる．これをすべての $k \geq 1$ に対して行えば，G のすべての複素解析的有限次元表現が得られる．

極小冪等元は，Young の symmetrizer として $\mathfrak{S}_k$ の群環の中に与えられる極小冪等元を用いて作る．従ってこの場合の添字 β としては，$\mathfrak{S}_k$ の双対 $\widehat{\mathfrak{S}_k}$ のパラメーターである k の分割 $\boldsymbol{\lambda} \in P_k$ が使える．このことを（特殊線形群と対称群との間の）**Schur-Weyl の双対定理**と呼ぶ．

G が他の古典群の場合にはこれほどうまくはいかないが，その変形版を目指す．

○ **既約指標の計算.**

上述の既約表現の構成法では，G の線形表現は出来るが，G の被覆群の線形表現で G のそれに落ちてこないもの（スピン表現）は現れない．しかし，Weyl の既約指標の計算法では，統一的な方法で（スピン指標も込めて）すべての既約指標が得られる．そこが実にすごいところである．

$\dim_{\boldsymbol{C}} G = \dim_{\boldsymbol{R}} G_u$ であって，G 上の複素解析的関数 f は G_u 上への制限 $f|_{G_u}$ で決定される．同様に，G の複素解析的有限次元表現 π は G_u の表現 $\pi_u := \pi|_{G_u}$ で決まり，π の指標 χ_π は，π_u の指標 χ_{π_u} で決まる．

コンパクト群 G_u には，コンパクト群の既約指標の一般論に加えて，古典型群としての特性が使える．大きな原則を挙げる．

原理 1. コンパクト群 G_u 上の正規化された Haar 測度を μ_{G_u} とおくと，

$$\int_{G_u} \left|\chi_{\pi_u}(g)\right|^2 d\mu_{G_u}(g) \;=\; 1. \tag{3.2}$$

H_u を G_u の Cartan 部分群とすると，連結可換なので，1 次元トーラス T^1 の直積 $T^p = T^1 \times T^1 \times \cdots \times T^1$, $p = \operatorname{rank} G_u$, である．指標 χ_{π_u} は不変関数なので，H_u 上の値が決まれば決まる．

原理 2. H_u 上では，χ_{π_u} は H_u の 1 次元指標 $\zeta \in \widehat{H_u}$ の非負正係数の一次結合である．

H_u のリー環の複素化を $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ とし，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ のルート系を Σ, そのうちの正のルート全体を Σ^+, $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\alpha$, とする．$\alpha \in \Sigma$ に対応する H_u の 1 次元指標を ξ_α と書く．いわゆる **Weyl の分母**なるものを，$h \in H_u$ に対して，

$$\begin{aligned}\Delta(h) \;&:=\; \prod_{\alpha\in\Sigma^+}\left(\xi_{\frac{\alpha}{2}}(h) - \xi_{-\frac{\alpha}{2}}(h)\right)\\ &=\; \xi_\rho(h)\prod_{\alpha\in\Sigma^+}\left(1 - \xi_{-\alpha}(h)\right), \quad \rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\alpha,\end{aligned} \tag{3.3}$$

とおく．$\Delta(h)$ は H_u 上で 1 価とは限らないが，その多価性は G が単連結かどうかににも関係する．また，$\Delta(h)$ は (G_u, H_u) の Weyl 群 W の作用に関して“歪対称”である，すなわち，$w \in W$ の符号を $\operatorname{sgn}(w)$ とすると，

$$\Delta\bigl(w(h)\bigr) = \operatorname{sgn}(w)\Delta(h) \quad (h \in H_u,\ w \in W). \tag{3.4}$$

原理 3. f を G_u 上の不変な連続関数とすると，$f|_{H_u}$ で決まり，

$$\int_{G_u} f(g)\, d\mu_{G_u} = \frac{1}{|W|}\int_{H_u} f(h)\, |\Delta(h)|^2\, d\mu_{H_u}(h), \tag{3.5}$$

ここに，μ_{H_u} は H_u 上の正規化された Haar 測度である．

（もっとも，この公式の著書 [Wey3] での証明は，感覚に訴えて納得させる部分があって，十分厳密とも思えないが，それはそれとして，読者を納得させる力や叙述の仕方も Weyl 流であろうか．）

$\chi_{\pi_u}(h)$ $(h \in H_u)$ は W-不変であるから，原理 1～原理 3 により，H_u 上の関数 $\Delta(h)\chi_{\pi_u}(h)$ は，

(1) $\xi_\rho \times \{\xi \in \widehat{H_u}$ の整係数 1 次結合$\}$ で，W-歪対称，

(2) $\displaystyle\int_{H_u} \left|\Delta(h)\chi_{\pi_u}(h)\right|^2 d\mu_{H_u}(h) = |W|.$

この (1), (2) を用いて，χ_{π_u} を求めることが出来る．

そして，G_u のスピン表現は普遍被覆群 $\widetilde{G}_u$ の線形表現なので，後者の Cartan 部分群 $\widetilde{H}_u$ を使って，形式的には統一的な方法で計算出来る．

前述したように，これで G の既約指標 χ_π が求まったことになる．G の話を G_u の話に移して実行するこのやり方を Weyl の **unitarian trick** という．

4　有限群のスピン表現関連の研究

Schur の三部作より 50 年の空白の後，
有限または無限の，対称群・交代群・複素鏡映群の射影表現，さらに一般理論

その嚆矢は 1962 年の Morris の論文 [Mor1] であった．

4.1　Morris の論文

● **最初期．回転群** SO(n), **直交群** O(n) **の 2 重被覆群．**

[Mor01,1958] A.O. Morris, Spin representations of a direct sum and a direct product, *J. London Math. Soc.*, **33**(1958), 326-333.

この論文は，SO(n), Spin(n) に関するものだが，必要な定義等はすべて，

[Litt] D.E. Littlewood, *The theory of group characters and matrix representation of groups*, 2nd edition, Clarendon Press, 1950,

に任せている短い論文なので，この本の必要部分を読んでからでないと理解出来ない．そのため，少々回り道だが準備をする．

回転群 SO(n), $n \geq 3$, は単連結でないので，普遍被覆群として 2 重被覆の Spin(n) を持つ．これを与えるには，まず $\boldsymbol{C}$ 上の Clifford 代数 $\mathcal{C}_n$ の標準的生

成元 $\{\boldsymbol{e}_j;\, 0 \le j \le n\}$ をとる．基本関係式は，

$$
(4.6) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}_j^2 = \boldsymbol{e}_0 \ \ (1 \le j \le n), & \boldsymbol{e}_0 \text{ 単位元}, \\ \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k = -\boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_j & (j \ne k,\, 1 \le j, k \le n). \end{cases}
$$

ここで，$j \ne k$ に対して 1 径数群

$$
(4.7) \qquad v_{jk}(\theta) := \exp(\theta\, \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k) = \cos\theta\, \boldsymbol{e}_0 + \sin\theta\, \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k \in \mathcal{C}_n \ \ (\theta \in \boldsymbol{R})
$$

をとり，それらで生成される群を $\mathrm{Spin}(n)$ とおく．n 次元ベクトル空間 $X = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_n$ は $\mathrm{Spin}(n)$ の元による共役で不変である．実際，

$$
(4.8) \qquad v_{jk}(\theta)\, \boldsymbol{e}_i\, v_{jk}(\theta)^{-1} = \begin{cases} \boldsymbol{e}_i & (i \ne j, k), \\ \cos(2\theta)\boldsymbol{e}_j - \sin(2\theta)\boldsymbol{e}_k & (i = j), \\ \sin(2\theta)\boldsymbol{e}_j + \cos(2\theta)\boldsymbol{e}_k & (i = k). \end{cases}
$$

X 上の基底の元 $\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k$ で張られる 2 次元部分空間での角 φ の回転を $u_{jk}(\varphi)$ とすると，

$$
(4.9) \qquad \begin{aligned} \big(u_{jk}(\varphi)(\boldsymbol{e}_j), u_{jk}(\varphi)(\boldsymbol{e}_k)\big) &= (\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)\, u_2(\varphi), \\ u_2(\varphi) &:= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}
$$

公式 (4.8), (4.9) より，次のことがわかる：

定理 4.1. 群 $\mathrm{Spin}(n)$ の元 g' に対して，n 次元空間 X 上の変換

$$
\Phi(g')\boldsymbol{x} := g' \boldsymbol{x}\, {g'}^{-1} \qquad (\boldsymbol{x} \in X)
$$

を対応させると，$\Phi\big(v_{ij}(\theta)\big) = u_{jk}(-2\theta)\ \ (j \ne k)$, であり，$\Phi$ の像は X 上の回転群全体 $\mathrm{SO}(n)$ になる．準同型写像 $\Phi : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ の核は $Z = \{\pm \boldsymbol{e}_0\}$ である．$\mathrm{Spin}(n)$ は $\mathrm{SO}(n)$ の普遍被覆群を与える． □

なお，3 次元空間の回転群に関しては，普遍被覆群 Spin(3) は四元数を使っても自然な実現が出来る（[平井 5] 参照）．

論文 [Mor01] の主題は，$\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{Spin}(n)$ 上の S-function (= *Schur function*) であり，その定義を [Litt] から引用する．

[Litt] 第 VI 章 ‘Immanants and S-Functions’ によると，その第 1 節では，正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ に対して，determinant, permanent, をより一般にした immanants を定義している．それを用いて，第 2 節以降の S-function の導入，その性質の研究，へと進んで行く．しかし，S-function 自体は（行列ではなく）独立変数 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ の対称関数として定義されるものなので，この第 1 節をパスした形で S-function を定義する．

$$
(4.10) \qquad \prod_{1 \leqslant r \leqslant n} (x + \alpha_r) \ = \ 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,
$$

$$\begin{aligned}\prod_{1\leqslant r\leqslant n}(1-\alpha_r x)^{-1} &= \prod_{1\leqslant r\leqslant n}\left(1+\alpha_r x+\alpha_r^2x^2+\alpha_r^3x^3+\cdots\right)\\ &= 1+h_1x+h_2x^2+h_3x^3+\cdots,\\ S_r &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\alpha_i^r,\end{aligned}\tag{4.11}$$

により対称関数 $a_r=a_r(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $h_r=h_r(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $S_r=S_r(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ を定義する．これらを用いて下の定理 4.2 も証明される．

定義 4.1. $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)\in P_n$ に対して，$m<n$ のときには，$\lambda_{m+1}=\cdots=\lambda_n=0$ を追加したものをまた $\boldsymbol{\lambda}$ と書く．$n\times n$ 型行列 $\left(\alpha_s^{\lambda_t+n-t}\right)_{1\leqslant s,t\leqslant n}$ 等を考えて，行列式の商

$$S^{\boldsymbol{\lambda}}=S^{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n):=\frac{\left|\alpha_s^{\lambda_t+n-t}\right|}{\left|\alpha_s^{n-t}\right|}\tag{4.12}$$

を（分割 $\boldsymbol{\lambda}$ に対応する）*S-function* と呼ぶ．

定理 4.2 (Jacobi-Trudy). $\dfrac{\left|\alpha_s^{\lambda_t+n-t}\right|}{\left|\alpha_s^{n-t}\right|}=\left|h_{\lambda_s-s+t}\right|.$ □

さて，論文「Mor01」に戻ろう．この論文の Introduction は短いが，misleading で実に分かり難い．そのトップの文章は，

> The S-function associated with the direct sum or direct product of two matrices, can be expressed in terms of the S-functions assciated with the respective two matrices by known formulae. .....

とあるが，しかし，行列に associate しているのは immanants であり，S-function は数列（もしくは変数列）に assciate している．

論文でやってあることを解説する．$G=\mathrm{SO}(n)$ の Cartan 部分群 H として，次の形のブロック型対角行列からなるものがとれる： $\nu=[n/2]$ として，

$$h(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_\nu)=\begin{cases}\mathrm{diag}\big(u_1(\varphi_1),u_2(\varphi_2),\ldots,u_2(\varphi_\nu),1\big) & (n=2\nu+1),\\ \mathrm{diag}\big(u_1(\varphi_1),u_2(\varphi_2),\ldots,u_2(\varphi_\nu)\big) & (n=2\nu).\end{cases}$$

$h=h(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_\nu)\in H$ の固有値は，

$\{e^{i\varphi_1},e^{-i\varphi_1},\ldots,e^{i\varphi_\nu},e^{-i\varphi_\nu},1\}$，または，$\{e^{i\varphi_1},e^{-i\varphi_1},\ldots,e^{i\varphi_\nu},e^{-i\varphi_\nu}\}$.

指標は h の関数として，W-不変であり，$n=2\nu+1$ のときは，B_ν 型なので，$(\cos\varphi_1,\ldots,\cos\varphi_\nu)$ の対称関数である．ここまで来て初めて S-function が考えられる．$n=2\nu$ のときは，D_ν 型なので，Weyl 群はすこし小さいが $\mathrm{O}(n)$ まで行けば B_ν 型と同じとなる．（この辺は Morris の詰めが甘いのだが，それは彼の初期の論文に共通する．）

本論文でやったこと． $\mathrm{SO}(n)$ の線形（非スピン）既約表現のパラメーターは整数の組である．スピン既約表現のパラメーターはそれが一斉に半整数にな

る．ここでは，線形の場合に成り立っている S-関数の公式が，スピンの場合にはどうなるかを論じている．これは結構複雑であって，決定的な公式を出すのは難しい．さらに，普遍被覆群 Spin(n) を表に出さずに論じているので余計に分かり難い．

[Mor02,1961] A.O. Morris, Spin representations of compound and induced matrices of an orthogonal matrix, *Quart. J. Math. Oxford*, **(2) 12**(1961), 69-77.

少し用語が我々と異なるが，行列 A がベクトル空間 V に働いているとき，V の p 次対称テンソル空間に誘導される変換を表す行列を $A^{(p)}$ と書き，*induced matrix* という．V の p 次交代テンソルの空間上に働くものを $A^{[p]}$ と書き，*compound matrix* という．

$G = \mathrm{SO}(n)$ の線形表現 π があったとき，それの対称テンソルまたは交代テンソルを取ることによって，それぞれ線形表現 $\pi^{(p)}, \pi^{[p]}$ が得られる：

$$\pi^{(p)}(g) := \pi(g)^{(p)}, \quad \pi^{[p]}(g) := \pi(g)^{[p]} \quad (g \in G). \tag{4.13}$$

π が線形のときには，$\pi^{(p)}, \pi^{[p]}$ の指標は π の指標から求められるが，それらは上の意味での S-関数の等式として与えられる．

π が線形でないスピン表現になったとき，それらの公式がどうなるかを論じている．ただし，ここではやはり，スピン表現を具体的に与えるのではなくて，指標を通してだけで論じているので，いまひとつ分かり難い．

[Mor03,1961] A.O. Morris, Spin representations of a direct sum and a direct product II, *Quart. J. Math. Oxford*, **(2) 12**(1961), 169-176.

連結な $\mathrm{SO}(n)$ に対しては普遍被覆群は一意的であったが，非連結な $\mathrm{O}(n)$ に対しては2種類の2重被覆群が存在する．本論文では，非連結な場合にも論文 [Mor01] で述べたように，線形表現の指標からスピン表現の指標への遷移が S-関数の遷移を経て実現出来ることを証明する．

実際の感覚を得るために，解説の一部としてここで1つのスピン表現を与えておく．

○ **SO(n) のスピン表現の構成．** $\nu = [n/2]$ とする．

$$a := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{として，} \tag{4.14}$$

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= a \otimes \varepsilon^{\otimes(\nu-1)} \quad (k\text{ 回テンソル積}),\\
Y_2 &= b \otimes \varepsilon^{\otimes(\nu-1)},\\
Y_3 &= c \otimes a \otimes \varepsilon^{\otimes(\nu-2)},\\
Y_4 &= c \otimes b \otimes \varepsilon^{\otimes(\nu-2)},\\
\cdots & \quad \cdots \quad \cdots\\
\cdots & \quad \cdots \quad \cdots\\
Y_{2\nu-1} &= c^{\otimes(\nu-1)} \otimes a,\\
Y_{2\nu} &= c^{\otimes(\nu-1)} \otimes b,\\
Y_{2\nu+1} &= c^{\otimes(\nu-1)} \otimes c,
\end{aligned}
$$

とおくと，$E := E_{2^\nu}$ を 2^ν 次の単位行列として，

$$
\text{(4.15)} \qquad \begin{cases} Y_p{}^2 = E & (1 \leq p \leq 2\nu+1),\\ Y_pY_q = -Y_qY_p & (p \neq q), \end{cases}
$$

が満たされる（チェックせよ）.

従って，対応 $\Psi_n : e_j \mapsto Y_j \ (1 \leq j \leq n)$ は Clifford 代数 $\mathcal{C}_n$ の表現を与える.

ゆえに，そこに含まれる部分群 Spin(n) に Ψ_n を制限すれば，Spin(n) の $2^{[n/2]}$ 次元の線形表現 $\nabla_n := \Psi_n\big|_{\mathrm{Spin}(n)}$ を得る.

● **対称群のスピン表現 (Schur の仕事の見直し).**

[Mor1,1962] A.O. Morris, The spin representation of the symmetric group, *Proc. London Math. Soc.* (3)**12**(1962), 55-76.

回転群 SO(n) $(n \geq 3)$ は連結 Lie 群として，一意的に存在する普遍被覆群 Spin(n) を持つが，非連結な O(n) は 2 種の 2 重被覆群 $\widetilde{\mathrm{O}}(n)$ と $\widetilde{\mathrm{O}}'(n)$ を持つ. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対してその置換行列 $T(\sigma) \in \mathrm{O}(n)$ を取って，さらにそれに対応するそれぞれ $\widetilde{\mathrm{O}}(n)$, $\widetilde{\mathrm{O}}'(n)$ の元を $\widetilde{T}(\sigma) \in \widetilde{\mathrm{O}}(n)$, $\widetilde{T}'(\sigma) \in \widetilde{\mathrm{O}}'(n)$ をとると，2 価であり（1 つの σ に 2 個の元がとれる），対応

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S}_n \ni \sigma &\longmapsto \widetilde{T}(\sigma) \in \widetilde{\mathrm{O}}(n),\\
\mathfrak{S}_n \ni \sigma &\longmapsto \widetilde{T}'(\sigma) \in \widetilde{\mathrm{O}}'(n),
\end{aligned}
$$

が，$\mathfrak{S}_n$ の（Schur による）2 つの表現群（2 重被覆群である）$\mathfrak{T}_n$ と $\mathfrak{T}'_n$ とを与える.

● **Q-関数，Hall 関数**

[Mor2,1962] A.O. Morris, On Q-functions, *J. London Math. Soc.*, **37**(1962), 445-455.

[Mor2bis,1963] A.O. Morris, The multiplication of Hall functions, Proc. London Math. Soc., (3)**13**(1963), 733-742.

[Mor2bis2,1964] A.O. Morris, A note on the multiplication of Hall functions, *J. London Math. Soc.,* **39**(1964), 481-488.

4. 有限群のスピン表現関連の研究

以上３つの論文は，$\mathfrak{S}_n$ のスピン既約表現の指標に現れる（いわゆる）Schur の Q 関数や，Hall 関数に関する研究である．

[Mor3,1965] A.O. Morris, The spin representation of the symmetric group, *Canad. J. Math.*, **17**(1965), 543-549.

[Mor3bis0,1967] A.O. Morris, On a generalized Clifford algebra, *Quart. J. Math. (Oxford)*, **18**(1967), 7-12.

[Mor3bis1,1972] A.O. Morris, Projective representations of finite groups, *"Proceedings of the conference on Clifford algebras, its generalizations and applications (ed. A. Ramakrishnan), Matscience, Madras 1971"*, pp.43-86, 1972.

[Mor3bis2,1973] A.O. Morris, Projective representations of abelian groups, *J. London Math. Soc.*, **(2) 7**(1973), 235-238.

[Mor4pre1,1974] A.O. Morris, Projective representations of Weyl groups, *J. London Math. Soc.*, **(2) 8**(1974), 125-133.

[Mor4pre2,1974] A.O. Morris, Projective characters of exceptional Weyl groups, *J. of Algebra*, **29**(1974), 567-586.

[DaMo,1974] J.W. Davies and A.O. Morris, The Schur multiplier of the generalized symmetric group, *J. London Math. Soc.*, **(2) 8**(1974), 615-620.

[Mor4,1976] A.O. Morris, A survey on Hall-Littlewood functions and their applications, in *Combinatoire et Représentaion du Groupe Symétrique*, Springer LN in Math., **579**(1976), 136-154.

[Mor5,1976] A.O. Morris, Projective representations of reflexion groups I, *Proc. of London Math. Soc.*, **32**(1976), 403-420.

[Mor6,1979] A.O. Morris, The projective characters of the symmetric group – an alternative proof, *J. of London Math. Soc.*, **19**(1979), 57-58.

[Mor7,1980] A.O. Morris, Projective representations of reflexion groups II, *Proc. of London Math. Soc.*, **40**(1980), 553-576.

[Mor8,1981] A.O. Morris, Representations of Weyl groups over an arbitrary field, *Astérisque*, **87-88**(1981), 267-287.

[MoYa1,1986] A.O. Morris and A.K. Yaseen, Some combinatorial results involving shifted Young diagrams, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **99**(1986), 23-31.

[MoYa2,1988] A.O. Morris and A.K. Yaseen, Decomposition matrices for spin characters of symmetric groups, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **108A**(1988), 145-164.

[MoOl,1988] A.O. Morris and J. Olsson, On p-quotients for spin characters, *J. Algebra*, **15**(1988), 51-82.

[MoJo, 2003] A.O. Morris and H.I. Jones, Projective representations of generalized symmetric groups, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, **50**(2003), Article B50b, 1-27.

4.2 岩堀長慶グループの「有限群のスピン表現関連」の研究

[IwMa,1964] N. Iwahori and H. Matsumoto, Several remarks on projective representations of finite groups, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo,* Sect.1, **10**(1964), 129-146.
有限群 G の被覆群，とくに G の表現群に関する（Schur の結果を補完する）研究

[Yam,1964] K. Yamazaki, On projective representations and ring extensions of finite groups, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect.1, **10**(1964), 147-195.
「Schur の有限群のスピン表現の理論」を再構成し拡張したもの

[IhYo,1965] S. Ihara and T. Yokonuma, On the second cohomology groups (Shur multipliers) of finite reflection groups, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect.1, **11**(1965), 155-171.
既約な有限 Coxeter 群 W に対し，その Schur-multiplier と言われる second cohomology $H^2(W, \boldsymbol{C}^\times)$ を計算した.

◆ 有限群 G に対し，その Schur-multiplier を決定することは，有限単純群の分類問題にも関連する重要問題であったとのことである（参照 [Gor]）.

5 考察とまとめ

本報文のトップで設定した課題への解答は何だろうか？

(1) リー群 SO(n) 等に対するスピン表現（あるいは，多価表現）が，主として指標を通して，自然に現れてきたのに比して，Schur (1911) 以後，有限群のスピン表現の研究が 50 年間途絶えていたことに対して，ちゃんとした深い理由はとくに見付けることは出来なかった.

(2) 一応のそれらしい状況説明は出来る.

(イ) Schur の有限群のスピン表現の一般論 (1904, 1907)，対称群 $\mathfrak{S}_n$, 交代群 $\mathfrak{A}_n$, のスピン表現に対する具体論 (1911) が，完璧すぎたこと．すなわち，それを越える結果が出しにくかった．Morris 以後の論文等でも，「これは，Schur の idea による」といった修辞がよく使われている．例えば，専門書 [HoHu] の Introduction の第 1 節は，次のようである.

> In the first decade of this century, Issai Shcur initiated the study of projective representations, and developed the general theory for finite groups. In a beautiful and formidable paper, Schur (1911), he then worked out all the basic details for the symmetric and

> alternating groups. When our labor on this monograph began, no other complete treatment of Schur's results existed. Our main approach to the subject is quite similar to his.

(ロ) リー群の場合，$G = \mathrm{SO}(n)$ から $\widetilde{G} = \mathrm{Spin}(n)$ への遷移の際には，かなり自然に移っていける．例えば，既約表現や既約指標は形式的には，同一の公式で表される．指標では，その差異は単に，線形の場合には，既約表現のパラメーターは整数の組だが，スピンの場合には半整数の組に置き換わるだけである．

他方，有限群の場合には，線形とスピンでは，その差異はしばしば非常に大きい．簡単なところでは，既約表現の個数や次元でも大きな差が出てくる．指標でも形にも大きな差が出る（最近の論文 [HHo] 参照）．

(ハ) 線形の場合，有限個の群の直積や，有限個の表現のテンソル積を考えれば済んでいたことも，スピンの場合では，群の歪中心積（twisted central product）や，表現の歪テンソル積（twisted tensor product）を考える必要があり，その場合の指標公式は非常に複雑である（論文 [HHo] 参照）．

(ニ) Morris が $\mathrm{SO}(n)$ のスピン表現の指標の研究から，$\mathfrak{S}_n$ のスピン表現の研究へとシフトして行ったのは，それはそれとして，自然である．

しかし，彼の最初のスピン表現に関する結果は「$\mathfrak{S}_n$ の Schur の結果のごく一部の見直し」であった．彼はここから出発していったのである．

6 引 用 文 献

◆ 日 本 語 文 献：

[平井 1] Schur の学位論文および対称群の表現，津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**25**(2004), pp.123-131.

[平井 2] 平井 武，Schur の表現論の仕事（射影表現３部作） その I, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**30**(2009), pp.104-132.

[平井 3] 平井 武，Schur の表現論の仕事（射影表現３部作） その II, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**31**(2010), pp.74-82.

[平井 4] 数学者から数学者へ／シューア，『数学セミナー』2009, 2 月号, pp.6-7.

[平井 5] (Benjamin) Olinde Rodrigues (1795-1851) の業績について — とくに「空間の運動の記述」に関して —， ibid., **33**(2012), pp.59–79.

[平井 6] 群のスピン表現 (射影表現) の歴史概観 (付 年表)，津田塾大学 数学・計算機科学研究所報，**34**(2012), pp.99-119.

◆ **Schur の射影表現（スピン表現）関連の論文：**

全集第 I 巻

[S4, 1904] J. Schur (=I. Schur), *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* J. für die reine und angewante Mathematik, **127**(1904), 20–50.

[S10, 1907] J. Schur, *Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* J. für die reine und angewante Mathematik, **132**(1907), 85–137.

[S11, 1908] I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften 1908, Physikalisch-Mathematische Klasse, 664–678.

[S16, 1911] J. Schur, *Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen,* J. für die reine und angewante Mathematik, **139**(1911), 155–255.

全集第 III 巻

[S58, 1927] J. Schur, Über die reellen Kollineationsgruppen, die der symmetrischen oder der alternierenden Gruppe isomorph sind, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **158**(1927), 63–79.

◆ **Frobenius による $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{A}_n$ の線形表現と指標：**

[F60, 1900] *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe,* Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 516–534(1900).

[F61, 1901] *Über die Charaktere der alternirenden Gruppe,* Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 303–315(1901).

6. 引 用 文 献

[F68, 1903] *Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 328–358(1903).

◆ **Weyl の半単純リー群の表現と指標の理論：**

[W1, 1924] H. Weyl, *Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen (Aus einem schreiben an Herrn I. Schur)*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1924, 338-345.

[W2, 1925–'26] H. Weyl, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I–III*, Mathematische Zeitschrift, **23**(1925), 271-301; **24**(1926), 328-376; **24**(1926), 377-395.

◆ **Schur 三部作より 60 年以上の後，**
有限または無限の，対称群・交代群・複素鏡映群の射影表現：

[Bena, 1976] M. Benard, Schur indices and splitting fields of the unitary reflection groups, *J. Algebra*, **38**(1976), 318-342.

[Car1, 1913] E. Cartan, Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, *Bull. Soc. Math. France*, **41**(1913), 53-96.

[Car2, 1938] E. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs*, I, II, Actualités Scientifiques et Industrielles, nos **643, 701**, 1938, Hermann, Paris.

[CC, 1952] S.-S. Chern and C. Chevalley, Élie Cartan and his mathematical work, Bull. Amer. Math. Soc., **58**(1952), 217-250.

[Che, 1955] C. Chevalley, *Sur certains groupes simples*, Tôhoku Math. J., **7**(1955), 14-66,

[DaMo, 1974] J.W. Davies and A.O. Morris, The Schur multiplier of the generalized symmetric group, *J. London Math. Soc.*, **(2) 8**(1974), 615-620.

[Gor] D. Gorenstein, *Finite simple groups*, Plenam Publishing, 1982.

[HHH1] T. Hirai, E. Hirai and A. Hora, Towards projective representations and spin characters of finite and infinite complex reflection groups, *Proceedings of the fourth German-Japanes Symposium, Infinite Dimensional Harmonic Analysis, IV*, World Scientific, 2009, pp.112-128.

[HHH2] T. Hirai, E. Hirai and A. Hora, Projective representations and spin characters of complex reflection groups $G(m,p,n)$ and $G(m,p,\infty)$, I, and II, in *MSJ Memoirs*, Vol. 29, Math. Soc. Japan, 2013, pp.49-122, and pp.123–272.

[HHo] T. Hirai and A. Hora, Spin representations of twisted central products of double covering finite groups and the case of permutation groups, J. Math.. Soc. Japan, **66**(2014), 1191–1226.

[HoHu] P.N. Hoffman and J.F. Humphreys, *Projective representations of the symmetric group*, Oxford University Press, 1992.

6. 引 用 文 献

[IhYo, 1965] S. Ihara and T. Yokonuma, On the second cohomology groups (Shur multipliers) of finite reflection groups, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Ser. 1, **IX**(1965), 155-171.

[IwMa, 1964] N. Iwahori and H. Matsumoto, Several remarks on projective representations of finite groups, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo,* Sect.1, **10**(1964), 129-146.

[Kar1] G. Karpilovski, *Projective representations of finite groups,* Marcel Dekker, New York, 1985.

[Kle] A. Kleshchev, *Linear and projective representations of symmetric groups,* Cambridge Tracts in Mathmatics, **163**, 2005.

A.O. Morris の論文：

[Mor01, 1958] A.O. Morris, Spin representations of a direct sum and a direct product, *J. London Math. Soc.,* **33**(1958), 326-333.

[Mor02, 1961] A.O. Morris, Spin representations of compound and induced matrices of an orthogonal matrix, *Quart. J. Math. Oxford,* **(2) 12**(1961), 69-77.

[Mor03, 1961] A.O. Morris, Spin representations of a direct sum and a direct product II, *Quart. J. Math. Oxford,* **(2) 12**(1961), 169-176.

[Mor1, 1962] A.O. Morris, The spin representation of the symmetric group, *J. London Math. Soc.* (3)**12**(1962), 55-76.

[Mor2, 1962] A.O. Morris, On Q-functions, *J. London Math. Soc.*, **37**(1962), 445-455.

[Mor2bis, 1963] A.O. Morris, The multiplication of Hall functions, Proc. London Math. Soc., (3)**13**(1963), 733-742.

[Mor2bis2, 1964] A.O. Morris, A note on the multiplication of Hall functions, *J. London Math. Soc.,* **39**(1964), 481-488.

[Mor3, 1965] A.O. Morris, The spin representation of the symmetric group, *Canad. J. Math.*, **17**(1965), 543-549.

[Mor3bis0, 1967] A.O. Morris, On a generalized Clifford algebra, *Quart. J. Math. (Oxford),* **18**(1967), 7-12.

[Mor3bis1, 1972] A.O. Morris, Projective representations of finite groups, *"Proceedings of the conference on Clifford algebras, its generalizations and applications (ed. A. Ramakrishnan), Matscience, Madras 1971"*, pp.43-86, 1972.

[Mor3bis2, 1973] A.O. Morris, Projective representations of abelian groups, *J. London Math. Soc.,* **(2) 7**(1973), 235-238.

[Mor4pre1, 1974] A.O. Morris, Projective representations of Weyl groups, *J. London Math. Soc.,* **(2) 8**(1974), 125-133.

[Mor4pre2, 1974] A.O. Morris, Projective characters of exceptional Weyl groups, *J. of Algebra,* **29**(1974), 567-586.

6. 引 用 文 献

[Mor4, 1976] A.O. Morris, A survey on Hall-Littlewood functions and their applications, in *Combinatoire et Représentaion du Groupe Symétrique*, Springer LN in Math., **579**(1976), 136-154.

[Mor5, 1976] A.O. Morris, Projective representations of reflexion groups I, *Proc. of London Math. Soc.*, **32**(1976), 403-420.

[Mor6, 1979] A.O. Morris, The projective characters of the symmetric group – an alternative proof, *J. of London Math. Soc.*, **19**(1979), 57-58.

[Mor7, 1980] A.O. Morris, Projective representations of reflexion groups II, *Proc. of London Math. Soc.*, **40**(1980), 553-576.

[Mor8, 1981] A.O. Morris, Representations of Weyl groups over an arbitrary field, *Astérisque*, **87-88**(1981), 267-287.

[MoJo, 2003] A.O. Morris and H.I. Jones, Projective representations of generalized symmetric groups, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, **50**(2003), Article B50b, 1-27.

[MoOl, 1988] A.O. Morris and J. Olsson, On p-quotients for spin characters, *J. Algebra*, **15**(1988), 51-82.

[MoYa1, 1986] A.O. Morris and A.K. Yaseen, Some combinatorial results involving shifted Young diagrams, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **99**(1986), 23-31.

[MoYa2, 1988] A.O. Morris and A.K. Yaseen, Decomposition matrices for spin characters of symmetric groups, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **108A**(1988), 145-164.

スピン表現の論文（続き）：

[Naz0, 1990] M. Nazarov, Young's orthogonal form of irreducible projective representations of the symmetric group, *J. London Math. Soc.*, **(2) 42**(1990), 437-451.

[Naz1, 1997] M. Nazarov, Young's symmetrizers for projective representations of the symmetric group, *Adv. Math.*, **127**(1997), 190-257.

[Rea, 1976] E.W. Read, On the Schur multipliers of the finite imprimitive unitary reflexion groups $G(m,p,n)$, *J. London Math. Soc.*, **(2), 13**(1976), 150-154.

[Wei, 1964] A. Weil, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta Math., **111**(1964), 143-211.

[Yam, 1964] K. Yamazaki, On projective representations and ring extensions of finite groups, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect.1, **10**(1964), 147-195.