実簡約対称空間上の離散球表現の分類
-カルタン杉浦の定理の非コンパクト化-

佐野　茂 *

2014年10月11日

1　はじめに

連結コンパクト群 U の既約表現は最高ウェイトにより決まることをワイルは1925年, 1926年の論文で証明している. U の単純ルート全体を $B=\{\alpha_1,...,\alpha_l\}$ とし, また $(\lambda_1,...,\lambda_l)$ を $2(\lambda_i,\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j)=\delta_{ij}$ を満たすウェイトとする. このとき最高ウェイト全体の集合は

$$\Lambda=\{m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+...+m_l\lambda_l : m_1,...,m_l \text{は負でない整数}\}$$

となる. こうしたコンパクト群の成果に対し, カルタンはコンパクト対称空間 U/K へと研究を進めている.

例

$$O(n)/O(n-j)\times O(j)$$

$$Sp(n)/Sp(n-j)\times Sp(j)$$

$$U(n)/U(n-j)\times U(j)$$

$L^2(U/K)$ の正則表現 $T_gf(x)=f(g^{-1}x)$ $(x\in U/K,\ f\in\ L^2(U/K))$ を U の既約表現で分解するとき球表現 (K 不変ベクトルをもつ) が分解に出てくることを1929年に証明している. ところがカルタンの仕事では球表現を最高ウェイトにより特徴づけていないことを杉浦光夫は看破し次の定理を1962年に与えている.

定理 (杉浦) 最高ウェイト λ の U の既約表現 π_λ に対し次の3条件は同値である.

(1) π_λ はコンパクト対称空間 U/K の球表現である.

(2) $\lambda(\mathfrak{k})=0,\ (\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha)\in\mathbf{Z}\ \ (\alpha\in S)$

(3) 最高ウェイト $\lambda=\sum_{i=1}^{l}m_i\lambda_i$ において, (a) $\alpha_i\in\Sigma_0$ なら $m_i=0$, (b) $p\alpha_i=\alpha'_i$ ならば $m_i=m'_i$, (c) $\alpha_i\in\Sigma-\Sigma_0, p\alpha_i=\alpha_i$ で, ディンキン図形上で α_i が Σ_0 の元と結ばれていないとき $m_i\in 2\mathbf{Z}$

他方, 非コンパクトな実半単純リー群の無限次元表現論はゲルファンドらにより1947年に誕生し, Harich-Chandra により実簡約リー群 G の離散系列表現の特徴づけが1965年になされた (文献 [H1]).

その後理論は実簡約対称空間上の調和解析へと発展していった. 特に $G\times G$ での対合 σ を $\sigma(g,h)=(h,g)$ とする. $\Delta=(G\times G)^\sigma$ を σ-不変な元全体からなる $G\times G$ の閉部分群とする. 対称空間 $G\times G/\Delta$ と群 G とは対応 $G\times G/\Delta\ni(g,1)\Delta\mapsto g\in G$ により同一視できる. このことより簡約対称空間 G/H は簡約リー群の自然な一般化といえるからである.

* 職業能力開発総合大学校, 東京都小平市, e-mail address: ssano@uitec.ac.jp

例

$$SL(n,\mathbf{R})/SO(n-j,j),\ SL(n,\mathbf{C})/SU(n-j,j)$$

$$Sp(n,n)/Sp(n,\mathbf{C}),\ Sp(n,\mathbf{R})/Sp(n-j,\mathbf{R})\times Sp(j,\mathbf{R})$$

$$SO(n,n)/SU(n,\mathbf{C}),\ GL(n,\mathbf{R})/GL(n-j,\mathbf{R})\times GL(j,\mathbf{R})$$

このように群多様体の一般化とみなすのは自然な研究方向だが，群の場合の指標や不変固有超関数などの軌道理論は使えないため別の道をたどった．実簡約対称空間 G/H の双対リーマン対称空間 G^d/K^d をとる．この空間 G^d/K^d 上では G^d のクラス 1 の表現空間を佐藤の超関数で与えて確定特異点型微分方程式論を用いて Helgason 予想が解決された (文献 [K-])．ここでの成果を生かし，大島利雄らは G^d の極小放物部分群 P^d の G^d/K^d での閉軌道に対応して離散球表現の特徴づけをおこなった．すなわち $L^2(G/H)$ の正則表現の不変閉部分空間として実現される既約表現である．

$L^2(G/H)$ の不変閉部分空間として実現される離散球表現は $L^2(G)$ の H 不変ベクトルをもつ離散系列表現が現われる場合だけではない．G の緩増加表現で H 不変ベクトルをもつものが現われることがあるのである．ここがコンパクト対称空間の場合と大きく異なる．歴史が繰り返される所と新しい内容が誕生する所とが織りなし魅力ある数学史を刻んでいる．

2 実簡約リー群の離散系列表現

G を H-C クラスの実簡約リー群とする．G° を G の単位元を含む連結成分．K を G のコンパクト部分群で $K\cap G^\circ$ が G° の極大コンパクト部分となるものとする．$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ をそれぞれのリー環とする．

$L^2(G)$ の不変閉部分空間の表現を離散系列表現という．離散系列表現が存在するための必要十分条件 $\mathrm{rank}\, G=\mathrm{rank}\, K$ を仮定する．このとき G にはコンパクトカルタン部分群 B が存在するので K に含まれるようにとる．対応する $\mathfrak{g}$ の部分リー環は $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{k}$ とする．複素化して $\mathfrak{g}^c$, $\mathfrak{k}^c$ は $\mathfrak{b}^c$ をカルタン部分環にもつ．ルート系を $\Sigma=\Sigma(\mathfrak{g}^c,\mathfrak{b}^c)$, $\Sigma_K=\Sigma(\mathfrak{k}^c,\mathfrak{b}^c)$ とおく．このとき次の定理は Harish-Chandra の仕事（文献 [H1])）から Blattner が予想し Schmid により 1968 年に与えられた．

定理 1　正則な $\lambda\in(i\mathfrak{b}^*)'$ をとり $\Sigma^+=\{\alpha\in\Sigma:(\lambda,\alpha)>0\}$ とおく．$\lambda+\rho_G$ が条件

$$2\frac{(\lambda+\rho_G,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbf{Z}\ \ (\alpha\in\Sigma)$$

を満足するとき G の条件を満足する次の離散系列表現 π_λ が存在する．

(i)π_λ は無限小指標 χ_λ をもつ．

(ii)$\pi_\lambda|_K$ は最高ウェイト $\Lambda=\lambda+\rho_G-2\rho_K$ 表現を重複度 1 で含む．

(iii) もし Λ' が $\pi|_K$ の K タイプの最高ウェイトならば，Λ' は次のように表される

$$\Lambda'=\Lambda+\sum_{\alpha\in\Sigma^+}n_\alpha\alpha\ \ n_\alpha\geq 0$$

このような性質をもつ 2 つの離散系列表現 π_λ が同値であるための必要十分条件は W_K で移りあうことである．

一般に G は連結ではないためこのような無限小指標だけでは離散系列表現をすべて特徴づけることは出来ない．しかし G の指標により特徴づけることは出来る．

Z を G° の G での中心化群とすると $B = ZB^\circ$.

$$\mu(b^*) = \log b^* + \rho_G,\ \Delta(X) = \prod_{\alpha\in\Sigma+} (e^{\alpha(X)/2} - e^{-\alpha(x)/2})\ \ (X \in \mathfrak{b})$$

B^* を B の指標全体の集合とし，$W(G/B)$ をワイル群とする．

$b^* \in B^*$ に対し $\mu = \mu(b^*)$ とおく G° 上の不変固有超関数 Θ_μ を次で定義

$$\Delta(b)\Theta_\mu = \sum_{s\in W(G^\circ/B^\circ)} \epsilon(s)e^{s\mu(X)}\ \ (X \in \mathfrak{b})$$

$G_1 = ZG^\circ$ とおき代表元を $G/G_1 = \{y_iG_1 : 1 \le i \le r\}$ とる．G 上の局所可積分関数 Θ_{b^*} を

$$\Theta_{b^*}(zx) = \sum_{1\le i\le r} < b^*, z^{y_i} > \Theta_\mu(x^{y_i})\ \ (z \in Z,\ x \in G^\circ)$$

ととると，このとき次の定理を得る (文献 [H2])．

定理 2 (Harich-Chandra) $b^* \in B^{*\prime}$ に対して次の指標をもつ G の離散系列表現が一意に決まる．

$$(-1)^q\epsilon(b^*)\Theta_{b^*}$$

3 実簡約対称空間上の離散球表現

G を H-C クラスの簡約対称空間とする．σ を G の対合的自己同形とし，G^σ を G の σ− 不変元全体の部分群とする．G^σ の開部分群 H をとり，簡約対称空間 G/H を扱っていく．θ を σ と可換な Cartan 対合とする．$K = G^\theta$ とする．$\mathfrak{g}$ を G のリー環とし，σ による固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$ とする．また θ による固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ とする．

この節では

$$V \subset L^2(G/H)$$

の G-不変部分空間に実現される G の既約ユニタリ表現を離散球表現という．この離散球表現が存在するための条件をまとめる．

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\cap\mathfrak{h} + \mathfrak{k}\cap\mathfrak{q} + \mathfrak{p}\cap\mathfrak{h} + \mathfrak{p}\cap\mathfrak{q},\ \mathfrak{h} = \mathfrak{h}\cap\mathfrak{k} + \mathfrak{h}\cap\mathfrak{p},\ \mathfrak{k} = \mathfrak{k}\cap\mathfrak{h}\cap + \mathfrak{k}\cap\mathfrak{q}$$

これらの双対は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\cap\mathfrak{h} + \sqrt{-1}(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q}) + \sqrt{-1}(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}) + \mathfrak{p}\cap\mathfrak{q},$$

$$\mathfrak{k}^d = \mathfrak{k}\cap\mathfrak{h} + \sqrt{-1}(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}),\ \mathfrak{h}^d = \mathfrak{k}\cap\mathfrak{h} + \sqrt{-1}(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q})$$

となる．G_c を G の複素化とする．G^d, K^d, H^d を $\mathfrak{g}^d$, $\mathfrak{k}^d$, $\mathfrak{h}^d$ に対応する G_c の解析的部分群とする．

例

$$G/H = SL(n,\mathbf{C})/SL(n,\mathbf{R}) \text{ の双対は } G^d/K^d = SL(n,\mathbf{C})/SU(n)$$

$$SL(n,\mathbf{R})/SO((n-j,j) \text{ の双対は } SU(n-j,j))/SU(n)$$

$\delta \in \hat{K}$ に対して空間を

$$\mathscr{A}_\delta(G/H) = \{f \in \mathscr{A}(G/H) : f(kx) = \delta(k)f(x) \qquad k \in K\},$$

$$\mathscr{A}_\delta(G^d/K^d) = \{f \in \mathscr{A}(G^d/K^d) : f(hx) = \delta(h)f(x) \qquad h \in H^d\}$$

で定義する．さらに

$$\mathscr{A}_K(G/H) = \sum_{\delta \in \hat{K}} \mathscr{A}_\delta(G/H)$$

$$\mathscr{A}_{H^d}(G^d/K^d) = \sum_{\delta \in \hat{H}^d(K)} \mathscr{A}_\delta(G^d/K^d)$$

とおき対応 γ を

$$\gamma : \mathscr{A}_K(G/H) \to \mathscr{A}_{H^d}(G^d/K^d)$$

次の条件

(1)$f^\gamma(x) = f(x) \qquad f \in \mathscr{A}_K(G/H),\ x \in G \cap G^d$

(2)γ は左 $U(\mathfrak{g})$-作用と右 $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$-作用と可換

を満足するように定義する．

$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ の極大可換部分空間とする．$\mathfrak{p}^d = \sqrt{-1}(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q}) + \mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ の極大可換部分空間で $\mathfrak{a}$ を含むものを $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^d$ とする．$(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^d, \Sigma^+(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^d))$ に対応した G^d の極小放物部分群を $P^d = M^d A_\mathfrak{p}^d N^d$ とする．$\lambda \in (\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^d)^*$ に対し関数空間

$$\mathscr{B}(G^d/P^d : L_\lambda) = \{f \in \mathscr{B}(G^d) :\ f(xman) = a^{\lambda-\rho}f(x),\ x \in G^d,\ m \in M^d\}$$

$$\mathscr{A}(G^d/K^d : \mathscr{M}_\lambda^d) = \{f \in \mathscr{A}(G^d/K^d) : Df = \chi_\lambda^d(D)f,\ D \in \mathbb{D}(G^d/K^d)\}$$

を定義し、ポワソン変換 $\mathscr{P}_\lambda$

$$\mathscr{P}_\lambda : \mathscr{B}(G^d/P^d : L_\lambda) \to \mathscr{A}(G^d/K^d : \mathscr{M}_\lambda^d)$$

を

$$(\mathscr{P}_\lambda)f(xK^d) = \int_{K^d} e^{<-\lambda-\rho, H(x^{-1}k)>} f(k)dk$$

で与える．さらに

$$\mathscr{B}_\delta(G^d/P^d : L_\lambda) = \{f \in \mathscr{B}(G^d/P^d : L_\lambda) :\ f(kx) = \delta(k)f(x)\ k \in K^d\}$$

$$\mathscr{B}_{H^d}(G^d/P^d : L_\lambda) = \sum_{\delta \in \hat{H}^d(K)} \mathscr{B}_\delta(G^d/P^d : L_\lambda)$$

とおくと

$$\mathscr{P}_\lambda : \mathscr{B}_{H^d}(G^d/P^d : L_\lambda) \to \mathscr{A}_{H^d}(G^d/K^d)$$

$$\beta_\lambda : \mathscr{A}_{H^d}(G^d/K^d) \to \mathscr{B}_{H^d}(G^d/P^d : L_\lambda)$$

は $(U(\mathfrak{g}), H^d)$-同型となる．まとめると $\beta\cdot\gamma(\mathscr{A}_K(G/H, \mathscr{M}_\lambda) \cap L^2(G/H))$ は $\mathscr{B}_{H^d}(G^d/P^d : L_\lambda)$ の部分空間を特徴づけ次の定理を得る (文献 [OM])．

定理 3

$\lambda \in (\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^d)_c^*$ は $\mathrm{Re}(\lambda, \alpha) \geq 0,\ \alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^d)^+$ をみたすとする．このとき

(1)

$\mathscr{A}_K(G/H : \mathscr{M}_\lambda) \cap L^2(G/H) \neq 0$ ならば

$$\mathrm{rank}\, G/H = \mathrm{rank}\, K/K\cap H$$

$$\mathrm{Re}(\lambda, \alpha) > 0 \qquad \alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^d)^+$$

を満足．

(2)

$\operatorname{rank} G/H = \operatorname{rank} K/K\cap H, \qquad \mathrm{Re}(\lambda,\alpha) > 0 \qquad \alpha\in\Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{d})^{+}$ ならば

$$\gamma^{-1}\cdot\mathscr{P}_{\lambda} : \bigoplus_{j=1}^{m}\mathscr{B}_{H^d}(G^d/P^d : L_{\lambda}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}_K(G/H:\mathscr{M}_{\lambda})\cap L^2(G/H)$$

を満足。

4 実簡約対称空間上の離散球表現の分類

この節では $\operatorname{rank} G/H = \operatorname{rank} K/K\cap H$ を仮定する．このとき $L^2(G/H)$ に実現される離散球表現が存在するが，次の定理で分類される．

定理 4

(1) $\operatorname{rank} G = \operatorname{rank} K$ のとき G には離散系列表現が存在し次の場合に分かれる．

(1.1) $\operatorname{rank} G = \operatorname{rank} G/H$ のとき G の離散系列表現が $L^2(G/H)$ の離散球表現として現れる．

(1.2) $\operatorname{rank} G > \operatorname{rank} G/H$ のとき G の離散系列表現の一部が $L^2(G/H)$ の離散球表現として現れる．

(2) $\operatorname{rank} G > \operatorname{rank} K$ のとき，G には離散系列表現が存在しないが，$L^2(G/H)$ の離散球表現として現れる G の緩増加表現が存在する．

例

$$(1.1)\text{ の例 } Sp(n,\mathbf{R})/GL(n,\mathbf{R})$$

$$(1.2)\text{ の例 } U(m,n)/U(m-k,n-l)\times U(k,l)$$

$$(2)\text{ の例 } GL(n,\mathbf{C})/GL(n,\mathbf{R}),\quad GL(m+n,\mathbf{R})/GL(m,\mathbf{R})\times GL(n,\mathbf{R})$$

定理の (1) の場合は有限次元表現が寄与するコンパクト対称空間の場合とよく似た結果となっている，しかし (2) の場合はコンパクト対称空間にはなかった現象である．無限次元表現の興味ある内容なので証明の方針を述べる．

$\mathfrak{q}$ のコンパクトカルタン部分空間 $\mathfrak{b}$ をとり，$\mathfrak{b}$ を含むスプリット部分最大の $\mathfrak{g}$ のカルタン部分環を $\mathfrak{j}=\mathfrak{b}+\mathfrak{j}\cap\mathfrak{h}$ とする．$\mathfrak{a}=\mathfrak{j}\cap\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{j}$ のスプリット部分で $A=\exp\mathfrak{a}$ とおく．$L=Z_G(\mathfrak{a})$ とおき G のラグランジュ分解された尖端的放物部分群 $P=MAN$ $(L=MA)$ をとる．M の離散系列表現を σ そして A のユニタリ表現 ξ_{λ} $(\lambda\in i\mathfrak{a}^{*})$ をとり誘導表現

$$\pi_{\sigma,\lambda} = \operatorname*{Ind}_{P\uparrow G}\sigma\otimes\xi_{\lambda}\otimes 1$$

は G の緩増加な主系列表現であるが，$\pi_{\sigma,0}$ が $L^2(G/H)$ の離散球表現として出てくる．

参考文献

[C] E.Cartan, *Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symmetrique clos*, Rend.Circ.Mat.Palermo, **53**,(1929),pp. 217–252.

[FJ] Flensted-Jensen, M.,*Discrete series for semisimple symmetric spaces*, Ann. of Math.,**111**,(1980),pp. 253-311.

[H1] Harish-Chandra, *Discrete series for semisimple Lie groups I*, Acta Math.,**113**, (1965c),pp. 241–318.

[H2] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups I*, J. Funct. Anal., **19**,(1975),pp. 104–204.

[H3] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups II*, Invent. Math., **36**,(1976a),pp. 1–55.

[H4] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on real reductive groups III*, Ann. of Math., **104**,(1976),pp. 117–201.

[K-] M.Kashiwara, A.Kowata, K.Minemura, K.Okamoto, T.Oshima and M.Tanaka, *Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space*, Ann, of Math.,**107**,(1977),pp. 145–200.

[O1] 大島利雄, 半単純対称空間上の調和解析, 数学, (1985),pp. 97–112.

[O2] T.Oshima, *Fourier analysis on semisimple symmetric spaces,Non commutative harmonic analysis and Lie groups(Marseille-Luminy,1980)*, Lecture Notes in Math., **880**,Springer,(1981),pp. 357-369.

[O3] T.Oshima, *Asymptotic behaviour of spherical funcions on semisimple symmetric spaces*, Adv. Studies in Pure Math., **14**,(1988),pp. 357-369.

[OM] T.Oshima, T.Matsuki, *A description of discrete series for semisimple symmetric spaces*, Adv. Studies in Pure Math., **4**,(1984),pp. 331–390.

[OS1] T.Oshima, J.Sekiguchi, *Eigenspaces of invariant differential operators on a semisimple symmetric space*, Inv. Math. **57**,(1980),pp. 1-81.

[OS2] T.Oshima, J.Sekiguchi, *The restricted root system of a semisimple symmetric pair*, Adv. Studies in Pure Math., **4**,(1984),pp. 433-497.

[S1] 佐野　茂, 保型形式の哲学と群上の調和解析 (第１２回数学史シンポジウム), 津田塾大学数学・計算機科学研究所報, **23**,(2002),pp. 100-104.

[S2] S.Sano, Invariant spherical distributions and the Fourier invertion formula on $GL(n,\mathbf{C})/GL(n,\mathbf{R})$ J.Math. Soc. Japan, **36**,(1984),pp. 191-219.

[S3] S.Sano, Distributions sphériques invariantes sur les espaces symétriques semi-simples G_c/G J.Math. of Kyoto Univ., **31**,(1991),pp. 377-417.

[S4] 佐野　茂, フーリエ解析の非可換化への最近９５年簡の歩み, Bull.Polytechnic.Univ. **25-A**,(1996),pp. 115-123.

[Su1] M.Sugiura, *Representaions of compact groups realized by spherical functions on symmetric spaces*, Proc.Japan Acad., **38**,(1962),pp. 111-113.

[Su2] 杉浦光夫, 対称空間論研究史 I, II, 数学セミナー (1983,10),(1983,11).

[W1] N.Wallach, Real Reductive Groups I, Academic Press, Pure and Ppplied Mathematics **132-I**,(1988).

[W2] N.Wallach, Real Reductive Groups II, Academic Press, Pure and Ppplied Mathematics **132-II**,(1992).

[Wy] H.Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher Gruppen Durch linearen Transformationen, I, II, III, Math..Zeits.,**23**,(1925), pp. 271-309, **24**,(1926),pp. 328-395.