Schurの3論文[S51], [S52], [S53]と Weylの論文[W61]について

(いずれも1924年ベルリン学士院年次報告掲載)

平井　武　（京都）

*

Schurは自身の学位論文[S1, 1901]で一般線形群$GL(n, \boldsymbol{C})$と対称群$\mathfrak{S}_m$との互いの表現を関連させながら調べた．しかしそれ以降は，主として有限群について研究してきた．1924年に到って，3つの論文[S51], [S52], [S53]で，群上の積分を使って，連続群（とくに回転群）の表現を調べた．その際には，Weylの論文[W61, 1924]も丁度[S52]と[S53]の間に挟まる形で，同じベルリン学士院年次報告(1924年)に載っている．

これらの仕事の内容とその関連を調べたい．

なお，この[W61]は直後に続く4編の論文[W68, 1925～'26]の速報である．

[S1] I. Schur (= J. Schur), Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen (Inaugural-Dissertation), 1901, Berlin, Reprinted in *Gesammelte Abhandlungen*, Band I, pp.1–71.

[S51] I. Schur, *Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie I. Mitteilung*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1924, 189-208.

[S52] I. Schur, *Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie II. Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch lineare homogene Substitutionen*, ibid., 297-321.

[S53] I. Schur, *Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie III. Vereinfachung des Integralkalküls, Realitätsfragen*, ibid., 346-355.

[W61] H. Weyl, *Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuerlichen Gruppen (Aus einem Schreiben an Herrn I. Schur)*, ibid., 338-345.

[W68] H. Weyl, Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuerlichen Gruppen durch lineare Transformationen, I, II, III und Nachtrag, Mathematische Zeitschrift, **23**(1925), 271-309; **24**(1926), 328-376, 377-395, 789-791.

Contents

1 Hurwitz [Hur, 1897] の Lie 群上の不変積分

A. Hurwitz は論文 [Hur, 1897] で，Lie 群上には不変積分が存在することとその不変式論への応用を論じた．不変積分に関しては，とくに回転群[1] $SO(n)$ および直交群 $O(n)$ に詳しい．$n(n-1)/2$ 次元の多様体である群 $SO(n)$ 全体に Euler 角 の拡張により座標を入れて不変測度を具体的に表示し，群全体の体積を与えた．これを説明する．

n 次元 Euclid 空間の直交座標を $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とする．$1 \leq \alpha < n$ に対し，$(x_\alpha, x_{\alpha+1})$-座標だけを角 φ だけ回す変換を $E_\alpha(\varphi)$ と書く：

$$E_\alpha(\varphi): \quad \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_{\alpha+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_\alpha \\ x'_{\alpha+1} \end{pmatrix}, \quad x_\beta = x'_\beta \ \ (\beta \neq \alpha, \alpha+1).$$

このとき，パラメーターとして，$(\varphi_{r,s})_{0 \leqslant s < r < n}$, すなわち，

$$(1.1) \qquad \varphi_{0,1}\,;\ \varphi_{0,2}, \varphi_{1,2}\,;\ \varphi_{0,3}, \varphi_{1,3}, \varphi_{2,3}\,;\ \cdots\,;\ \varphi_{0,n-1}, \varphi_{1,n-1}, \ldots, \varphi_{n-2,n-1}\,;$$

をとり，直交変換

$$(1.2) \qquad \begin{cases} E_1 &= E_{n-1}(\varphi_{0,1}), \\ E_2 &= E_{n-2}(\varphi_{0,2})\, E_{n-1}(\varphi_{1,2}), \\ E_3 &= E_{n-3}(\varphi_{0,3})\, E_{n-2}(\varphi_{1,3})\, E_{n-1}(\varphi_{2,3}), \\ \cdots &= \ldots\cdots, \\ E_{n-1} &= E_1(\varphi_{0,n-1})\, E_2(\varphi_{1,n-1}) \cdots E_{n-1}(\varphi_{n-2,n-1}), \end{cases}$$

[1] 論文 [Hur] には，回転群を表す記号が導入されていないので，現代的記号 $SO(n)$, $O(n)$ を用いることにする．

を作る．そして次のようにおく：

$$S = E_1 E_2 E_3 \cdots E_{n-1} = \left(r_{\alpha,\beta}\right)_{1\leqslant\alpha,\,\beta\leqslant n}, \tag{1.3}$$

$$0 \le \varphi_{0,s} \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi_{r,s} \le \pi \ \ (r>0). \tag{1.4}$$

主張 1. パラメーターが (1.4) の範囲を動くとき，直交変換 S は群 $SO(n)$ を被覆する．条件 (1.4) で書く不等式の右側の $\le$ を $<$ で置き換えた

(1.5) $0 \le \varphi_{0,s} < 2\pi, \quad 0 \le \varphi_{r,s} < \pi \ \ (r>0)$, 【Schur [S51, §4, p.195] で小修正】

で S が被覆する $SO(n)$ の領域を R と書くと，ここでは一重に被覆されている．

主張 2. $SO(n)$ 上の不変積分に対して，領域 R 上での体積要素は次の通り：

$$dR = 2^{n(n-1)/4} \prod_{0\leqslant r<s<n} (\sin\varphi_{r,s})^r \, d\varphi_{r,s}\,. \tag{1.6}$$

証明の主要部分. (1.5) の範囲における $ds^2 := \sum_{\alpha,\beta} dr_{\alpha,\beta}^{\ 2}$ の計算.
(pp.76–77 に Riemann 計量と体積要素の解説有り)

注. $G = SO(n)$ を多様体と考えてその上の Riemann 計量を

$$ds^2 = \sum_{1\leqslant i.j\leqslant N} g_{ij}(x)\, dx_i\, dx_j, \quad x = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_N),\ N = n(n-1)/2,$$

とすると，これに対応する G 上の体積要素は

$$dv = |\det(g_{ij}(x)|^{1/2} dx_1 dx_2 \cdots dx_N$$

である．“ds^2 が G-不変ならば dv も G-不変である．” 実際，
$h \in G$ による座標変換を $\Phi(h) : x \mapsto x' = \Phi(h,x)$, i.e., $x'_p = \Phi_p(h, \boldsymbol{x})$, $1 \le p \le N$, とすると，

$$dx'_p = \sum\nolimits_q \Phi_{pq}(h,x) dx_q\,, \quad \Phi_{pq}(h,x) := \big(\partial/\partial x_p\big)\Phi_p(h,x),$$

$$\sum_{ij} g_{ij}(x') dx'_i\, dx'_j = \sum\nolimits_{ij} \Big(\sum\nolimits_{pq} g_{pq}\big(\Phi(h)x\big)\Phi_{pi}(h,x)\Phi_{qj}(h,x)\Big) dx_i dx_j$$

故に，Riemann 計量の不変性は，次式で表される：

$$g_{ij}(x) = \sum\nolimits_{pq} g_{pq}\big(\Phi(h)x\big)\Phi_{pi}(h,x)\Phi_{qj}(h,x).$$

とくに，$\Phi_{pq}(h,x) = \Phi_{pq}(h)$ (x に付き定数) のときには，

$$g_{ij}(x) = \sum\nolimits_{pq} g_{pq}\big(\Phi(h)x\big)\Phi_{pi}(h)\Phi_{qj}(h).$$

主張 3. 上の不変積分に対して，$SO(n)$ の全体積 M は，

$$M = \frac{2^{(n-1)(n+4)/4} \cdot \pi^{n(n+1)/4}}{\Gamma(1/2)\Gamma(2/2)\cdots\Gamma(n/2)}\,. \tag{1.7}$$

【Schur [S51, §4, p.196] で 2 の冪を小修正】

2 Schur の学士院での [S51], [S52], [W61], [S53] の紹介文

年代： F. Frobenius (1849/10/26 - 1917/8/3),
I. Schur (1875/1/10 - 1941/1/10),
H. Weyl (1885/11/9 - 1955/12/8)

◆ 有限群の群指標および線形表現に関する最初の 3 論文：

[F53] F. Frobenius, *Über Gruppencharaktere*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1896, pp.985–1021.

[F54] —, *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1896, pp.1343–1382.

[F56] —, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1897, pp.944–1015.

Weyl の 1924 年の論文 [W61] は，I. Schur の同じ「ベルリン学士院年次報告 1924」の論文 [S51], [S52], [S53] “不変式の問題に対する積分計算の新応用, I～III” の I, II を引用し，上記 III の直前に（Schur の紹介によって）掲載されたものである．以下では学士院の議事録による論文紹介の記録をコピーする．

[S51] の（学士院会員）Schur 自身による 1 月 10 日会議における紹介：

> Der von A. Hurwitz angegebene Integralkalkül zur Erzeugung von Invarianten läßt sich im Falle der projektiven Invarinaten durch eienen einfacheren Kalkül ersetzen. Für den Fall der Orthogonalinvarianten liefelt die Hurwitzsche Methode auch eine Lösung des Abzählungsproblems. Dies gelingt, indem man für die Homomorphismen der Gruppe der reellen orthogonalen Substitutionen eine Theorie entwickelt, die weitgehende Analogien mit der Frobeniusschen Theorie der Gruppencharaktere aufweist.

（意訳）A. Hurwitz が与えた，不変多項式生成のための積分計算は，射影不変多項式の場合には，より簡単化された計算に置き換えるべきである．直交変換の場合には，Hurwitz の方法は「数え上げ問題」の解決まで与えてくれる．これは，実直交群の線形表現の理論を展開することによって，Frobenius の群指標理論の広範な類似を与える．

[S52] の Schur 自身による 11 月 13 日会議における紹介：

> Mit Hilfe der vom Verfasser früher entwickelten analytischen Methode werden alle irreduziblen Darstellungen der reellen Drehungsgruppe durch lineare homogene Substitutionen näher bestimmt und die zugehörigen Variabelnanzahlen genau berechnet. Für die Gruppe aller reellen orthogonalen Substitutionen läßt sich auch die Gesamtheit aller einfachen Charakteristiken angeben.

(意訳) 著者が先に与えた解析的方法で，回転群の全ての既約線形表現を詳しく決定し，その次元を精密に決定した．全直交群に対して，すべての単純指標を与えた．

[W61] および [S53] の Schur による 12 月 11 日会議における紹介：

> **[W61] の紹介.** Durch eine Modifikation der von Hrn. Schur im Falle der reellen Drehungsgruppe entwickelten Methode gelingt es dem Verfasser, für alle einfachen und halbeinfachen kontinuierlichen Gruppen das schon von Hrn. E. Cartan behandelte Darstellungsproblem in abgeschlossenerer Form zu lösen.

(直訳) Schur 氏が実回転群の場合に展開した方法の修正を通して，著者は，全ての単純かつ半単純な連続群に対して，すでに E. Cartan 氏が取り扱った表現問題を，より完成した形で解くことに成功した.

> **[S53] の紹介.** Für die reellen Drehungsgruppe wird auf analytischem Wege eine Umgestaltung des Hurwitzschen Integralkalküls gewonnen, die, wie Hr. Weyl durch eine geometrische Betrachtung gezeigt hat, auch bei allen anderen im Betracht kommenden Gruppen durchgeführt werden kann.

(意訳) 実回転群に対して，解析的方法により Hurwitz 氏の積分計算の改良を得た．それは，Weyl 氏が幾何学的観察によって示したように，また他の群にも適用可能である.

3 後日の Haar 測度の論文 [Ha, 1933] より引用

A. Haar [Ha, 1933] の序より：

> 1. Der Ausgangspunkt der Lieschen Theorie der kontinuierlichen Gruppen, die sog. Infinitesimaltransformation, wird bekanntlich mittels eines Differentiationsprozesses gewonnen ; ⋯ (3 行分省略) ⋯ . Dieser Theorie steht eine andere gegenüber, die von Hurwitz in einer berühmten Arbeit[2] angebahnt wurde, welche man treffend als eine Integrationstheorie der kontinuierlichen Gruppen bezeichnet hat; diese Theorie wurde insbesondere im letzten Jahrzehnt durch eine Reihe von wichtigen Arbeiten gefördert, von denen wir hier nur die schönen Arbeiten von Schur und Weyl erwähnen.

(意訳) 連続群の Lie 理論，いわゆる無限小変換，の出発点は，周知のように，微分操作を用いることである．⋯⋯ この理論は，他方で，Hurwitz の有名な仕事を介して「連続群上の積分理論」への道を開いた．この理論はとくに最近十年間に多くの重要な仕事を導いたが，ここでは，美しい Schur と Weyl の仕事に言及するにとどめる．

> (23 行目途中より) ⋯ . Unsere Untersuchungen gelten sogar für noch allgemeinere kontinuierliche Gruppen ; wir werden im wesentlichen nur annehmen, daß die *Gruppenmannigfaltigkeit metrisch, separabel und im Kleinen kompakt ist.*

(意訳) 我々の研究は，さらにより一般の連続群に対して有効である：実際，われわれの仮定は「群多様体が，距離空間で，可分かつ局所コンパクトである」に過ぎない．

> (30 行目途中より) ⋯⋯⋯ . §4 enthält einige Anwendungen, insbesondere den invrianten Integrationsprozeß und die Übertragung derjenigen schönen Säztze, die Peter und Weyl über die Darstellungen der geschlossenen (kompakten) Gruppen bewiesen haben.[3]
>
> (序 終わり)

(意訳) §4 は何個かの応用を与える．とくに不変積分の使用法，および，Peter-Weyl の美しい定理たちを，一般のコンパクト群の表現に対して言い換えること．

解説. 1. Lie 群の理論によって，Lie 群 G 上の微分幾何が整備され，Hurwitz が [Hur, 1897] により，不変積分と G 上の不変微分形式の対応を下敷きとして，

[2] Göttingen Nachrichten, 1897, S. 71-90 (すなわち，文献表の [Ha])

[3] Die vorliegende Arbeit ist (bis auf unwesentliche Abänderungen) die Übersetzung einer der Ungarischen Akademie der Wissenschaften in ihrer Sitzung am 18. April 1932 vorgelegten, in ungarischer Sprache verfaßten Abhandlung. 【この論文は，ハンガリー学士院の 1932 年 4 月 18 日の会議に提出されたハンガリー語の論文の翻訳である】

不変な Riemann 計量から不変測度を作る．例えば，ユニタリ群 $U(n)$ や回転群 $SO(n)$ に座標を入れて不変測度を具体的に書き下した．

2. それを用いて，1924 年に Schur が [S51]〜[S53] で，既約指標の直交性などを使った，$SO(n)$ の既約表現の数え上げを完成させた．その途上に Weyl の半単純 Lie 群に対する一般的な方法の提案があり，それを速報 [W61] として「学士院年次報告 1924」に紹介し，[S53] の直前に入れて発表の便宜を図った．

3. 他方, Peter-Weyl [W73, 1927] では, コンパクト Lie 群 G に対して, Hurwitz の不変測度を用いて（Schur [S51]〜[S53] の方法を踏襲して）G の既約指標の L^2-ノルムを計算し，直交関係を示して，(1) 既約表現の数え上げ，(2) $L^2(G)$ の既約表現への直和分解（Peter-Weyl の定理），を完成させた．

4. 1933 年に Haar が「局所コンパクト群の上には不変測度が存在する」ことを証明した後では，上の Peter-Weyl の定理をコンパクト群一般に拡張することは，形式的な議論だけで済んだ（Haar の論文 [Ha, 1933] の第 4 節参照）．

4 Schur I, [S51, 1924] の内容

序文の内容.

x の多項式 $f(a, x)$ に $s \in G$ が作用したとき，$f(a^s, x)$ を得るとする．

1. $G = GL(n, \boldsymbol{C})$ のときにの（相対）不変式は射影不変という．射影不変式を生成するために Hilbert は Ω-手順 (process) を発明した．Hilbert-Story も別の微分手順を使った．

2. A. Hurwitz はもっと広い群に適用出来る積分手順を発明した．より簡単な場合が，回転群 $\mathfrak{D} := SO(n)$ の場合であり，より複雑な場合がユニタリ群 $\mathfrak{U} = U(n)$ の場合である．ユニタリ群にパラメーターを入れるのは複雑で，従って積分計算も複雑になる．

3. 本論文では，$\mathfrak{U}$ の場合には，複雑な計算を避ける方法を与えた．$\mathfrak{D}$ の場合には，不変式の**数え上げ問題**の解法を与えた．

目次.

§7. 直交不変式に関する数え上げ問題
§8. $n = 2$ および $n = 3$ の場合
§9. 任意の直交変換 【$\mathfrak{D}' = O(n) \supset \mathfrak{D} = SO(n)$】

内容解説：

§4. Hurwitz の積分計算. Hurwits [Hur] の**主張 1**, (1.5) 式の修正.

パラメーター $(\phi_{rs})_{0\leqslant r<s<n}$ の集合 $\mathfrak{F}$ を次の 2 条件で定義する： Hurwitz の $\varphi_{r.s}$ との関係は，$\phi_{rs} = \varphi_{s-r-1.s}$ $(0 \le r < s < n)$,

$$0 \le \phi_{r,r+1} < 2\pi, \quad 0 \le \phi_{rs} < \pi \ \ (s - r > 1), \tag{4.8}$$

$$\phi_{\alpha\beta} = 0 \implies \phi_{0\beta} = \phi_{1\beta} = \ldots = \phi_{\alpha-1,\beta} = 0. \tag{4.9}$$

これは次の多面体の部分集合である：

$$0 \le \phi_{r,r+1} \le 2\pi, \ 0 \le \phi_{rs} \le \pi \ \ (s - r > 1). \tag{S12}$$

回転 s の表示： $s = E_1\, E_2 \cdots E_{n-1}$,

$E_1 = E_{n-1}(\phi_{01}),\ E_2 = E_{n-2}(\phi_{12})E_{n-1}(\phi_{02}),\ E_3 = E_{n-3}(\phi_{23})E_{n-2}(\phi_{13})E_{n-1}(\phi_{03})$, $\cdots\cdots$, $E_{n-1} = E_1(\phi_{n-1,n-1})E_2(\phi_{n-3,n-1}) \cdots E_{n-1}(\phi_{0,n-1})$.

証明. n 次元 Euclid 空間の枠（直交基底）$K := \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ とそれを回転 s^{-1} で回した $K_0 := \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n\}$ をとる. $\boldsymbol{e}'_1$ を E_{n-1} により，$\boldsymbol{e}_1$ に戻して重ねると， $K_0 \overset{E_{n-1}}{\Longrightarrow} K_1 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_n^{(1)}\}$ となる.

その際に，$\boldsymbol{e}'_1$ が始めから，$\{\boldsymbol{e}_{n-\alpha+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}^\perp$ に入っていれば，$\phi_{0,n-1} = \phi_{1,n-1} = \ldots = \phi_{\alpha-1.n-1} = 0$ でよい.

次は，E_{n-2} により，$n-1$ 次元の直交空間 $\{\boldsymbol{e}_1\}^\perp$ で $\boldsymbol{e}_2^{(1)} \Rightarrow \boldsymbol{e}_2$ とする. 以下同じ様にする. □

Schur の主張 S1. *Jedem Punkt von $\mathfrak{F}$ entspricht eine Drehung und umgekehrt.*

Schur の主張 S3. ([Hur] の**主張 3** の修正) $SO(n)$ の全体積 $h_n = \int ds$ は，因子 $2^{n(n-1)/4}$ を除いて（Hurwitz から 2 の冪を修正して），

$$h_{2\nu} = \frac{2^{\nu^2+\nu-1} \cdot \pi^{\nu^2}}{2!\,4! \cdots (2\nu-2)!}, \tag{4.10}$$

$$h_{2\nu+1} = \frac{2^{\nu^2+3\nu} \cdot \pi^{\nu^2+\nu} \cdot \nu!}{2!\,4! \cdots (2\nu)!}. \tag{4.11}$$

(S15) （不変積分を表す式） $\displaystyle\int f(st)\, ds = \int f(s)\, ds \quad (t \in \mathfrak{D})$

§5. $\mathfrak{D}$ の線形表現の性質. 線形表現を H, H_1 等と書く. 不変積分を用いて次の性質を示した. その方法は Pontrjagin 著「連続群の表現論」の本にも採用されている現代の方法と全く変わらない（Schur はすごい).

I. $H \cong H_1 \Leftrightarrow \chi_H = \chi_{H_1}$

II. $\mathfrak{D}$ の任意の線形表現 H は完全可約.

III. $\mathfrak{D}$ の任意の線形表現 H はある正定値 Hermite 形式を不変にする.（すなわち，ユニタリ化可能である.）

§6. $\mathfrak{D}$ の指標の性質. ここでは回転群 $\mathfrak{D} = SO(n)$ の既約指標の（L^2-ノルムの計算を含む）直交関係式を与えている．後日 Haar により与えられた不変測度（Haar 測度）を使えば，証明も込めて一般のコンパクト群にそのまま適用出来る．具体的に言えば，以下のように不変積分を使う：U を H の空間から H_1 の空間への線型作用素とし，

$$V = \int H_1(s)^{-1} U H(s)\, ds \quad \text{とおくと，積分の不変性を使って，}$$

任意の $t \in \mathfrak{D}$ に対して，$H_1(t)^{-1} V H(t) = V$, すなわち，$V H(t) = H_1(t) V$. これは，V が H と H_1 との相関作用素（intertwining operator）であることを意味する．従って，$H_1 = H$, または，$H_1 \not\cong H$, に従って，$V = cI$ ($I =$ 恒等作用素) または $V = O$. そして，$c = \mathrm{tr}(U)/\dim H$.

これをもうすこし詳しく言うと，まず不変測度 ds を $\int_{\mathfrak{D}} ds = 1$ と正規化し，表現 H, H_1 をユニタリ表現にする（§5, III による）．そして，表現空間に正規直交基底をとり，表現行列を $H(t) = (h_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant \dim H}$, $H_1(t) = (h^1_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant \dim H_1}$, とする．$U = E_{pq} := \big(\delta_{ip}\delta_{qj}\big)_{i,j}$ ととると，$H_1(s)^{-1} = H_1(s)^* = \big(\overline{h^1_{ji}(s)}\big)$ であるから，

$$H_1(s)^{-1} U H(s) = \big(\overline{h^1_{pi}(s)} h_{qj}(s)\big)_{i,j}.$$

よって，$H_1 \not\cong H$ のときには，$L^2(G) = L^2(G; ds)$ において，

$$h_{qj} \perp h^1_{pi}\ (\text{直交})\quad (\forall q, j, p, i), \quad \text{従って，} \chi_H \perp \chi_{H_1}. \tag{4.12}$$

$H_1 = H$ のときには，$\mathrm{tr}(U) = \mathrm{tr}(E_{pq}) = \delta_{pq}$，$\chi_H(s) = \sum_i h_{ii}(s)$, なので，

$$\begin{cases} h_{pi} \perp h_{qj}, & (p,i) \neq (q,j) \text{ のとき，} \\ \|h_{pi}\|^2 = \dfrac{1}{\dim H}, & \|\chi_H\|^2 = 1, \end{cases} \tag{4.13}$$

ここに，$\|\cdot\|$ は $L^2(G)$ におけるノルムを表す．

§7. 表現のテンソル積とその中の既約表現の重複度について論じ，重複度を指標の積の積分で表している．

§8. $n = 2, 3$ の場合だが，とくに後者において，三角関数のいろいろな積分が現れている．（実は，既約表現の行列要素には Legendre の多項式が現れているはずなので，陰（いん）にそれが出ているのかも知れない．）

§9. $\mathfrak{D}' = O(n)$ の既約表現・既約指標と $\mathfrak{D} = SO(n)$ のそれらとの関係を論じている．そして「Hurwitz の積分法の有効性は他の群についても成り立つ」と述べている．

5 Schur II, [S52, 1924] の内容

[S52] 序文の内容.

1. $\mathfrak{D} = SO(n)$, $\mathfrak{D}' = O(n)$ の既約表現の分類．$\nu := [n/2]$ とおくと，$\mathfrak{D}'$ の双対は

$$\alpha = (\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant\nu}, \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_\nu \geq 0, \ (\alpha_i \text{ 整数})$$

によって，径数付けされる．

【平井注．これは E. Cartan の最高ウェイトに直接的に関連付けられる．】

2. 次元公式を，パラメーター α を用いて具体的に書き下した．

3. $\mathfrak{D}' = O(n)$ の既約指標公式，を示した．

n 奇数のときには，これで $\mathfrak{D} = SO(n)$ の既約指標も分かる．

n 偶数のときには，$\mathfrak{D}'$ の既約表現 Π が zweiseitige なとき，すなわち，$\Pi \not\cong s(\Pi)$ $(s \in \mathfrak{D}' \setminus \mathfrak{D})$ のときには，$\Pi|_{\mathfrak{D}} \cong \Pi_1 \oplus \Pi_2$, $\Pi_2 \cong s(\Pi_1)$, $\not\cong \Pi_1$, となるので，$\chi_\Pi|_{\mathfrak{D}} = \chi_{\Pi_1} + \chi_{\Pi_2}$ と分解せねばならぬ．具体的な分解まではまだ分かっていない．

序文 pp.297–299 の中の Hr. É. Cartan に付随した脚注は，Schur と Weyl との間のやり取りを述べていて，その意味でとても重要なので引用しておく．

p.299. 脚注 [1]（先ず，É. Cartan の論文 [Car1, 1913], [Car2, 1914] を引用したあと）
— Den Hinweis auf dieses Arbeiten verdanke ich Hrn. H. Weyl. Hr. Weyl hat mir auch in freundlicher Weise den Entwurf einer für die Göttingen Nachrichten bestimmten Note übersandt, in der er einen Teil der Cartanschen Untersuchungen wesentlich weiter führt und insbesondere auch eine neue Methode zur Lösung des Darstellungsproblems für die Drehungsgruppe auseinandersetzt. [Zusatz bei der Korrektur. Neuerdings ist es Hrn. Weyl gelungen, meine Ergebnisse auf kürzerem Wege abzuleiten und Entsprechendes auch bei anderen Gruppentypen zu erzielen.]

（意訳）— É. Cartan 氏のこれらの仕事について，私に示唆してくれた H. Weyl 氏に感謝する．Weyl 氏はまた親切に Göttingen Nachrichten に載せるための彼の草稿を送ってくれた．そこには，Cartan の研究の一部を超えるものがあり，また，回転群の表現の問題を解く新しい方法を述べている．（以下省略）

目次と内容（一部）

序. （内容は上に記述）

§1. 一般的な前置き

§2. $n=2$ と $n=3$ の場合

§3. 一つの補助的観察

§4. 全直交群 $\mathfrak{D}'$ の単純指標

Satz IV で，$\mathfrak{D}'=O(n)$ のパラメーター $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_\nu \geq 0$ $(\nu = [n/2])$ を持つ既約表現の指標 $\chi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu}$ を行列式の形で与えている.

§5. Satz IV の証明の続きと終結

§6. Satz IV からの演繹

$\mathfrak{D}'=O(n)$ と $\mathfrak{D}=SO(n)$ の既約表現の関係について，Satz VI, VII, VIII, IX, X, が与えられている.

6 Weyl の速報 [W61, 1924] の内容

文頭からの項目 **1.** の途中までを引用する：

1. Es ist mir gelungen, durch eine Modifikation Ihrer Methode [1], das Darstellungsproblem für alle enfachen (und halb-einfachen) Gruppen zu lösen, einschließlich der Berechnung der Charakteristiken. Besonders wichtig sind natürlich: die Gruppe $\mathfrak{G}$ aller homogenen linearen Transformationen von der Determinante 1, die Gruppe $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ derjenigen unter ihnen, welche eine nicht ausgeartete schiefsymmetrische bzw. symmetrische Bilinearform, $[x\,x']$ oder $(x\,x')$, invariant lassen. Geht man mit Lie auf die infinitesimalen Gruppen $\mathfrak{g}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ zurück, so bringt das freilich für die " integrale " Fragestellung gewisse Differenzierbarkeitsvoraussetz-ungen mit sich; es ist aber betonen, daß so ein rein a l g e b r a i s c h e s Problem hervorgeht, das seine große selbstänige Bedeutung hat. Die integrale Methode ersetzt nach dem Kunstgriff von Hurwitz [2] die komplexen Gruppen $\mathfrak{G}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ zunächst durch die in ihnen enthaltenen Gruppen $\mathfrak{G}_u, \mathfrak{C}_u, \mathfrak{D}_u$ unitärer Transformationen. Für $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ werden dabei die Formen $[x\,x'], (x\,x)$ in der Gestalt zugrunde gelegt:

$$[x\,x'] = (x_1y_1' - y_1x_1') + \cdots + (x_hy_h' - y_hx_h') \quad \text{[Dimensionszahl } n = 2h],$$
$$(x\,x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \quad \text{[Dimensionszahl} = n].$$

Dann kommt man, wie Sie im Falle der reellen Drehungsgruppe $\mathfrak{D}_u$ gezeigt haben, mit der Stetigkeit allein aus. Jede der irreduziblen

Darstellungen von $\mathfrak{G}_u, \mathfrak{C}_u, \mathfrak{D}_u$ liefelt ohne weiteres eine solche für $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$. ······ (後略) 【平井注. 第1式はすこし変だが, 原文通り】

(脚注) [1] Hr. SCHUR war so freundlich, mich schon vor ihrer Publication in den Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. von Hauptresultaten seiner Untersuchung über die Drehungsgruppe in Kenntnis zu setzen: vgl. jetzt a. a. O. 1924, p. 297–321 und 346–355. 【注. 論文 [S51], [S52]】

[2] Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration, Göttingen Nachrichten 1897, p.71. 【注. 論文 [Hur]】

(意訳) Schur の方法[1] を改変することによって, 私は全ての単純（かつ半単純な）群に対して「表現問題」を, 指標の計算を込めて, 解くことが出来た. とくに重要なのは, 当然ながら, 行列式1の線形変換の群 $\mathfrak{G}$, その部分群 $\mathfrak{C}$ と $\mathfrak{D}$ で, これらは非退化な斜対称または対称な双一次形式 $[xx']$ または (xx') を不変にするもののなす群である. Lie 理論の「無限小群」$\mathfrak{g}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ に移ると, 積分的問題設定では微分可能性の前提が勿論出てくる. しかしながら, 純粋に代数的な問題が現れてそれはそれなりに独立の意義を持つ. Hurwitz[2] の技巧に従って積分的手法を使うと, まず, 複素群 $\mathfrak{G}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ はそれらに含まれるユニタリ変換の群 $\mathfrak{G}_u, \mathfrak{C}_u, \mathfrak{D}_u$ で置き換えられる. $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ については, 次の双一次形式の形を基礎とする：

$$[x\,y] = (x_1y_{h+1} - y_1x_{h+1}) + \cdots + (x_hy_{2h} - y_hx_{2h}) \quad [\text{Dimensionszahl } n = 2h],$$
$$(x\,x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \quad [\text{Dimensionszahl} = n].$$

そうすると, 実回転群 $\mathfrak{D}_u$ の場合に示されたように, 連続性だけが問題となる. $\mathfrak{G}_u, \mathfrak{C}_u, \mathfrak{D}_u$ の各既約表現はそれぞれ容易に $\mathfrak{G}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ の既約表現を与える.

(脚注) [1] Schur 氏はとても私に好意的で, Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften に印刷する前に, 彼の回転群に関する研究の主要結果を私に知らせてくれた. それらは既掲載の 1924, p.297–321 と p.346–355 である. 【注. 論文 [S51], [S52] のこと】

項目 1. の解説. 複素古典群と呼ばれる $\mathfrak{G} = SL(n, \boldsymbol{C})$, $\mathfrak{C} = Sp(2h, \boldsymbol{C})$, $\mathfrak{D} = SO(n, \boldsymbol{C})$ とそのコンパクト実型である $\mathfrak{G}_u = SU(n)$, $\mathfrak{C}_u = SpU(2h)$, $\mathfrak{D}_u = SO(n)$ に対して, いわゆる「Weyl の unitarian trick」を述べている. すなわち, 複素古典群の既約表現・既約指標を決定するのには, コンパクト実型のそれらを決定すればよい, という原理である.

この際には, 単純かつ半単純な複素群 G として単連結なものをとるのが一番一般的であり, それが丁度 É. Cartan の単純かつ半単純な Lie 環の表現論

[Car1] に対応する．単連結なコンパクト実型の表現論は Cartan の [Car2] がカヴァーする．

G の単連結性はそのコンパクト実型 G_u が単連結であることに対応する．$SU(n)$ $(n \geq 2)$, $SpU(2h)$ $(h \geq 1)$ は単連結であるが，$SO(n)$ $(n \geq 2)$ の普遍被覆群は 2 重被覆 $\mathrm{Spin}(n)$ である．

本項目 **1.** では，É. Cartan のほかには，A. Young (1901, 1902), F. Frobenius ([F68, 1903], [F60, 1900]) の仕事が引用されている．

項目 2 の解説. Hurwitz は $G = SO(n)$ 上の G-不変 Riemann 計量の具体的表示から G 上の不変測度 dg $(g \in G)$ の表示 (1.6) を得た．G 上の関数 $f(g)$ が G-不変であるとき，f は G の共役類の上の関数（類関数）となるが，f の積分 $\int f(g)dg$ を，共役類空間の座標を使って表示する公式を Hurwitz の結果から導くのは容易ではない．ところが，表現の指標は G 上の不変函数なので，後者の形の公式は必須となってくる．Weyl は（Schur がいうところの）幾何学的方法で，Hurwitz の公式を経ないで，直接次の積分公式を証明した（記述を簡潔にするために現代用語を使わせて頂く）．

G を項目 1. でのコンパクト Lie 群 $SU(n)$, $SpU(n)$ $(n = 2h)$, $SO(n)$ のうちの一つとする．H を G の Cartan 部分群（＝極大可換部分群）の 1 つとすると，G の任意の元 g はどれかの $h \in H$ と G-共役になる．従って，G 上の不変函数 f はその H 上の値で決まる．そして $\varphi := f|_H$ とおくと，f の G-不変性は φ の Weyl 群不変性に写る．(G, H) の **Weyl 群**とは，$W := N_G(H)/Z_G(H)$, ここに，

$$N_G(H) := \{g \in G\,;\, ghg^{-1} \in H \ (\forall h \in H)\},$$
$$Z_G(H) := \{g \in G\,;\, ghg^{-1} = h \ (\forall h \in H)\},$$

はそれぞれ H の G における正規化群，中心化群である：

$$\int f(g)dg = \frac{c}{|W|}\int f(h)|\Delta(h)|^2 dh \qquad (c = \text{定数}), \tag{6.14}$$

ここに，$\Delta(h)$ は，いわゆる **Weyl の分母**であって，指標の分数形表示で分母として現れる．$\Delta(h)$ の (G, H) のルート系を使った具体的表示が与えられている．

項目 3 の解説. Cartan の Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ の既約表現の結果から，既約表現はいわゆる最高ウェイトから決まる．上の積分公式 (6.14) を使って，最高ウェイトを用いて既約表現の次元公式を表示した．

項目 4 の解説. 既約指標を H 上に制限したものを χ とすると，

(1) χ は Weyl 群不変.

(2) $\chi(h)$ は H の（可換群としての）指標の非負整係数の一次結合である．

さらに，$\int_G dg = 1$ と正規化したときの (6.14) を使うと，

$$\int_H |\chi(h)\Delta(h)|^2 dh = \frac{|W|}{c}. \tag{3}$$

これら (1), (2), (3) の性質を使って，既約指標の具体的表示を与えた．

[W61] 全体への注． この速報に述べられた結果は証明を付けて「4 編の論文 [W68, 1925-1926] に発表された．Weyl はこれを自分の業績の内でも優れたものと自己評価している．

また，単純かつ半単純な複素群 G が例外群の場合にも unitarian trick 等々により同様の結果を得ることを主張している．その際には，Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ 上の Killing 形式がコンパクト実型 $\mathfrak{g}_u$ 上で正定値なことを引用しているのだが，これは随伴群 $G_u^* = G_u/Z$ (Z は G_u の中心) のコンパクト性を保証するが，「$Z \cong \pi_1(G_u^*)$ の有限性」が保証されなければ，$G_u := \exp(\mathfrak{g}_u)$ のコンパクト性は保証されない．この点は「Weyl の理論」の欠落部分として残っていた．

7 Schur III, [S53, 1924] の内容

目次と内容（一部）．

序． 序文第 1 段落を引用する：

> Die wichtigen und weittragenden Ergebnisse, zu denen Hr. Weyl in der vorstehenden Arbeit gelangt ist, geben uns auch in dem von mir behandelten Fall der reellen Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$ und ihrer Erweiterung, der Gruppe $\mathfrak{D}'$, die Möglichkeit, die Theorie der Homomorphismen einfacher aufzubauen, als dies in A. II geschehen ist. Während ich mich genötigt sah, für $n > 3$ von einem Spezialfall des STUDYschen Satzes über Orthogonalinvarianten Gebrauch zu machen, kann man jetzt den allgemeinen Fall in derselben Weise rein analytisch behandeln wie für $n = 2$ und $n = 3$. 【平井注. A. II = [S52]】

（意訳）Weyl 氏が前掲の論文で到達した，重要かつ広範な影響力のある結果は，私が論文 A.II で取り扱った実回転群 $\mathfrak{D}$ や全直交群 $\mathfrak{D}'$ の表現の理論をより簡単に成就させる可能性を与える．私は，Study が $n > 3$ の特別の場合に与えた直交不変多項式の命題たちの使用を迫られていたのだが，いまや一般の場合を，純粋に解析的に，$n = 2$ や $n = 3$ の場合と同様に取り扱い得る．

§1. いくつかの補助的公式

下に掲げる有名な Cartan の行列公式を用いて補助的公式を与えた：

$$(7.4)\qquad \left|\frac{1}{1-x_\kappa y_\lambda}\right| = \frac{\Delta(x)\Delta(y)}{\prod_{\kappa,\lambda}(1-x_\kappa y_\lambda)}. \qquad (\kappa,\lambda = 1,2,\cdots,\nu)$$

ここに，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ として，$\Delta(x) = \prod_{\kappa<\lambda}(x_\kappa - x_\lambda)$.

§2. 単純化された積分計算

$\mathfrak{D} = SO(n)$ 上の内部自己同型で不変な関数，すなわち，共役類上の関数（類関数）に対する積分公式を与えた.

§3. 直交変換不変多項式の数え上げ計算

§4. 回転群 $\mathfrak{D} = SO(n)$ の実表現

ある群 $\mathfrak{H}$ の線形表現の研究において，その指標を $\chi(s)$ $(s \in \mathfrak{H})$ とするとき，次の 3 つの場合を分けて考慮するべきである：

第 1 種. その線形表現は実行列によって実現される： $\chi(s) \in \boldsymbol{R}$ $(\forall s \in \mathfrak{H})$.

第 2 種. 第 1 種ではないが， $\chi(s) \in \boldsymbol{R}$ $(\forall s \in \mathfrak{H})$.

第 3 種. $\chi(s) \in \boldsymbol{R}$ $(\forall s \in \mathfrak{H})$ ではない，すなわち， $\chi(\mathfrak{H}) \not\subset \boldsymbol{R}$.

Frobenius との共著 [F75, 1906] 序文の p.186 によれば，

> Eine irreduzible Darstellung einer *endlichen* Gruppe $\mathfrak{H}$ ist durch ihren Charakter χ vollständig definiert. Die Kentnis von χ reicht aber, wie wir zeigen werden, auch aus, um die *Art* der entsprechenden Darstell-ung zu bestimmen. Setzt man nämlich $c = +1, -1$, oder 0, je nach dem die Darstellung zu der ersten, zweiten oder dritten Art gehört, so ist
>
> $$\sum_R \chi(R^2) = ch,$$
>
> wo sich die Summe über die h Elemente R der Gruppe $\mathfrak{H}$ erstreckt.

(意訳) **有限群** $\mathfrak{H}$ の既約表現はその指標 χ によって完全に決まる．χ を知れば，その表現が第何種であるかを決めるには十分である．すなわち，$c = +1, -1$, または 0 とすれば，表現が第 1 種，第 2 種または第 3 種であるに従って，

$$\sum_{R\in\mathfrak{H}} \chi(R^2) = ch \quad (h = |\mathfrak{H}|).$$

これと同様の命題が $\mathfrak{D} = SO(n)$ に対しても成り立つことが [S51] の結果を使って示され，Satz III (p.353) として掲げられている：

III. *Ist* $\mathfrak{H}$ *eine irreduzible Gruppe linearer homogener Substitutionen, die der Gruppe* $\mathfrak{D}$ *homomorph ist, und bedeutet* $\chi(s)$ *die zugehörige (einfache) Charakteristik von* $\mathfrak{D}$*, so wird*

$$\frac{1}{h}\int \chi(s^2)ds = 1, -1, \text{oder } \ 0,$$

je nachdem $\mathfrak{H}$ *eine Gruppe erster, zweiter order dritter Art ist.*

【平井注】ここに $h = \int_{\mathfrak{D}} ds$ は $\mathfrak{D}$ の（ds に関する）volume.

$\mathfrak{D}$ の線形表現 Π をとると，$\mathfrak{H} := \Pi(\mathfrak{D}) = \{\Pi(s)\,;\ s \in \mathfrak{D}\}$ とする，すなわち，$\mathfrak{H}$ は Π による $\mathfrak{D}$ の像である．その指標を $\chi(s)$ $(s \in \mathfrak{D})$ とする．

8 参考文献

Schur 全集での論文番号 4 は [S4], Weyl 全集での論文番号 61 は [W61] と記す.

[Car1] É. Cartan, Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Bull. Soc. Math. France, **41**(1913), 53–96.

[Car2] É. Cartan, Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, J. Math. Pures Appl., (6) **10**(1914), 149–186.

[F60] F. Frobenius, Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1900, 516–534.

[F68] F. Frobenius, Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1903, 328–358.

●● 群上の不変測度，不変積分について（本原稿 §1, §3 への参考文献 3 編）：

[Ha] A. Haar, Der Massbegriff in der Theorie der kontinuerlichen Gruppen, Ann. of Math., **34** (1933), 147–169.

[平井] A. Weil 著，齋藤正彦訳「位相群上の積分とその応用」，（平井武）解説，pp.246–275, ちくま学芸文庫，2015.

[Hur] A. Hurwitz, Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration, Nach-richten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse 1897, pp.71-90.

[S1] I. Schur, Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen (Inaugural-Dissertation), 1901, Berlin, Reprinted in *Gesammelte Abhandlungen*, Band I, pp.1–71.

[S4]=[Sch1] J. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. für die reine und angewante Mathematik, **127** (1904), 20–50. 【有限群のスピン表現（=射影表現）の一般論】

[S7] I. Schur, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharactere, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1905, pp.406–432. **【§2 に Schur の補題 あり】**

[S9] I. Schur, Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen lineare Substitutionen, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1906, pp.164–184. **【Schur index の研究】**

(共著) [F75] F. Frobenius and I. Schur, Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der

Wissenschaften zu Berlin 1906, pp.186–208.

[S10]=[Sch2] J. Schur, Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. für die reine und angewante Mathematik, **132** (1907), 85-137. 【有限群の被覆群，とくに表現群について】

[S16]=[Sch3] J. Schur, Über Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. für die reine und angewante Mathematik, **139** (1911), 155-255. 【対称群 $\mathfrak{S}_n$ $(n \geq 4)$, 交代群 $\mathfrak{A}_n$ の表現群を与え，スピン既約表現の完全系を構成し，既約スピン指標を具体的に求めた.】

（注： [S4], [S10], [S16] は射影表現三部作である）

[S51] I. Schur, *Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie I. Mitteilung*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1924, Phisikalisch-Marhematische Klasse, 189-208.

[S52] I. Schur, *Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie II. Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch lineare homogene Substitutionen*, ibid., 297-321.

[S53] I. Schur, *Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie III. Vereinfachung des Integralkalküls. Realitätsfragen*, ibid., 346-355.

[W61] H. Weyl, *Zur Theorie de Darstellung der einfachen kontinuerlichen Gruppen (Aus einem Schreiben an Herrn I. Schur),* ibid., 338-345.

[W68] H. Weyl, Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuerlichen Gruppen durch lineare Transformationen, I, II, III und Nachtrag, Mathematische Zeitschrift, **23**(1925), 271-309; **24**(1926), 328-376, 377-395, 789-791.

[W73] F. Peter und H. Weyl, Die vollstšandichkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenene kontinuerlichen Gruppe (mit F. Peter), *Mathematische Annalen*, **97** (1927), 737-755.