Quelque problèms fameux enfin résolus... et les autres *

堀 井 政 信 † ‡

1 はじめに

Les Polytechniciens dans le siècle 1894-1994 [1]（以下，*1894-1994*）を読み進めています．"Cent ans de mathématiques（数学の100年）"(2015.10.10) [2] では，"Un essor sans précédent dans l'histoire de l'humanité（人類の歴史における前代未聞の大発展）"から"Des champs nouveaux ou profondément renouvelés（新しい，根本的に新しくされた分野）"について述べました．

1894-1994 が対象とする期間に，いくつかの有名な未解決問題が解かれました．本報告では，" Quelque problèms fameux enfin résolus⋯
et les autres（ついに解かれた有名な問題⋯とそれ以外）"(Jean-Pierre Bourguignon 氏）について述べます．

2 ついに解かれた有名な問題

Appell と Haken が《四色定理》を証明しました．この定理は地図の隣り合う2国が同じ色にならないように色分けするためには4色で十分である

---

*津田塾大学 数学・計算機科学研究所第27回数学史シンポジウム，2016.10.8

†e-mail : masa.horii@nifty.com，キーワード：未解決問題，四色定理，三体問題，フェルマーの定理，École polytechnique，*Les Polytechniciens dans le siècle 1894-1994*.

‡メールマガジン 高校教員が始めた数学史 http://archive.mag2.com/0000125834/，ウェブサイト 高校教員が始めた数学史 http://nifty3.my.coocan.jp/mathhis.htm

ことを明確にしました．証明は有限数の特性を確かめることにありました．数がとても大きく，強力なコンピュータを利用する必要がありました．

フェルマーの定理は1637年に作成され，方程式$x^n+y^n=z^n$が$n \geqq 3$の場合，x, y, zは0でない自然数の解を持たないことを明確にしました．Andrew Wilesが証明を発表しました（*1894-1994* 原稿執筆時点）．[1]

3 四色定理

3.1 歴史

四色定理の歴史について述べます.『数学を変えた14の偉大な問題』[3]に寄ります.

1852年，南アフリカの若い数学者で植物学者でもあり，法学の学位を取るために勉強していたフランシス・ガスリーが，イングランドの地図に描かれている各州を色分けしようとしていました．境界線がはっきり見えるように，隣り合う州はすべて違う色にしたかった．そして，そのように色分けするには4色しか必要でないことに気づき，ちょっと実験したところ，どんな地図でもそれが成り立ちそうだと確信しました．

ガスリーは，この言明は数学の定理として知られているだろうかと考え，ロンドンのユニヴァーシティカレッジでオーガスタス・ド・モルガンのもとで数学を学んでいた弟フレデリックに尋ねました．ド・モルガンはその答えを知らなかったため，さらに著名な数学者であるアイルランド人のウィリアム・ローワン・ハミルトン卿に手紙を書きました．ハミルトンの返事はぶっきらぼうで，何の役にも立ちませんでした．

証明を見つけられなかったド・モルガンは，誰かよいアイデアを思いつかないかと，知人の数学者たちにこの問題のことを話しました．1860年代後半，アメリカ人論理学者で数学者でも哲学者でもあるチャールズ・サンダース・パースが，四色問題と，それに加えて，さらに複雑な曲面上に描かれた地図に関する同様の問題を解いたと主張しました．しかしその証明は発表されませんでした．

しばらくのあいだ四色問題は跡形もなく姿を消したように思われましたが，1878年，アーサー・ケイリーがロンドン数学会の会合で言及したことによって再び浮上しました．ケイリーは，誰か四色問題の答えを導いている人

がいないかと尋ねました．その問いかけはすぐに，科学雑誌「ネイチャー」にも掲載されました．1年後にケイリーはさらに詳細な論文を書き，「王立地理学会会報」に掲載してもらいました．

3.2 最小犯人

ケイリーの論文の論証の道筋を「数学的帰納法による証明」といいます．ケイリーが提唱した証明戦略をさらに見通しがよいものにするには，この方法を，最小犯人と呼ばれる論理的に同等な概念を使って定式化し直せばいい．この場合の犯人とは，4色で塗り分けられない仮想上の地図のことです．最小とは，それよりも国の数が少ない地図はすべて4色で塗り分けられるという意味．もし最小犯人が存在しなければ，四色定理は真であるはずです．[3]

3.3 ケンプとヒーウッド

ケイリーが四色定理について言及した会合の場に，アルフレッド・ケンプという名の法廷弁護士がいました．ケンプはかってケンブリッジ大学でケイリーのもと数学を学んでおり，1年もせずに，この問題を攻略したと確信し，1879年にその答えを，創刊されたばかりの「アメリカ数学誌」で発表しました．さらに1年後には，いくつかの間違いを訂正して単純化した証明を発表しました．

ここで，ダーハム大学の数学講師パーシー・ヒーウッドが登場します．ヒーウッドはかってオックスフォード大学の学部生のとき，幾何学の教授ヘンリー・スミスから四色定理のことを知りました．四色定理はおそらく正しいだろうがまだ証明されていないと聞かされ，挑戦してみることにしました．そしてその経緯でケンプの論文に行き当たり，内容を理解しようとしました．その顛末を1889年に「地図の色塗りの定理」として発表し，その中で，本論文の目的は「現在明らかに認められている証明に欠陥があることを示すことにある」と述べています．ケンプは間違いを犯していました．[3]

3.4　野心的な戦略

数々の失敗のなかから，ある野心的な戦略が浮上してきました．ケンプとヒーウッドの手法を拡張したもので，3つの部分に分けられます．

1．最小犯人を考える．

2．不可避配置のリストを見つける．不可避配置のリストとは，すべての最小犯人がそのなかのいずれかの配置を含んでいなければならない，より小さなネットワークのリストのことである．

3．それらの不可避配置がすべて可約であることを証明する．つまり，不可避配置を消去して得られる小さいネットワークが4色で塗り分けられれば，それらの色を配置しなおして，不可避配置をもとに戻したときに，その小さいネットワークの4色での塗り分け方をネットワーク全体に拡張できることを証明する．

これらの3つのステップを組み合わせれば，最小犯人が存在しないことを証明できます．[3]

3.5　放電

こうしてしばらくのあいだ，城のところどころが時折少しずつ剥がれ落ちはしたものの，それによって砦の堅牢さが微塵も変わることがありませんでした．一方，主流の数学界は，気づいていながらその様子を退屈そうに眺めていました．しかし，ハインリッヒ・ヘーシュが配置が可約であることを証明する体系的な方法（「放電」）を見つけました．

この方法を使ってもなお，手計算で可約配置の不可避リストを見つけるのは，気の遠くなるような作業になります．1つ1つの配置はきっとかなり小さいだろうが，それが大量にあるに違いない．ヘーシュはあきらめずに作業を続け，1948年に一連の講演で，およそ1万通りの配置が必要だろうと語りました．そしてその時点ですでに，500通りの候補が可約であることを証明していました．[3]

3.6 ハーケンとアッペル

ヘーシュの講演の聴衆のなかにヴォルフガング・ハーケンという名の若者がいました．ハーケンはコンピュータが手助けになるのではないかと考えました．まず，コンピュータによって数多くの可約配置を生成して，不可避リストを集めようとしました．次に発想を転換し，先に不可避性を考えて，そのあとで可約性をチェックしようと考えました．しかし，何人かの専門家に，ハーケンが使いたがっている方法をコンピュータプログラムにするのは無理だと言われてしまいました．ハーケンはその言葉を信じ，ある講演のなかで，四色問題はコンピュータを使わないと解決できないが，現段階ではコンピュータを使っても解けないように思われると語りました．

すると，講演を聞いていた腕利きのプログラマー，ケネス・アッペルが，その自称専門家たちは，プログラムを組むのにかなりの作業が必要だし，結果もまったく見通しが利かないから，単にあきらめさせようとしていただけなのだろうと言ってきました．アッペルは，プログラムできない数学問題など存在しないと考えていました．重要なのは適切な時間内でそのプログラムが答えを出せるかどうかでした．2人は手を組みました．放電法を改良することでプログラムに手を加え，プログラムに手を加えることで放電法を改良するという形で，戦略を進化させていきました．

変更を重ねてきたアッペルとハーケンの不可避配置のリストは2000個ほどで落ち着きを見せました．1976年6月，コンピュータが最後の可約性のチェックを終え，証明は完成しました．この話はマスコミに採り上げられ，「タイムズ」紙を皮切りにあっという間に世界中に広がっていきました．

最終的な証明は，計1000時間にわたってコンピュータを走らせることで得られ，そこには487の放電規則が含まれていました．結果は，2篇の論文と，1482通りの配置をすべて記した450ページの付録として出版されました．当時としてはまさに力業でした．しかし数学界全体からは，何となく期待外れという反応が返ってきました． [3]

4　三体問題

4.1　天体力学の新しい方法

1889年に，論文“三体問題と力学方程式”に対して，スウェーデンとノルウェーの国王Oscar IIよりHenri Poincaréに賞が与えられました．Poincaréは『天体力学の新しい方法』3巻（1892年・1893年・1899年）を出版し，最近再版されました（*1894-1994* 原稿執筆時点）．ポアンカレは三体問題の《非可積分》を証明しました．そのことにより19世紀の力学者の基本的概念が根本的に破砕しました．[1]

4.2　3つの物体の重力相互作用

ニュートンの重力の逆2乗則に従うと仮定したわずか3つの物体の重力相互作用にさえ，数学界は何世紀にもわたって手を焼いてきました．3つの物体の軌道を記述する適切な数式を必要とするのであれば，いまでもその状況は変わっていません．むしろいまでは，3つの物体のダイナミクスはカオス的であり，あまりにも不規則でランダムな要素を持っていることが分かっています．

それとはまったく対照的に，ニュートンの重力理論は太陽の周りを回る惑星の軌道を説明するなど，驚くべき成果を収めています．それ以前にケプラーが，火星の天文観測から経験的に，惑星の軌道が楕円であることを導いていました．ただしその場合は，太陽と惑星という2つの物体しか登場しません．

太陽の周りを回る惑星の軌道は二体問題で解かれた近似解であり，惑星相互の影響を考慮していません．太陽系が数億年の間にどのように変化するかを理解しようとすると，太陽系の安定性が大きな問題となります．[3]

4.3　オスカル2世の生誕60周年

1889年は，ノルウェーとスウェーデンの王オスカル2世の生誕60周年でした．それを祝う一環として，ノルウェー人数学者のヨースター・ミッタク＝レフラーは王に，n体問題を解決した人物へ賞を授けると発表するよ

う進言しました．受賞するには，正確な数式でなく，収束する何らかの級数を導けばよいとされました．ポアンカレは興味を持ち，きわめて特殊なケースとして，天体の1つが塵の微粒子のように質量を無視できる，制限された三体問題から考えはじめることにしました．塵粒子はほかの2つの天体の影響を受けるが，その2つの天体は塵粒子を完全に無視するというモデルを組み立てました．すると2つの重い天体は，周期的な軌道上を一定の速さで運動します．運動が複雑になるのは塵粒子だけです．

ポアンカレは，オスカル王の示した問題には答えられませんでした．その問題はあまりにも高望みでした．しかし，その方法がきわめて革新的で，かなりの進歩をもたらしたため，ポアンカレは賞を与えられました．1890年に発表されたその受賞研究は，たとえ制限された三体問題でも，受賞要件に示された答えは存在しないかもしれないことを示していました． [3]

4.4 三体問題は解析的に解けない

二体問題と同様に，三体問題の場合も，その運動を三質点A,B,Cの重心Pの運動と，三質点の相対的な運動とに還元することができます．そして，この重心の運動は一要素の方程式ですから，解析的に解くことができます．しかし，三質点の相対運動の方は，どのようにしても一要素の方程式に分解することができません．なぜなら，質点AとBの相対運動に対する方程式を解こうとすると，その中にB-C間およびC-A間の相対運動が入ってくるからです．従って，三体問題は解析的に解けません． [4]

5 フェルマーの定理

5.1 Piere de Fermat

フェルマーの定理は，Piere de Fermatが1637年に証明を見つけたと記して以来有名となり，何世代もの数学者を虜にしました．フェルマーの定理は新しいアイデアの出所であり，それらは数学の他の領域でとても有用であることが明らかになりました．

Andrew Wiles（英国の数学者，プリンストン大学教授）が，フェルマーの定理の証明について重要で決定的な進歩を実現したばかりです（*1894-1994* 原稿執筆時点，1993 年）．[1]

5.2 谷山=志村予想

志村は努力を続け，何年もかかった末にようやく提案は受け入れられて，谷山=志村予想と呼ばれるようになりました．すると，20 世紀最高の数論学者の 1 人であるアンドレ・ヴェイユが，この予想に有利となるさらに多くの証拠を見つけて発表し，この予想はきっと正しいだろうという見解を示しました．

1960 年代に同じく重鎮のロバート・ラングランズが，谷山=志村予想は，代数的数論と解析的数論を統一することになる，さらに幅広く野心的な研究計画の一要素としてとらえられることに気づきました．そして，この考え方に関連したいくつもの予想を定式化し，それはいまではラングランズ・プログラムと呼ばれています．[3]

5.3 フライの方法

ゲルハルト・フライは，谷山=志村予想を自分の楕円曲線に当てはめればフェルマーの最終定理が証明されることに気づきました．しかし，フライの考えに関しては問題が明るみに出ていました．1984 年に講演をおこなった際，フライ曲線はあまりに奇妙すぎてモジュラーではありえないという，全体の鍵となる論述に落とし穴があることを，聴衆に指摘されたのです．この分野を代表する人物の 1 人であるジャン=ピエール・セールがすぐにその穴を塞ぎましたが，そのためには，やはり証明されていない，特別なレベル還元予想というものを利用しなければなりませんでした．しかし 1986 年，ケン・リヴェットがその特別なレベル還元予想を証明しました．こうして，フェルマーの最終定理の証明に向けた唯一の障害は谷山=志村予想だけとなり，大方の見方が変わりはじめました．セールは，フェルマーの最終定理はおよそ 10 年以内に証明されるだろうと予言しました．どのように証明されるかは別問題でしたが，一般的な雰囲気としては，モジュラー

関数に関連した手法がかなり強力になりつつあり，やがて誰かがフライの方法を実現させるだろうと思われていました．[3]

5.4 アンドリュー・ワイルズ

アンドリュー・ワイルズは1971年にオックスフォード大学で数学の学位を取得し，博士研究のためケンブリッジ大学へ移りました．指導教官のジョン・コーツに忠告され，フェルマーの最終定理の代わりに，当時もっとずっと有望な研究分野と考えられていた楕円曲線の研究を始めました．1985年から86年には，世界を代表する数学研究機関の1つであるパリのフランス高等科学研究所に滞在しました．当時リヴェットもそこに滞在しており，その特別なレベル還元予想がワイルズを奮い立たせました．そうしてワイルズは，楕円曲線のれっきとした研究を進めながら，谷山=志村予想の証明を試み，同時に，子どもの頃からの夢であるフェルマーの最終定理の証明に挑戦できるようになりました．

ワイルズは，研究室のある自宅の屋根裏部屋にこもり，7年間にわたって努力を続けました．何に取り組んでいるのか知っていたのは，妻と学科長だけでした．

1993年，証明は完成し，国際的な数学研究の拠点として新たに設立された，ケンブリッジ大学のアイザック・ニュートン研究所で，一連の3回の講演をおこなうことにしました．演題は,「モジュラー形式，楕円曲線，ガロア表現」という専門的で当たり障りのないものでした．しかしその演題に惑わされる人はほとんどおらず，ワイルズが大きなことを成し遂げたのは誰の目にも明らかでした．

ワイルズの証明はそのあと専門家による査読を受けました．ワイルズは査読者の指摘のほとんどに答えることができましたが，1点だけどうしても考えなおさなければならないことがありました．1993年後半，ワイルズは，浮かび上がってきたある論理的な落とし穴を埋められるまで主張を取り下げるという声明を発表しました．

元学生のリチャード・テイラーを戦いに引き込み，1995年4月に新しい証明が完成しました．今度こそ落とし穴や間違いは1つもなかった．すぐに2篇の論文が，超一流の雑誌『アナルズ・オブ・マセマティクス』に掲載されました．[3]

6　終わりに

ついに解かれた有名な問題の中から,「四色定理」「三体問題」「フェルマーの定理」について述べました.

四色問題の由来は数学ではありません. フランシス・ガスリーは数学者でしたが植物学者でもあり, 法学の学位を取るために勉強していました. オーガスタス・ド・モルガンは, 数学の定理として知られているかどうかを知りませんでした. ウィリアム・ローワン・ハミルトン卿の返事は何の役にも立ちませんでした. チャールズ・サンダース・パースが四色問題を解いたと主張しましたが, その証明は発表されませんでした.

アーサー・ケイリーがロンドン数学会の会合で言及したことによって, 四色問題は再び浮上しました. アルフレッド・ケンプは法廷弁護士で, その証明に欠陥があることをパーシー・ヒーウッドが示しました.

ケンプとヒーウッドの手法を拡張し, 野心的な戦略が浮上してきました. ハインリッヒ・ヘーシュが, 配置が可約であることを証明する体系的な方法（「放電」）を見つけました. ヴォルフガング・ハーケンがコンピュータが手助けになると考え, 腕利きのプログラマーのケネス・アッペルと手を組み, 証明を完成しました. ガスリーが問題に気づいてから 120 年余りが経過していました.

三体問題には 19 世紀に多くの力学者が取り組みました. しかし, アンリ・ポアンカレが三体問題の《非可積分》を証明し, 解析的に解けないことが明らかになりました. 現在では, 3 つの物体のダイナミクスはカオス的であり, あまりにも不規則でランダムな要素を持っていることが分かっています.

フェルマーの定理は, ピエール・ド・フェルマーが証明を見つけたと記して以来有名となります. アンドリュー・ワイルズが証明するまでに 300 年以上の時を必要としました. フェルマーは生涯にわたって高等裁判所の顧問官の地位に留まり, アマチュアの立場にありました. しかし, あまりに有能で実質的には本職の数学者でした.

ゲルハルト・フライは, 谷山=志村予想を自分の楕円曲線に当てはめればフェルマーの最終定理が証明されることに気づきました. フライ曲線の問題点が指摘されますが, ジャン=ピエール・セールがその穴を塞ぎます. さらにケン・リヴェットが特別なレベル還元予想を証明し, フェルマーの最終

定理の証明に向けた唯一の障害は谷山=志村予想だけとなりました．ワイルズは，楕円曲線の研究を進めながら，谷山=志村予想の証明を試み，フェルマーの最終定理を証明しました．

3つの問題の解決に関わる人物や歴史的経過には，それぞれに大きな意外性と巡りあわせが存在します．数学は厳密な論理により構成される学問ですが，その発展には人間的な側面が多分に存在します．

参考文献

[1] Jacques Lesourne, *Les Polytechniciens dans le siècle 1894-1994*, DUNOD, PARIS, 1994，p.70-72，p.74-75

[2] 堀井政信,「Cent ans de mathématiques」,『津田塾大学 数学・計算機科学研究所報 37 第26回数学史シンポジウム (2015) 』，津田塾大学 数学・計算機科学研究所，2016，p.22-29

[3] 『数学を変えた14の偉大な問題』，イアン・スチュアート著，水谷淳訳，SBクリエイティブ，2013年10月25日，p.77-102，p.155-181，p.183-191

[4] 『コンピュータ物理の世界—三体問題からカオス、ソリトンまで』，神原 武志・佐々木直幸・内藤 正美・渕上 信子著，講談社，1990年12月，p.83-87