# 19世紀の微分幾何*

## ― 曲面の変換理論 ―

井ノ口順一

筑波大学数理物質系

## はじめに

本稿では19世紀の微分幾何学者が精力的に研究していた「曲面の変換理論」について（そのほんの一部を）紹介し，数学史の新たな研究対象を提供したい．本稿の主題は「非ユークリッド幾何の発見」と「非線型波動」という全く異なるテーマが20世紀末に「数学的しゃぼん玉」をきっかけに結びついたこと．その結びつきが契機となり忘れられていた「19世紀の微分幾何」（曲面の変換理論）が再び輝きを取り戻したことを紹介することにある．

## 1　非ユークリッド幾何から

エウクレイデス（ユークリッド，Euclides, 325BC?–265BC）の『原論』から5つの要請（公準）を引用する（訳文は [4] より引用）

**要請（公準）**

(1) 次のことが要請されているとせよ．すべての点からすべての点へと直線を引くこと．

(2) そして，有限な直線を連続して1直線をなして延長すること．

*津田塾大学　数学・計算機科学研究所 第27回数学史シンポジウム，2016.10.08

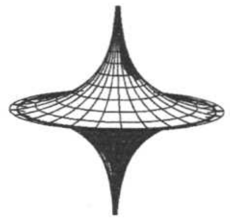

図 1: ベルトラミの擬球（ガウスの反球）

(3) そして, あらゆる中心と距離をもって円を描くこと.

(4) そして, すべての直角は互いに等しいこと.

(5) そして, もし 2 直線に落ちる直線が, 〔和が〕2 直角より小さい同じ側の内角を作るならば, 2 直線が限りなく延長されるとき, 〔内角の和が〕2 直角より小さい側で, それらが出会うこと.

よく知られているように, 多くの人が「第 1 公準から第 4 公準」を使って「第 5 公準」を証明しようとした.

ヤーノシュ ボヤイ（János Bolyai, 1802–1860）, ガウス（C. F. Gauß, 1777–1855）, ロバチェフスキー（N. I. Lobačhevskiĭ, 1793–1856）により第 1 から第 4 までの要請をみたすが第 5 の要請をみたさない幾何の存在が示された. 第 1 から第 4 の要請をみたす幾何は「絶対幾何」とよばれる. ユークリッド幾何と異なる絶対幾何はただひとつであり, その幾何は現代では**双曲幾何**とよばれる.

のちにヒルベルトにより双曲幾何の忠実な模型（3 次元空間内の曲面としての実現）が存在しないことが示された（1901）. もうすこし正確に述べると双曲平面を 3 次元空間内に埋め込もうとすると必ず特異点を生じるということである.

ガウスは 3 次元（ユークリッド）空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面で双曲平面を実現することを試みておりこんにち, ベルトラミの擬球（Beltrami's pseudosphere）とよばれる曲面を発見し反球と名付けている. だがガウスは双曲幾何の発見を公表しなかった.

## 2　ガウス曲率が負で一定な曲面の研究

19世紀から20世紀初頭の微分幾何学では負定曲率曲面（双曲平面の特異点付き模型）の具体的構成が研究されていた．ガウスの曲面論によれば「特異点付き模型」はガウス曲率 $K$ が負で一定な曲面に他ならない（$K = -1$ として一般性を失わないので以下 $K = -1$ とする）．球面幾何の模型である「2次元球面」は半円を回転させて得られることに着目する．そこで $K = -1$ の回転面を考察すれば，反球が発見されるのである．反球は犬線（tractrix）とよばれる曲線を回転させて得られる．

ベルトラミ（Eugenio Beltrami, 1835-1900）は擬球上で双曲幾何における三角法が再現できることを示した [1]．この功績に因み反球はベルトラミの擬球とよばれるようになった（[5] も参照）． ベルトラミ（Eugenio Beltrami, 1835-1900）はパヴィア（Pavia）生まれでブリオッシ（Francesco Brioschi, 1824–1897）の下で学んだ．

ガウスの「曲面論」に続く研究のひとつがミンディング（Ferdinand Gottlieb Minding, 1806–1885）による曲面の変形問題である（[12, pp. 15–20] を参照）．注目すべき研究はいくつかあるがここでは2つの研究結果に注意を払いたい．まず1839年の論文でガウス曲率が負で一定な回転面を分類している．それらは3種類あり，1種類はもちろんベルトラミの擬球である．さらに1940年の “Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen” と題した論文では $K$ が正で一定の曲面上では球面三角法が成立することを示している．しかし $K = -1$ の曲面と双曲幾何の関係はベルトラミの指摘まで待たねばならなかった．

イタリア滞在時，リーマンはピサ大学教授就任を打診されるが健康上の理由で受諾しなかった．この教授職に1年後に就任したのがベルトラミである．またベルトラミは論文 [1] を高次元化した論文でも知られている．イタリア滞在時のリーマンとベルトラミが親交をもち数学的に交流していたという公式記録はない．ラウグヴィッツは “最近ボッタツィーニは両者の間にほとんど交流はなかったという状況証拠を提出した” と書いている [13, p. 52].

**註 2.1 (ディニの擬球)** こんにち擬球とよばれる曲面にはもう一種ある．犬線の螺旋面でありディニの擬球とよばれている．ディニ（Ulisse Dini,1845–

1918）はピサ生まれである．ビアンキ（Luigi Bianchi, 1865–1929）はピサでディニとベッティ（Enrico Betti）の指導を受けている．

## 3　曲面の変換理論（線叢）

19 世紀の微分幾何においては「$K=-1$ の曲面から新たな $K=-1$ の曲面を作り出す」という研究が行われていた（曲面の変換理論）．　本稿では線叢を用いた変換について述べる．

**定義 3.1** 3 次元空間内の直線の 2 径数族を**線叢**（line congruence）とよぶ．

3 次元空間内の曲面 $M$ の位置ベクトル場を $\boldsymbol{p}(u^1,u^2)$ で表す．$M$ に沿って定義された単位ベクトル場 $\boldsymbol{\xi}(u^1,u^2)$ をひとつ選び線叢を

$$\boldsymbol{p}(u^1,u^2)+t\boldsymbol{\xi}(u^1,u^2),\quad -\infty<t<+\infty$$

で定め曲面 $M$ を通る線叢とよぶ．とくに各点 $(u^1,u^2)$ において $\boldsymbol{\xi}(u^1,u^2)$ が $\boldsymbol{p}(u^1,u^2)$ における接ベクトルであるときこの線叢を**接線叢**（tangential line congruence）とよぶ．接線叢を用いた“曲面の変換”を導入する．

3 次元空間内の 2 つの曲面 $M$, $\widetilde{M}$ を与える．
$M$ と $\widetilde{M}$ の双方を通る線叢が存在し，次の条件をみたすと仮定する．

それぞれの位置ベクトル場 $\boldsymbol{p}(u^1,u^2)=\overrightarrow{\mathrm{OP}(u^1,u^2)}$ と $\widetilde{\boldsymbol{p}}(u^1,u^2)=\overrightarrow{\mathrm{O\widetilde{P}}(u^1,u^2)}$ に対し直線 $\mathrm{P\widetilde{P}}$ が両方の径数付曲面に接する．

このとき線叢により径数付曲面間の対応 $\ell:\mathrm{P}\mapsto\widetilde{\mathrm{P}}$ が定まる．この対応 $\ell$ を**接線叢対応**とよぶ．接線叢対応がさらに次の 2 条件をみたすとき**ベックルンド変換**（Bäcklund transformation）とよぶ．

- （定距離条件）：対応点間の距離は定値 $r>0$, つまり
$$\|\overrightarrow{\mathrm{P\widetilde{P}}}\|=r>0.$$
- （定角条件）：対応点における単位法ベクトル $\boldsymbol{n}(u^1,u^2)$, と $\widetilde{\boldsymbol{n}}(u^1,u^2)$ のなす角は常に一定値 $\theta$, すなわち
$$\boldsymbol{n}(u^1,u^2)\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}(u^1,u^2)=\cos\theta.$$

ベックルンド変換 $\ell$ で対応する二つの径数付曲面を線叢の**焦曲面**（focal surfaces）とよぶ．ベックルンド変換の名称はベックルンド（A. V. Bäcklund）による次の定理に由来する（詳細は [8, 10] 参照）．

**定理 3.1 (ベックルンド, 1875)** 2 曲面 $M$, $\widetilde{M}$ 間にベックルンド変換が存在すれば, 両者のガウス曲率 $K$, $\widetilde{K}$ は負の一定値

$$K = \widetilde{K} = -\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)^2.$$

直線にベックルンド変換を施すとベルトラミの擬球が得られる．19 世紀の微分幾何学ではベックルンド変換を始めとする種々の「曲面の変換」が精力的に研究されていたが, その後, 微分幾何学の大域化にともない関心が薄れ, いわば忘れ去られた状態にあった．20 世紀後半に再び微分幾何学の研究対象となるのだが, そのきっかけは双曲幾何ではなく「数学的しゃぼん玉」であった．次項と次々項でその「きっかけ」について述べる．

# 4　しゃぼん玉はなぜ丸い?

しゃぼん玉の数学的モデルについて考察する．薄膜の内部と外部の圧力差を $P$ とする．薄膜を曲面と考えたとき, その平均曲率 $H$ と圧力差 $P$ の間には $P = 2TH$ という関係が成立する（$T$ は表面張力で定まる定数）．しゃぼん玉では $P$ が零でない一定の値をとることからしゃぼん玉の数学的モデルとして「平均曲率が零でない一定値の閉じた曲面」が提案される．

このモデル化は変分法からも導かれる．しゃぼん玉は中の空気が閉じ込められていることから体積を保ったまま表面積を最小にする形として実現される．「体積を保つ変形下での表面積の変分問題」から平均曲率が一定である曲面の微分方程式が導かれる．

「平均曲率が零でない一定値をもつ曲面」のことを CMC 曲面（constant mean curvature surface）と言い表す．CMC 曲面は自分と切りあう（自己交叉をもつ）ことを許容しておくことに注意されたい．現実のしゃぼん玉は球面であることから, 次のような微分幾何学の問題が提起された．

ホップ予想

平均曲率一定の閉曲面は球面に限るか？

この予想はしばしば次のような表現で伝えられた.

数学的しゃぼん玉は現実のしゃぼん玉に限るか？

ホップ（Heinz Hopf）は1951年の論文で穴の開いていない平均曲率一定閉曲面（種数0の平均曲率一定閉曲面）は球面に限ることを証明した. またアレクサンドロフ（A. D. Alexandrov）は自己交叉をもたない平均曲率一定閉曲面は球面に限ることを証明した. 物理学的観点からは, 現実のしゃぼん玉はなんらかの意味で安定であるに違いないと考えられる. バルボサ（J. L. M. Barbosa）とド・カルモ（M. P. do Carmo）は上述の変分問題の解として安定であるCMC曲面は球面に限ることを証明した. この安定性定理はしばしば「しゃぼん玉が丸いことの数学的説明」と述べられている.

## 5 丸くない数学的しゃぼん玉

ホップ予想が提起された時点で球面ではない（自己交叉をもつ）平均曲率一定閉曲面の具体例は得られていなかった. 閉じているという条件を緩和してもCMC曲面の例として知られていたものは, 円柱面, CMC回転面（ドロネー曲面, Delaunay surface）しかなかった. その後, ド・カルモとダイチャー（M. Dajczer）はCMC螺旋面を求めている. これらの例の中で閉じたものは球面しかなかった. ただしホップ自身は「ホップ予想」を予想として提出していなかった. ホップはむしろ球面でない数学的しゃぼん玉を構成することに関心があったとも言われる.

ホップ予想を肯定的に証明しようと微分幾何学者が努力していたなか, 1984年, ウェンテ（H. Wente）はホップ予想の反例（CMCトーラス）を発表した（論文の刊行は1986年）.

CMCトーラスを構成するためには次の手順がとられた.

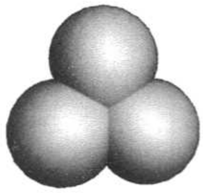

図 2: ウェンテ・トーラス

(1) 平面 $\mathbb{R}^2$ 全体で定義された sinh-Laplace 方程式 $u_{xx}+u_{yy}+4\sinh u=0$ の解で 2 重周期性をもつものの存在を証明する.

(2) (1) の条件をみたす $u$ を用いて $e^u(dx^2+dy^2)$ を第一基本形式にもつ CMC 曲面を求め, その中でトーラスを定めるものが存在することを証明する.

このトーラスはウェンテ・トーラス（Wente torus）とよばれるようになった. 不思議なトーラスの存在が証明されたものの, いったいどのような曲面なのかはただちにわかるものではなかった. アブレッシュ（U. Abresch）はウェンテの求めた sinh-Laplace 方程式の解の数値解析を行い, ウェンテ・トーラスの図を描いてみた. すると小さい主曲率に対応する曲率線がすべて平面曲線のように見えた. そこでアブレッシュは「小さい主曲率に対応する曲率線がすべて平面曲線である」という付帯条件を課して sinh-Laplace 方程式の解を求める研究を行った. 特筆すべきことにこの付帯条件を課すと sinh-Laplace 方程式は変数分離され楕円函数を用いて解を具体的に表示することができたのである（ウェンテ・トーラスはアブレッシュの課した条件をみたす）. アブレッシュはウェンテ・トーラスを含む CMC トーラスのクラスを求めることに成功した. ヴァルター（R. Walter）はアブレッシュの課した条件をみたす CMC トーラスの楕円函数を用いた表示式を与えた. なお, 大きい主曲率に対応する曲率線がすべて平面曲線である CMC トーラスは存在しない. さらにアブレッシュは自身が構成した CMC トーラスがある種の有限次元ハミルトン系からすべて得られることを証明した.

ピンカール（U. Pinkall）とスターリング（I. Sterling）はアブレッシュ

の研究を基に CMC トーラスをすべて分類することに成功した．ピンカールとスターリングのとった方法は

(1) CMC トーラスを定める sinh-Laplace 方程式の解が有限型（finite type）という条件をみたすことを証明し，

(2) 有限型の解がある種のハミルトン系からすべて得られることを証明する

というものであった（より詳しくは拙著 [7] を参照されたい）．

## 6 止まっていた歴史が動いた

ピンカールとスターリングのいう「有限型の解」は現代の無限可積分系理論において「有限帯ポテンシャル解」とよばれているものに他ならなかった．さらに 19 世紀の微分幾何と密接に関連することが発見された．すでに述べたように 19 世紀の微分幾何において $K=-1$ の曲面を具体的に構成する研究が行われていたがその研究方法は $K=-1$ の曲面を定める偏微分方程式

$$-\phi_{xx}+\phi_{tt}+\sin\phi=0$$

の解を構成することにあった．この方程式は現代になって物理学で独立に発見され sine-Gordon 方程式とよばれている．sinh-Laplace 方程式と方程式の型は異なるが類似性ももっている．sine-Gordon 方程式の有限型解は現代では伊達悦郎とコゼル（V. A. Kozel），コトリアロフ（V. P. Kotlyarov）によって求められていた（[18]）．

19 世紀の微分幾何学者はどのようなことを発見していたのだろうか．現代と対比させて紹介する．まずソリトン解とよばれる（物理学的にもっとも基本的な）解はベルトラミの擬球を定める解である．またミンディングが見つけた回転面は sine-Gordon 方程式の楕円函数解を与える．

さらに注目すべきことに sine-Gordon 方程式の有限型解も 19 世紀の微分幾何学者によって調べられていた．たとえば $K=-1$ の曲面に対しアブレッシュが考察したものと同じ条件「曲率線の一方がつねに平面曲線」を課した場合をエネパー（A. Enneper）が研究していたことが再発見された．

より一般の有限型解は H. Dobiner によって研究されていた．これらの事実はアブレッシュの論文以降に再発見された．

## 7　現代化された古典的曲面論（可積分幾何）

ベックルンド変換にまつわる筆者の経験について紹介したい．

平均曲率一定曲面に対してもベックルンド変換のような「曲面の変換」を考察するのは当然の流れであろう．スターリングとウェンテはビアンキ（Bianchi）とベックルンドによって研究されていた「曲面の変換」をヒントに CMC 曲面に対する変換（ビアンキ-ベックルンド変換）を求め円柱面から多重バブルトンとよばれる曲面を構成した（1993）．

イェロミン（U. Heltrich-Jeromin）とペディット（F. Pedit）は四元数解析を用いて，共形幾何学に由来する CMC 曲面の変換を考察した（1997）．彼らの考察した変換はダルブー変換（Darboux transformation）とよばれる．この名称は大著『曲面論』で知られるダルブー（Jean Gaston Darboux, 1842–1917）に由来する（[15, 16]）．

彼らは CMC 曲面に対するダルブー変換の全体とビアンキ-ベックルンド変換の全体は一致しないという予想を提起した（1997）．彼らの論文には「この曲面はダルブー変換で得られるがビアンキ-ベックルンド変換では得られないだろう」と述べられた曲面の図が挙げられていた．

1999 年，筆者はビアンキ-ベックルンド変換と伊達の直接法とよばれる方法の関係を調べていた．奇妙な曲面の変換を発見したがその意味が解明できず放置していた．2003 年，当時，神戸大学大学院生の小林真平氏にそれらを見せた．小林氏は数値実験で「奇妙な変換」を円柱面に施して得られる曲面を描画した．　その結果，画面にはイェロミンとペディットの論文の "あの曲面" が映し出された．

この "実験" をもとに「2 種類の変換は一致する」という予想を立て，自分たちの立てた予想が正しいことを証明できた（2005, [9, 11]）．

平均曲率一定曲面の変換に関する研究結果の一例を紹介した．現在では 19 世紀の「曲面の変換理論」と現代の「無限可積分系理論」が融合した研究分野が形成され「可積分幾何」（integrable geometry）とよばれるようになった．筆者はこの可積分幾何の研究に従事している．

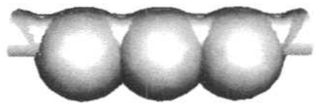

図 3:あの曲面

# 8　ビアンキの功績

イェロミンとペディットはビアンキによるベックルンド変換（Bianchi-Bäcklund transformation）について

L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie (Leipzig, Berlin, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1910).

を典拠としている．ビアンキのこの本はオリジナルはもちろんイタリア語であるが，版によって内容の増減がある．

- ドイツ語 1899 年版には該当する内容の章がない．
- ドイツ語 1910 年版には XVIII 章に該当する変換が調べられている．
- イタリア語 1903 年版の第 2 巻に該当する変換が述べられているがドイツ語版の XVIII 章が大幅に拡充されていて，我々が行った計算に相当するものも得られていることがわかる．

ビアンキの研究成果は完全には把握されているとは言えない．可積分幾何の研究を進める上でビアンキの研究についてさらなる調査が必要であると考えられる（筆者が自力で見つけた変換は実質的にはビアンキの本にあったことが確認できている）．

埋もれているビアンキの研究成果の例を他にも紹介しておきたい．

3 次元の双曲空間 $\mathbb{H}^3$ 内の曲面でガウス曲率が 0 のものと平均曲率が $\pm 1$ のものは特別な性質をもつことが知られており曲面の微分幾何学の専門的研究者によって詳細な研究がなされている．また $\mathbb{H}^3$ 内の $K=0$ の平坦曲面も Gálvez-Martínez-Milán（2000）の公式の発見以来，微分幾何学者

による研究が進んでいる．リマ（Levi L. de Lima）とロイトマン（Pedro Roitman）は $H=1$ の曲面および平坦曲面を作る方法がビアンキの本第3版（イタリア語, 1927）によって（現代とは異なるアイディアで）与えられていたことを発見した [14, 17]． ビアンキに限らず19世紀の微分幾何学者の研究成果が再発見されることはしばしばある．それらの成果を現代幾何学で再構成することは決して簡単なことではない．また現代化した上で新たな研究成果を生むためには新しいアイディアが必要である．また（現代人の目でなく）19世紀の幾何学として理解することもやさしくない．19世紀の「曲面の変換理論」はまだ研究途上である．

# 9 まとめと今後の課題

19世紀の微分幾何における「曲面の変換理論」は幾何学の大域化（多様体の誕生／トポロジー）にともない一旦，忘れられてしまった．一方，物理学において，相対性理論と量子力学の台頭により非線型波動の研究は忘れられてしまった． 忘れられていた2つの分野が20世紀後半に「しゃぼん玉の数学的モデル」に関する予想をきっかけに結びついた．この結びつきを契機に「曲面の変換理論」はふたたび幾何学の研究対象となった．また「可積分幾何」という新たな研究分野が生まれた．19世紀の「曲面の変換理論」の解明はまだ十分ではなく，今後も調査が必要である．

講演の機会をくださったオーガナイザーの先生方に感謝いたします．また草稿に対しご助言をくださった中根美知代先生に御礼申し上げます．

# 参考文献

[1] E. Beltrami, Saggio di interpretazione di variabili, Giornale di matematiche V (1867), 24–27.

[2] L. Bianchi, Lezioni di Geometria Differenziale, third edition, N. Zanichelli Editore, Bologna, 1927.

[3] R. Bonola, Non-Euclidean Geometry, Dover, 1955.

[4] エウクレイデス全集. 第1巻. 原論I–IV （斎藤憲・三浦伸夫［訳]），東京大学出版会, 2007.

[5] E. ジェスティ, 数はどこからきたのか. 数学の対象の本性に関する仮説（斎藤憲 [訳]），共立出版, 1999.

[6] 井ノ口順一, どこにでも居る幾何, 日本評論社, 2010.

[7] 井ノ口順一, 曲面と可積分系, 朝倉書店（現代基礎数学18），2016.

[8] 井ノ口順一, 負定曲率曲面とサイン・ゴルドン方程式, 埼玉大学数学レクチャーノート 1, 2012.

[9] 井ノ口順一, 小林真平, Bianchi-Bäcklund-Darboux 変換について, 九州大学応用力学研究所 研究集会報告 “非線形波動の物理と数理構造” 16 ME-S1 (2005), Article No. 25.

[10] 井ノ口順一, 小林真平, 松浦望, 曲面の微分幾何学とソリトン方程式. 可積分幾何入門, 立教SFR 講究録 No. 8, 2005.

[11] S. P. Kobayashi, J. Inoguchi, Characterizations of Bianchi-Bäcklund transformations of constant mean curvature surfaces, Internat. J. Math. 16 (2005), no. 2, 101–110.

[12] B. I. Laptev, B. A. Rozenfel'd, 19世紀の数学. 幾何学（A. N. Kolmogorov, A. P. Yushkevich [編]），邦訳: 19世紀の数学 II 幾何学・複素関数論, 朝倉書店（小林昭七 [監訳]），2008.

[13] D. Laugwitz, Bernhard Riemann 1826-1866; Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik, Birhäuser, Verlag, 1996. 邦訳: D. ラウグヴィッツ, リーマン. 人と業績（山本敦之［訳]），シュプリンガーフェアラーク東京, 1998（原著）.

[14] L. L. de Lima, P. Roitman, Constant mean curvature one surfaces in hyperbolic 3-space using the Bianchi-Calò method, An. Acad. Brasil. Ciênc. 74 (2002), 1924.

[15] 森本明彦, Darboux の曲面論について（現代的視点から）, Reports on Global Analysis 7, 1984.

[16] 森本明彦, Darboux の曲面論について（現代的視点から）, 現代数学史研究会.

[17] P. Roitman, Flat surfaces in hyperbolic space as normal surfaces to a congruence of geodesics, Tôhoku Math. J. 59 (2007), 21–37.

[18] 田中俊一・伊達悦郎, KdV 方程式, 紀伊国屋数学叢書 16, 1979.