From Weitzenböck identity to a generalized Lichnerowicz formula on the square of Dirac operator

Makoto Ishibashi

§1. Introduction

Although so-called Weitzenböck identity of Laplacian had been obtained in the early nineteen-hundreds, Lichnerowicz independently discovered more explicit formula for a spin manifold. Actually, he used it to harmonic analysis of spinors in [3]. Then it was generalized, which reminds us of recurrence of Weitzenböck identity.

We should not confuse the initial identity with the final formula.

In this paper, we review as self-contained as possible proof of the generalized Lichnerowicz formula. Furthermore, we quote historical evidence of Schrödinger formula in appendix I, Weitzenböck identity in appendix II, respectively.

§2. Preliminaries

For the convenience of the readers, we recall some notations and definitions from differential geometry.

Let M be a n-dimensional Riemannian manifold, and let g be a metric of the tangent bundle TM of M , and let ∇ be the Levi-Civita Riemann connection of (M, g).

For a vector bundle E over M , we write by C^{∞} $(M; E)$ the set of all sections from M to E. .

Each element of $C^{\infty}(M; TM)$ is called a vector field on M, and let $C^{\infty}(M)$ denote the set of all real-valued C^{∞}-functions on M.

Let W be a vector space, and let q be a positive definite quadratic form on W . Then one can construct the Clifford algebra C(W) = Cliff (W, q).

Let $f \in C^{\infty}(M)$, a_1, $a_2 \in \boldsymbol{R}$, S, S_1, $S_2 \in C^{\infty}(M; E)$, and V, V_1, V_2 $\in C^{\infty}(M; TM)$.

A $\boldsymbol{R}$-linear map $\nabla^E : C^{\infty}(M; TM) \times C^{\infty}(M; E) \longrightarrow C^{\infty}(M; E)$

is called a connection of E if and only if it satisfies the following four

conditions ;

(1) $\nabla^E_{fV} S = f \nabla^E_V S$, where $\nabla^E_V S = \nabla^E (V, S)$.

(2) $\nabla^E_V (fS) = V(f) S + f \nabla^E_V S$

(3) $\nabla^E_{a_1 V_1 + a_2 V_2} S = a_1 \nabla^E_{V_1} S + a_2 \nabla^E_{V_2} S$

(4) $\nabla^E_V (a_1 S_1 + a_2 S_2) = a_1 \nabla^E_V S_1 + a_2 \nabla^E_V S_2$.

Let T^*M be the cotangent bundle of M . Since $U^* \bigotimes W = Hom(U, \boldsymbol{R}) \bigotimes W$ $= Hom(U, W)$, a connection ∇^E can be thought of a map from $C^\infty(M; E)$ to $C^\infty(M; T^*M \bigotimes E) = C^\infty(M; Hom(TM, E))$ by defining $(\nabla^E(S))V$ $= \nabla^E_V S = \nabla^E(V, S)$.

We assume that there exists a Clifford multiplication map Cli (= C( )) from $C^\infty(M; T^*M \bigotimes E)$ to $C^\infty(M; E)$. In fact, we think that there exists a map C : $Cliff(T^*M) \longrightarrow$End$(E)$.

Let $e_i \in C^\infty(M; TM)$ be orthonormal frame vector field such that $e_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, and $e^j \in C^\infty(M, T^*M)$ be dual basis of $\{e_i\}$, where $1 \leq i, j \leq n = dim M$.

Then we write by $R(e_i, e_j) = \nabla^E_{e_i} \nabla^E_{e_j} - \nabla^E_{e_j} \nabla^E_{e_i}$, $R(e_i, e_j) e_k = \sum R^l_{ijk} e_l$,

$g_{ij} = g_{ji} = g(e_i, e_j)$, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, $R_{ijkl} = \sum g_{lm} R^m_{ijk}$, and $r_M = \sum R_{ijij}$

is called the scalar curvature of M . In fact, r_M is a function on M .

Let ∇^* denotes the dual Levi-Civita connection of M . If $[\ \nabla^E_{e_i}\ ,\ C(e^j)\ ]$

$= C(\nabla^*_{e_i} e^j)$, then ∇^E is called a Clifford connection of E.

Let $\Delta = -\sum g^{ij}(\nabla^E_{e_i}\nabla^E_{e_j} - \sum \Gamma^k_{ij}\nabla^E_{e_k})$ be the Laplacian of a Clifford connection ∇^E, where Γ^k_{ij} denote the Christoffel symbols such that $\nabla_{e_i} e_j = \sum \Gamma^k_{ij} e_k$.

The Dirac operator D_E of E can be defined by

$D_E = Cli\ \nabla^E$. In fact, D_E can be expressed as follows.

$D_E = \sum C(e^i)\ \nabla^E_{e_i}$. This is a locally expression of D_E in a open neighborhood of M. Since $D_E : C^\infty(M;E) \longrightarrow C^\infty\ (M;E)$, we denote by $D_E \in End(E)$ for brevity.

Under the above notations and assumptions, the generalized Lichnerowicz formula says that

$D_E{}^2 = \nabla + 1/4\ r_M + C(\hat{\mathrm{R}}\ )$, where $C(\hat{\mathrm{R}})$

$= 1/2 \sum C(e^i)C(e^j)\hat{R}(e_i, e_j)$ for some $\hat{R} \in End(E)$,

which is a $C(T^*M)$ -endomorphism of $C^\infty(M;E)$.

§3. Lemmas

Lemma 1. We have $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} = 1/2\sum g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij})$,

and $\nabla^*_{e_i} e^j = -\sum \Gamma^j_{ik} e^k$.

Proof. Since $Ug(V,W)+Vg(W,U)-Wg(U,V) = g(\nabla_U V, W)+g(V,\nabla_U W)+ g(\nabla_V W, U) + g(W, \nabla_V U) - g(\nabla_W U, V) - g(U, \nabla_W V)$

, and

$-g(U,[V,W])+g(V,[W,U])+g(W,[U,V]) = -g(U,\nabla_V W-\nabla_W V)+g(V,\nabla_U W)+$

$g(W,\nabla_U V-\nabla_V U) = -g(U,\nabla_V W)+g(U,\nabla_W V)+g(V,\nabla_W U)-g(V,\nabla_U W)+$

$g(W,\nabla_U V) - g(W,\nabla_V U)$,

we have the Koszul formula as follows.

$g(\nabla_U V, W) = 1/2\{Ug(V,W) + Vg(W,U) - Wg(U,V) - g(U,[V,W]) + g(V,[W,U]) + g(W,[U,V])\}$.

If U $=\partial_i = e_i$, V $=\partial_j = e_j$, and W $=\partial_l = e_l$, then we have $[U,V] = [V,W] = [W,U] = 0$, hence

$\sum \Gamma^m_{ij} g_{ml} = 1/2(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij})$. Thus we have proved the first part.

For a proof of the latter part, since $\langle e_j, e^l\rangle = \delta_{jl}$ is (locally) constant, it holds that $\partial_i \langle e_j, e^l\rangle = 0$.

Now, write by $\nabla^*_{e_i} e^l = \sum r^k_{il} e^k$. Then $\partial_i \langle e_j, e^l\rangle = \langle \nabla_{e_i} e_j, e^l\rangle + \langle e_j, \nabla^*_{e_i} e^l\rangle$

$=\sum \Gamma^k_{ij} \langle e_k, e^l\rangle + \sum r^k_{il}\langle e_j, e^k\rangle = \Gamma^l_{ij} + r^j_{il}$ implies that $r^j_{il} = -\Gamma^l_{ij}$.

Thus we have proved that $\nabla^*_{e_i} e^l = -\sum \Gamma^l_{ik} e^k$. Q.E.D.

Lemma 2. Let V , W , X , Y $\in C^\infty(M;TM)$ be vector fields on M . Then we have

(i) R(V,W) X + R(W,X) V + R(X,V) W = 0 ,

(ii) g (R(V,W) X , Y) = - g(R(V,W) Y , X) ,

(iii) g (R(V,W) X , Y) = g (R(X,Y) V , W) .

Proof. Since $\nabla_V W$ -$\nabla_W V$ - [V, W] = 0 , and - R(W,V) = R(V,W) =∇_V ∇_W -$\nabla_W \nabla_V$ -$\nabla_{[V,W]}$, the left hand side of (i) becomes

∇_V ([W , X]) + ∇_W ([X , V]) + ∇_X ([V , W]) - ∇_X ([V , W]) + [X , [V , W]] - ∇_V ([W , X]] + [V , [W , X]] - ∇_W ([X , V]) + [W , [X , Y]] = 0 ,

because $C^\infty(M;TM)$ is a Lie algebra which satisfies the Jacobi identity.

For a proof of (ii), let us recall that

W (g (X,X)) $\dot{=}$ g (∇_W X , X) + g (X , ∇_W X) = 2 g (∇_W , X) ,

V (g (∇_W X , X)) = g (∇_V ∇_W X , X) + g (∇_W X , ∇_V X) ,

W (g (∇_V X , X)) = g (∇_W ∇_V X , X) + g (∇_V X , ∇_W X) .

Hence we have g (∇_V ∇_W X - ∇_W ∇_V X , X) = 1/2 [V , W] g (X , X)

= g ($\nabla_{1/2[V,W]}$ X , X) + g (X , $\nabla_{1/2[V,W]}$ X) = g ($\nabla_{[V,W]}$ X , X) .

Thus g (R(V,W) X , X) = 0 , therefore g (R(V,W) X , Y)

= - g (R(V,W) Y , X) .

For a proof of (iii) , by using (i) and (ii) , recall the following eight identities ;

g (R(V,W) X + R(W,X) V + R(X,V) W , Y) = 0 ,

g (R(W,X) Y + R(X,Y) W + R(Y,W) X , V) = 0 ,

g (R(X,Y) V + R(Y,V) X + R(V,X) Y , W) = 0 ,

g (R(Y,V) W + R(V,W) Y + R(W,Y) V , X) = 0 ,

- g (R(V,W) X , Y) - g (R(V,W) Y , X) = 0 ,

- g (R(W,X) V , Y) - g (R(W,X) Y , V) = 0 ,

- g (R(X,Y) W , V) - g (R(X,Y) V , W) = 0 ,

- g (R(Y,V) X , W) - g (R(Y,V) W , X) = 0 .

Then g (R(X,V) W , Y) + g (R(Y,W) X , V) + g (R(V,X) Y , W) + g (R(W,Y) V , X)
= g (R(X,V) W , Y) + g (R(Y,W) X , V) + g (- R(X,V) Y , W) + g (- R(Y,W) V , X)
= g (R(X,V) W , Y) + g (R(Y,W) X , V) + g (R(X,V) W , Y) + g (R(Y,W) X , V)
= 2 $\{$g($R(X,V)W,Y$)+g($R(Y,W)X,V$)$\}$ = 0 .

Thus we have g (R(X,V) W , Y) = - g (R(Y,W) X , V) = g (- R(Y,W) X , V) = g (R(W,Y) X , V) . Q.E.D.

Lemma 3. We have $g\ (R(e_i, e_j)e_k, e_l\ ) = R_{lkij} = -R_{klij} = -R_{ijkl} = R_{ijlk}$,

$R_{ijkl}\ + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$, and $R_{iikl} = 0$.

Proof. These follow from lemma 2 . Q.E.D.

Lemma 4. Let R be the curvature of a Clifford connection ∇^E of a vector bundle E over a Riemannian manifold (M , g) , and write by

$\widetilde{\mathrm{R}}$ (V , W) (X , Y) = g (R(V,W) Y , X) .

Then we have

$[\ C(\widetilde{R}(V,W)), C(e^k)\ ] = 4\ C(R(V,W)e^k) = 4\ [\ R(V,W), C(e^k)\ ]$, and

R - 1/4 C ($\widetilde{\mathrm{R}}$) = $\widehat{\mathrm{R}}$ is a C (T^*M) - endomorphism of C^∞ (M ; E) .

Proof. Generally, it follows from Clifford multiplication that

$C(e^i)C(e^j) + C(e^j)C(e^i) = -\ 2\ g\ (e^i, e^j\ ) = -\ 2\ g^{ij}$.

Because of below lemma 6 , we may assume that $\{e^j\}$ be orthonormal coframe such that $g^{ij} = \delta_{ij}$. Hence $C(e^i)C(e^i) = -\ 1$, $C(e^j)C(e^i) =$ $-C(e^i)C(e^j)$ for i $\neq$ j . Furthermore, we have a formula as follows .

$C(e^i)C(e^j)C(e^k)$ - $C(e^k)C(e^i)C(e^j)$

$$\begin{cases} = 0\ (\ k \neq i\ ,\ k \neq j\ )\ \text{or}\ (\ i = j\ ) \\ = -\ 2\ C(e^i) = -\ 2\ e^i\ (\ i \neq k = j\ ) \\ = 2\ C(e^j) = 2\ e^j\ (\ i = k \neq j\ )\ . \end{cases}$$

Hence $[C(\widetilde{R}(V,W)), C(e^k)]$

$= \sum g\ (R(V,W)e_i, e_j\ )\ (C(e^i)C(e^j)C(e^k)$ - $C(e^k)C(e^i)C(e^j)\ )$

$= \sum g\ (\ R(V,W)e_i, e_k\ )\ (\ -2e^i\ ) + \sum g\ (\ R(V,W)e_k, e_j\ )\ (2e^j\ )$

$= \sum 4\ g\ (R(V,W)e_k, e_i)e^i = 4\ C(R(V,W)e^k) = 4[R(V,W), C(e^k)]$ for a fixed index k . Thus we know that $4R - C(\widetilde{R})$ is a Cliff (T^* M) - endomor phism of C^∞ (M ; E) . Q.E.D.

Lemma 5. We have that $R(e_i, e_j) = \widehat{R}(e_i, e_j)$

$+ 1/4 \sum g\ (R(e_i, e_j)e_k, e_l)C(e^k)C(e^l)$.

Proof. This follows from lemma 4 . Q.E.D.

Lemma 6. The Dirac operators $D_E = \sum C(e^i)\ \nabla^E_{e_i}$ do not depend on the choice of $\{e_i\}$ and its dual basis (coframe) $\{e^j\}$.

Proof. Let $\{f_j\}$, $\{f^j\}$ be another frame and its coframe such that $f_j = \sum b_{kj}e_k$, and $f^j = \sum a_{lj}\ e^l$. Then , $< f_j, f^i > = \sum a_{li}\ b_{kj} < e_k, e^l >$

$= \sum a_{li}\, b_{kj}\, \delta_{lk} = \delta_{ij}$ if and only if $\sum a_{ki}\, b_{kj} = \delta_{ij}$, which is equivalent to ${}^t(a_{ij})\ (b_{ij}) = \mathrm{I}$. Therefore , there exists unique inverse matrix $(b_{ij})^{-1}$ $= {}^t(a_{ij})$ such that $(b_{ij})\ {}^t(a_{ij}) = \mathrm{I}$, hence $\sum b_{kj}\, a_{lj} = \delta_{kl}$. Thus we have

$$\sum C(f^j)\ \nabla^E_{f_j} = \sum a_{lj}\, b_{kj}\ C(e^l)\ \nabla^E_{e_k} = \sum \delta_{lk}\ C(e^l)\ \nabla^E_{e_k} = \sum C(e^k)\ \nabla^E_{e_k} \ .$$

This completes our proof . Q.E.D.

§4. Proof

In this section , we write by $A_i = \nabla^E_{e_i}$ ($1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}$) for brevity . In order to show up the Laplacian from the square of Dirac operator D_E , we decompose $\left(\sum C(e^i) A_i\right)\ \left(\sum C(e^j) A_j\right)$ into a sum of three parts T_1, T_2, T_3 as follows .

$$(D_E)^2 = 1/2 \sum \left(C(e^i)C(e^j) + C(e^j)C(e^i) \right) A_i A_j$$

$$+ \sum C(e^i) \left(A_i C(e^j) - C(e^j) A_i \right) A_j$$

$$+ 1/2 \sum C(e^i)C(e^j) \left(A_i A_j - A_j A_i \right)$$

$$= T_1 + T_2 + T_3 \ .$$

Let us calculate the sum of first two parts .

$$T_1 + T_2 = 1/2 \sum (- 2\, g^{ij})\, A_i\, A_j + \sum C(e^i)\, C(\nabla^*_{e_i} e^j)\, A_j$$

$$= - \sum g^{ij}\, A_i\, A_j + \sum C(e^i) \left\{ - \sum \Gamma^j_{ik}\, C(e^k) \right\} A_j$$

$$= - \sum g^{ij}\, A_i\, A_j - \sum 1/2 \left(\sum \Gamma^j_{ik}\, (C(e^i)C(e^k) + C(e^k)C(e^i)\,) \right) A_j$$

$$= - \sum g^{ij}\, A_i\, A_j + \sum (\sum \Gamma^j_{ik}\, g^{ik})\, A_j$$

$$= - \sum g^{ij}\, A_i\, A_j + \sum g^{ij} (\sum \Gamma^l_{ij}\, A_l) = - \sum g^{ij} (A_i A_j - \sum \Gamma^l_{ij}\, A_l) = \Delta .$$

Next let us consider the third part T_3 .

$$T_3 = 1/2 \sum C(e^i)C(e^j) (\nabla^E_{e_i} \nabla^E_{e_j} - \nabla^E_{e_j} \nabla^E_{e_i})$$

$$= 1/2 \sum C(e^i)\, C(e^j)\, R(e_i, e_j)$$

$$= 1/2 \sum C(e^i)\, C(e^j)\, \hat{R}\, (e_i\, ,\, e_j\,) + 1/8 \sum R_{lkij}\, C(e^i)\, C(e^j)\, C(e^k)\, C(e^l).$$

Then , T_3 - C ($\hat{R}$)

$$= 1/8 \sum R_{lkij} \Big\{ 1/6\, \delta_{|<i,j,k>|,3} \Big(\sum (\text{p ; permutation of i,j,k}) \text{ sgn (p)}$$

$$C\, (e^{p(i)}\,)\, C\, (e^{p(j)}\,)\, C\, (e^{p(k)}) \Big) - \delta_{ij}\, C(e^k) - \delta_{jk}\, C(e^i) + \delta_{ki}\, C(e^j) \Big\} C(e^l).$$

$$= 1/8 \left\{ \sum (-R_{ljij})\, C(e^i)\, C(e^l) + \sum R_{liij}\, C(e^j)\, C(e^l) \right\}$$

$$= 1/8 \left\{ \sum (-R_{ljij})\, C(e^i)\, C(e^l) + \sum R_{ijjl}\, C(e^l)\, C(e^i) \right\}$$

$$= 1/8 \sum (-R_{ljij})\, (\, C(e^i)\, C(e^l) + C(e^l)\, C(e^i)\,)$$

$$= 1/8 \sum (-R_{ljij})\, (\, -\, 2\, \delta_{il}\,) = 1/8 \sum (-R_{ijij})\, (\, -\, 2\,) = 1/4\, r_M\ .$$

Thus , we have proved the above generalized Lichnerowicz formula .

Q.E.D.

APPENDIX I

In 1932 , Erwin Schrödinger had already proved so-called Lichnerowicz formula . In fact , one can find the formula (74) in
" Diracsches elektron im Schwerefeld I " (; Collected paper vol. 3 , p.436-460) as follows .

APPENDIX II

The origin of Weitzenböck formula was pointed out by G. de Rham (; p.131 in " Varietes differentiables " (1960)) . In fact , the formula (20) §13 S. 397 (Invariantentheorie (1923)) reminds us of the so-called Weitzenböck decomposition as follows .

$\Delta = \nabla^* \, \nabla$ + Ricci curvature

REFERENCES

[1] N. Berline , E. Getzler , M. Vergne , Heat kernels and Dirac operators , Grundlehren der mathematische Wissenschaften , Springer-Verlag (1992) .

[2] J. Jost , Riemannian geometry and geometric analysis , Universitext , Springer-Verlag , 6 th. edn. (2011) .

[3] A. Lichnerowicz , Spineurs harmoniques , Comptes Rendus Sci. Paris Ser. A. 257 (1963) , 7-9 .

[4] P. Petersen , Riemannian geometry , (second edition) G T M 171 , Springer-Verlag (2006) .

[5] P. Albin , Linear analysis on manifolds , Math. 524 (2012) , 1-67 .

[6] M. Berger , A panoramic view of Riemannian geomety , Springer-Verlag (2003).

.

Makoto Ishibashi

5-22-2 , Takiyama

Higashikurume-shi , TOKYO

203-0033 , JAPAN

Appendix I

Ableitungen ein und derselben Funktion ($-\lg g_{00}$) darstellen, so würden sie in den Spuren der Φ_{kl} reinimaginäre elektromagnetische Feldstärken erzeugen. Das wird so vermieden. — Der Realteil von Spur Γ_0 und die Imaginärteile von Spur Γ_λ ($\lambda = 1, 2, 3$), aus denen die reellen Feldstärken sich ableiten, bleiben nach wie vor frei.

Wir müssen jetzt noch einen Blick auf die reinen unitären Transformationen werfen, die für sich allein auch noch zulässig sind neben den ergänzten Punktsubstitutionen. Das einzige, was zu sagen übrigbleibt, ist, daß eine solche unitäre Transformation, die man vornehmen will, selbstverständlich nach der Vorschrift (53) auch an ψ auszuführen ist. Alsdann ist sie völlig belang- und harmlos. Insbesondere sind die Komponenten der c-Tensoren (57) gegen sie völlig unempfindlich; und die Spurteile, über die in (64) verfügt wurde, ebenfalls.

Die wesentlichen Ergebnisse dieses Abschnittes sind:

1. Die Bestimmung des Transformationsgesetzes (54) und der kovarianten Ableitung (55) für den Spinor.

2. Die Zuordnung der c-Tensorkomponenten zum Tensoroperator nach (57) und der Nachweis, daß sie wirklich als gewöhnliche Tensorkomponenten vom gleichen Range transformieren.

3. Die Aufstellung einer relativ einfachen Formel (61) zur Berechnung der kovarianten Ableitung eines c-Tensors; einer Formel, die hauptsächlich um deswillen von Interesse ist, weil sie zu ihrer Gültigkeit erfordert die an sich willkommene

4. Normierung desjenigen Spurbestandteils von Γ_λ, der ohne Normierung zum Auftreten reinimaginärer elektromagnetischer Feldstärken Anlaß geben würde.

§ 7. Die Diracsche Gleichung.

Der Operator $\gamma^k \nabla_k$ ist eine Invariante, die man passend als »Betrag des Gradienten« bezeichnen kann. Die verallgemeinerte Diracsche Gleichung fordert[1]

$$\gamma^k \nabla_k \psi = \mu \psi, \tag{65}$$

[1] Man könnte allerdings versucht sein, zu »symmetrisieren« und als linke Seite von (65) zu nehmen

$$\tfrac{1}{2}(\gamma^k \nabla_k + \nabla_k \gamma^k)\,. \tag{66}$$

Dieser Ausdruck läßt sich aber umformen. Das Verschwinden der kovarianten Ableitung von γ^k sagt aus:

$$\nabla_l \gamma^k - \gamma^k \nabla_l = -\Gamma_{l\mu}^{\,k} \gamma^\mu\,.$$

Durch Verjüngen entsteht

wo μ eine universelle Konstante

$$\mu = \frac{2\pi m c}{h}.$$

Der nach der Zuordnung (57) zu γ^k gehörige c-Vektor heiße iS^k, also

$$iS^k = \psi^* \gamma_0 \gamma^k \psi. \tag{69}$$

Da die kovariante Ableitung des Operators γ^k verschwindet, reduziert sich diejenige von S^k nach (61) auf

$$iS^k{}_{;\lambda} = \nabla_\lambda \psi^* \gamma_0 \gamma^k \psi + \psi^* \gamma_0 \gamma^k \nabla_k \psi.$$

Bildet man durch Verjüngung die kovariante Divergenz:

$$iS^\lambda{}_{;\lambda} = \nabla_\lambda \psi^* \gamma_0 \gamma^\lambda \psi + \psi^* \gamma_0 \gamma^\lambda \nabla_\lambda \psi,$$

so ist der erste Summand das Negativgenommene, Konjugiert-Komplexe des zweiten[1], dieser aber ist nach (65)

$$\mu \psi^* \gamma_0 \psi,$$

also reell, weil γ_0 hermitesch. Also ist

$$S^\lambda{}_{;\lambda} = 0. \tag{70}$$

So folgt die Quellenfreiheit des Viererstroms, der nach unserer Zuordnung (57) als c-Vektor zum kontravarianten Maßvektor gehört, aus der Dirac-Gleichung und den fundamentalen Gleichungen (8) (vgl. Fock l. c. S. 267).

Wir wollen jetzt die Dirac-Gleichung quadrieren, um das Ergebnis mit dem aus der speziellen Theorie vertrauten zu vergleichen (der Kürze halber werde ψ unterdrückt):

$$\gamma^k \nabla_k \gamma^l \nabla = \mu^2. \tag{71}$$

$$\nabla_k \gamma^k - \gamma^k \nabla_k = -\Gamma_{k\mu}^{k} \gamma^\mu = -\frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x_\mu} \gamma^\mu. \tag{67}$$

Folglich ist

$$\tfrac{1}{2}(\gamma^k \nabla_k + \nabla_k \gamma^k) = \gamma^k \nabla_k - \tfrac{1}{2} \frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x_k} \gamma^k = g^{\frac{1}{4}} g^k \nabla_k g^{-\frac{1}{4}}. \tag{68}$$

Dies ist kein invarianter Operator, was uns nicht zu wundern braucht. $\nabla_k \gamma^k$ ist nämlich keiner und hat auch keine Verpflichtung, es zu sein. Denn wir haben schon oben hervorgehoben, daß das Produkt zweier Tensoroperatoren nur dann sicher Tensoreigenschaft hat, wenn der linke Faktor den Differentiator nicht enthält. Im übrigen würde die Verwendung des Ansatzes (66) doch wieder auf dasselbe hinauslaufen, man müßte bloß $g^{-\frac{1}{4}}\psi$ an die Stelle von ψ treten lassen, das heißt, man müßte $g^{-\frac{1}{4}}\psi$ als Spinor transformieren. Wir bleiben deshalb beim Ansatz (65).

[1] Das hermitesche $\gamma_0 \gamma^0$ wälzt sich als $(\gamma_0 \gamma^0)^*$ auf den ersten Faktor, die schiefen $\gamma_0 \gamma^{\lambda \neq 0}$ als $-(\gamma_0 \gamma^\lambda)^*$. Dafür enthält aber ∇_0 einen Vorzeichenwechsel, $\nabla_{\lambda \neq 0}$ nicht. Vergleiche das oben zu Gleichung (60) im Text Bemerkte sowie auch die Anmerkung zu Gleichung (56).

Man vertausche die ersten beiden Faktoren mittels Gleichung (67) (in der Anmerkung) und verwende, daß nach (2) und (12)

$$\gamma^k \gamma^l = g^{kl} + s^{kl}. \tag{72}$$

So kommt

$$\nabla_k (g^{kl} + s^{kl}) \nabla_l + \frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x_\mu} \gamma^\mu \gamma^l \nabla_l = \mu^2.$$

Aus dem Verschwinden der kovarianten Ableitung von s^{kl} folgt

$$\nabla_k s^{kl} - s^{kl} \nabla_k = - \frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x_\mu} s^{\mu l}.$$

So kommt [mit nochmaliger Verwendung von (72)]:

$$\nabla_k g^{kl} \nabla_l + s^{kl} \nabla_k \nabla_l + \frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x_\mu} g^{\mu l} \nabla_l = \mu^2.$$

Das zweite Glied ist nach (26) und wegen der Antisymmetrie der s^{kl} gleich $-\frac{1}{2} s^{kl} \Phi_{kl}$. Das erste und dritte (wo man μ durch k ersetze) vereinigen sich zur verallgemeinerten Laplaceschen Operation; man erhält also schließlich:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \nabla_k \sqrt{g}\, g^{kl} \nabla_l - \frac{1}{2} s^{kl} \Phi_{kl} = \mu^2. \tag{73}$$

Es ist interessant, hier für Φ_{kl} den viel früher gefundenen Ausdruck (15) einzusetzen. Dabei tritt die Invariante

$$\frac{1}{8} R_{kl,\mu\nu} s^{kl} s^{\mu\nu}$$

auf. Wegen der Symmetrie des kovarianten Riemannschen Krümmungstensors im ersten und zweiten Indexpaar ist das auch gleich

$$\frac{1}{16} R_{kl,\mu\nu} (s^{kl} s^{\mu\nu} + s^{\mu\nu} s^{kl}).$$

Wenn man nun — was ich hier nicht in extenso durchführen will — die symmetrischen Produkte der s^{kl} wirklich ausrechnet, sodann von der bekannten zyklischen Symmetrie

$$R_{kl,\mu\nu} + R_{l\mu,k\nu} + R_{\mu k,l\nu} = 0$$

Gebrauch macht, erhält man schließlich

$$\frac{1}{8} R_{kl,\mu\nu} s^{kl} s^{\mu\nu} = - \frac{1}{4} g^{k\mu} g^{l\nu} R_{kl,\mu\nu} = - \frac{R}{4},$$

wo R die invariante Krümmung. Mithin ergibt das Einsetzen von Φ_{kl} nach (15) in (73) folgendes:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \nabla_k \sqrt{g}\, g^{kl} \nabla_l - \frac{R}{4} - \frac{1}{2} f_{kl} s^{kl} = \mu^2. \tag{74}$$

In dem dritten Gliede linker Hand erkennt man die wohlvertraute Einwirkung der Feldstärke auf den Spintensor, und zwar ist in f_{kl} bereits der reine Spuranteil von Φ_{kl} abgelöst, der also wohl im eigentlichen Sinne als Feldstärke zu bezeichnen ist und, wie öfters erwähnt, durch die Metrik noch völlig freigelassen wird.

Das zweite Glied scheint mir von erheblichem theoretischen Interesse. Es ist freilich um viele, viele Zehnerpotenzen zu klein, um etwa das Glied rechter Hand ersetzen zu können. Denn μ ist die reziproke Compton-Wellenlänge, ungefähr $10^{11}\,\mathrm{cm}^{-1}$. Immerhin scheint es bedeutungsvoll, daß in der verallgemeinerten Theorie überhaupt ein mit dem rätselhaften Massenglied gleichartiges ganz von selber angetroffen wird[1].

---

[1] S. a. O. Veblen und B. Hoffmann, Phys. Rev. 36, 821, 1930.

Ausgegeben am 30. April.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Appendix II

so wie es die rechte Seite von (1) verlangt, so heben sich alle Glieder mit den Dreiindizessymbolen Γ weg und es bleibt:

(9) $$\begin{cases} Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}} = X_{\alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}(\alpha_1)} - X_{\alpha_1 \alpha_3 \ldots \alpha_{p+1}(\alpha_2)} + \cdots \\ \qquad \cdots + (-1)^p X_{\alpha_1 \ldots \alpha_p (\alpha_{p+1})}. \end{cases}$$

Hier ist der Tensorcharakter der Y unmittelbar abzulesen, was bei (1) nicht der Fall ist. Hingegen zeigen (1) und (9) in gleicher Weise, daß Y alterniert.

An Grenzfällen heben wir hervor: 1. $p = 0$; auf diesen Wert von p, bei dem dann X eine absolute Invariante ist, kann die Definition des Stokesschen Tensors ausgedehnt werden durch die Festsetzung

(10) . . . . $$Y_\alpha = \frac{\partial X}{\partial x_\alpha} = X_{(\alpha)}.$$

Der Stokessche Tensor ist hier ein kovarianter Vektor: der *Gradient* von X.

2. $p = 1$; hier ist

(11) . . . . $$Y_{\alpha_1 \alpha_2} = X_{\alpha_2(\alpha_1)} - X_{\alpha_1(\alpha_2)} = \frac{\partial X_{\alpha_2}}{\partial x_{\alpha_1}} - \frac{\partial X_{\alpha_1}}{\partial x_{\alpha_2}},$$

also gleich der negativen Rotation des Vektors X_α.

3. $p = n - 1$; hier zeigt (9), daß der Ausdruck

(12) $$Y_{12\ldots n} = X_{23\ldots n(1)} - X_{13\ldots n(2)} + \cdots + (-1)^{n-1} X_{12\ldots n-1(n)}$$

eine skalare Dichte (= relative Invariante vom Gewichte Eins) wird.

§ 13. Der Brouwersche Tensor.

Die Operation D' erzeugt aus einem alternierenden Tensor $X_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ p^{ter} Stufe einen ebensolchen Tensor $Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}}$ $(p+1)^{ter}$ Stufe: den *Stokes*schen Tensor $Y = D'X$.

D' *erhöht* also die Stufenzahl um Eins.

In einer metrischen Mannigfaltigkeit gibt es eine Operation D'', die die Stufenzahl p von X um eine Einheit *erniedrigt* und aus $X_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ einen alternierenden Tensor $(p-1)^{ter}$ Stufe Z erzeugt:

(1) . . . . $$Z_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}} = D'' X_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}.$$

Dieser Zusammenhang wurde für den Fall Euklidischer Maßbestimmung (g_{ik} = konst.) zuerst von *Brouwer*[1]) festgestellt; wir nennen daher Z den *Brouwer*schen Tensor.

[1]) Amsterdamer Berichte 26. Mai 1906 und 28. Juni 1919.

Bei beliebigen g_{ik} erhält man Z wie folgt: Wir bringen in $X_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ vorerst den Index α_p nach oben: $X_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}\,0}^{\alpha_p}$. Von diesem gemischten Tensor bilden wir die kovariante Ableitung $X_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}\,0\,(\nu)}^{\alpha_p}$ und verjüngen dann bezüglich α_p und ν:

(2) $$Z_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}} = X_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1},\,0,\,(\nu)}^{\nu}.$$

Bei konstanter g_{ik} geht dies über in[1]):

(3) $$\begin{cases} Z_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}} = \dfrac{\partial X_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}\,\alpha_p}}{\partial x_{\alpha_p}} + \dfrac{\partial X_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}\,\alpha_{p+1}}}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} + \cdots \\ \qquad \cdots + \dfrac{\partial X_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}\,\alpha_n}}{\partial x_{\alpha_n}} = \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} \dfrac{\partial X_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}\,\nu}}{\partial x_\nu}. \end{cases}$$

Mit den beiden Operationen D' und D'', die aus einem alternierenden Tensor p^{ter} Stufe $X_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ den *Stokes*schen bezw. den *Brouwer*schen Tensor erzeugen:

(4) $$D'X = Y \qquad D''X = Z$$

hat man ein Mittel zur Hand, die Stufenzahl p nach Belieben um je eine Einheit zu erhöhen bezw. zu erniedrigen. Im besonderen sind $D''D'X$ und $D'D''X$ wieder von p^{ter} Stufe.

Die kombinierte Anwendung von D' und D'' auf einen Tensor X ergibt eine Reihe von Sätzen, die zum Teil bereits von *Brouwer* bewiesen wurden und von denen wir die wichtigsten herausgreifen.

Zunächst betrachten wir einige Grenzfälle bezüglich der Operation D''.

1. $p = 1$; hier ist X_α ein kovarianter Vektor. Nach (2) haben wir

(5) $$Z = X_{0(\nu)}^{\nu} = X_{(\nu)}^{\nu},$$

also wird hier $D''X_\alpha$ eine absolute Invariante, für die wir nach XIII § 12 S. 334 auch schreiben können:

(6) $$Z = D''X_\alpha = X_{(\nu)}^{\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial\left(X^\nu \sqrt{g}\right)}{\partial x_\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\mathrm{Div}\,X^\nu.$$

2. $p = n$; hier ist $X = X_{12\ldots n}$ eine skalare Dichte (vgl. § 1 dieses Abschnittes), so daß also $X : \sqrt{g}$ eine absolute Invariante wird. Wir haben nach XIII § 11 S. 333

(7) $$Z_{12\ldots n-1} = X_{12\ldots n-1,\,0,\,(\nu)}^{\nu} = \left(g^{\nu n} X_{12\ldots n}\right)_{(\nu)} = g^{\nu n} X_{12\ldots n\,(\nu)}$$

und für $X_{12\ldots n\,(\nu)}$ erhalten wir nach S 331:

---

[1]) Bei *Brouwer* hat Z das Vorzeichen $(-1)^{p-1}$.

$$X_{12\ldots n\,(\nu)} = \frac{\partial X}{\partial x_\nu} - \Gamma^{\lambda}_{1\nu}\, X_{\lambda 2\ldots n} - \Gamma^{\lambda}_{2\nu}\, X_{1\lambda 3\ldots n} - \cdots$$

$$\cdots - \Gamma^{\lambda}_{n\nu}\, X_{12\ldots n-1,\lambda} = \frac{\partial X}{\partial x_\nu} - X \cdot \sum_{\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu},$$

oder wegen

$$\sum_{\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_\nu}:$$

(8) . . . . $$X_{12\ldots n\,(\nu)} = \frac{\partial X}{\partial x_\nu} - \frac{X}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_\nu} = \sqrt{g}\cdot \frac{\partial\left(\frac{X}{\sqrt{g}}\right)}{\partial x_\nu}.$$

Hier ist $\frac{X}{\sqrt{g}}$ eine absolute Invariante, ihre Ableitungen geben also einen kovarianten Vektor

(9) . . . . $$A_i = \frac{\partial\left(\frac{X}{\sqrt{g}}\right)}{\partial x_i};$$

auf der rechten Seite von (8) steht somit eine kovariante Vektordichte und nach (7) wird:

(10) . . . . $$Z_{12\ldots n-1} = A^n \sqrt{g}.$$

Für $p = n$ geht also der *Brouwer*sche Tensor $D''\,X_{12\ldots n}$ über in eine kontravariante Vektordichte.

Wir wissen, daß $D'\,D'\,X \equiv 0$ ist; untersuchen wir nun $D''\,D''\,X$. Nach (2) ist ($p \geqq 2$):

(11) . . . $$D''\,D''X = V_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-2}} = X_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-2},\,\overset{\mu}{0},\,\overset{\nu}{0},\,(\nu)(\mu)}.$$

Wenden wir auf $X_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-2},\,r,\,s,\,(\nu)(\mu)}$ die Identität von *Ricci* an (vgl. XIII § 17 S. 345), so kommt:

(12) $$\left\{\begin{aligned} X_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-2},\,r,\,s,\,(\nu)(\mu)} &= X_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-2},\,r,\,s,\,(\mu)(\nu)} + R^{\varrho}_{0\alpha_1,\,\nu\mu}\, X_{\varrho\,\alpha_2\ldots} + \\ &+ R^{\varrho}_{0\alpha_2,\,\nu\mu}\, X_{\alpha_1\varrho\ldots} + \cdots + R^{\varrho}_{0\alpha_{p-2},\,\nu\mu}\, X_{\alpha_1\ldots\varrho,\,r,\,s} + \\ &+ R^{\varrho}_{0r,\,\nu\mu}\, X_{\alpha_1\ldots\varrho s} + R^{\varrho}_{0s,\,\nu\mu}\, X_{\alpha_1\ldots r\varrho}\,. \end{aligned}\right.$$

Multiplikation mit $g^{\mu r}\,g^{\nu s}$ gibt links den Tensor (11). Rechts wird das erste Glied mit

$$X_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-2},\,\overset{\mu}{0},\,\overset{\nu}{0},\,(\mu)(\nu)} = - X_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-2},\,\overset{\mu}{0},\,\overset{\nu}{0},\,(\nu)(\mu)},$$

also mit der negativen linken Seite identisch. Das vorletzte Glied der rechten Seite von (12) gibt:

$$R^{\varrho\,\mu}_{0\,0,\,\nu\mu}\, X_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-2},\,\varrho,\,0}^{\quad\quad\quad\;\;\nu} = R^{\varrho}_{\nu}\, X_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-2},\,\varrho,\,0}^{\quad\quad\quad\;\;\nu} =$$
$$= R^{\varrho\nu}\, X_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-2},\,\varrho\,\nu} \equiv 0;$$

genau so verschwindet der letzte Term in (12) und wir erhalten:

$$(13)\quad \begin{cases} 2D''\,D''\,X_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = R_{\varrho\,\alpha_1,\,\nu\mu}\, X^{\varrho\quad\quad\quad\quad\mu\,\nu}_{0\,\alpha_2 \dots \alpha_{p-2},\,0,\,0} + \\ + R_{\varrho\,\alpha_2,\,\nu\mu}\, X_{\alpha_1\,0\,\alpha_3 \dots \alpha_{p-2},\,0,\,0}^{\quad\varrho\quad\quad\quad\;\mu\,\nu} + \dots + R_{\varrho\,\alpha_{p-2},\,\nu\mu}\, X_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-3},\,0,\,0,\,0}^{\quad\quad\quad\;\varrho\,\mu\,\nu}. \end{cases}$$

Vertauschen wir hier rechts im ersten Gliede erst ϱ mit μ und dann ϱ mit ν, so ändern sich wegen des Alternierens von X die Zeichen. Addition ergibt dann

$$6\,D''\,D''\,X = \sum_{a} X^{\varrho\quad\quad\quad\quad\mu\,\nu}_{0\,\alpha_2 \dots \alpha_{p-2},\,0,\,0}\left[R_{\varrho\,\alpha_1,\,\nu\mu} - R_{\mu\,\alpha_1,\,\nu\varrho} - R_{\nu\,\alpha_1,\,\varrho\mu}\right].$$

Hier verschwinden nun die Ausdrücke in der eckigen Klammer wegen der zyklischen Symmetrie des Krümmungstensors. Also kommt[1]):

$$(14)\quad \dots\dots\dots\quad D''\,D''\,X_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \equiv 0.$$

Es gilt also für die zweimalige Ausführung der Operation D'' das gleiche wie bei D'.

Wir berechnen jetzt noch $D''\,D'\,X$ und $D'\,D''\,X$.

Aus (9) § 12 S. 393 oder

$$D'\,X_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = X_{\alpha_2 \dots \alpha_{p+1}(\alpha_1)} - X_{\alpha_1\,\alpha_3 \dots \alpha_{p+1}(\alpha_2)} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^p\, X_{\alpha_1 \dots \alpha_p\,(\alpha_{p+1})}$$

finden wir nach (2):

$$(15)\quad \begin{cases} D''\,D'\,X = A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = X_{\alpha_2 \dots \alpha_p,\,0,\,(\alpha_1)(\nu)}^{\quad\quad\quad\;\;\nu} - \cdots \\ \cdots + (-1)^{p-1}\, X_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1},\,0,\,(\alpha_p)(\nu)}^{\quad\quad\quad\quad\;\nu} + (-1)^p\, X_{\alpha_1 \dots \alpha_p\,(0)(\nu)}^{\quad\quad\quad\;\nu}. \end{cases}$$

Anderseits gibt (9) § 12 S. 393 aus

$$D''\,X_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = X_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1},\,0,\,(\nu)}^{\quad\quad\quad\quad\;\nu}:$$

$$(16)\quad \begin{cases} D'\,D''\,X = B_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = X_{\alpha_2 \dots \alpha_p,\,0,\,(\nu)\,(\alpha_1)}^{\quad\quad\quad\;\;\nu} - \cdots \\ \cdots + (-1)^{p-1}\, X_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1},\,0,\,(\nu)\,(\alpha_p)}^{\quad\quad\quad\quad\;\nu}. \end{cases}$$

Daher erhält man durch Subtraktion:

$$(17)\quad \begin{cases} (D''D' - D'D'')X = U_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \sum_{\alpha_1}^{\alpha_p} \pm \left\{X_{\alpha_2 \dots \alpha_p,\,0,\,(\alpha_1)(\nu)}^{\quad\quad\quad\;\;\nu} - X_{\alpha_2 \dots \alpha_p,\,0,\,(\nu)(\alpha_1)}^{\quad\quad\quad\;\;\nu}\right\} + \\ + (-1)^p\, X_{\alpha_1 \dots \alpha_p\,(0)\,(\nu)}^{\quad\quad\quad\;\nu}. \end{cases}$$

[1]) *L. E. J. Brouwer*, l. c. S. 19.

Für die Differenzen

$$X_{\alpha_2\ldots\alpha_p,\overset{\lambda}{0},(\alpha_1)(\nu)} - X_{\alpha_2\ldots\alpha_p,\overset{\lambda}{0},(\nu)(\alpha_1)} = X_{\alpha_2\ldots\alpha_p,\overset{\lambda}{0},[\alpha_1\nu]}$$

erhalten wir nach der Identität von *Ricci* (vgl. XIII § 17 S. 345):

$$(18)\quad \begin{cases} X_{\alpha_2\ldots\alpha_p,\overset{\lambda}{0},[\alpha_1\nu]} = R^{\varrho}_{0\alpha_2,\alpha_1\nu} X_{\varrho\alpha_3\ldots\alpha_p,\overset{\lambda}{0}} + \cdots + R^{\varrho}_{0\alpha_p,\alpha_1\nu} X_{\alpha_2\ldots\varrho,\overset{\lambda}{0}} + \\ \qquad + R^{\varrho\,\lambda}_{0\,0,\alpha_1\nu} X_{\alpha_2\ldots\alpha_p\varrho}. \end{cases}$$

Setzen wir hier $\lambda = \nu$, so wird im letzten Gliede

$$R^{\varrho\,\nu}_{0\,0,\alpha_1\nu} = R^{\varrho}_{\alpha_1}$$

und daher:

$$(19)\quad \begin{cases} X_{\alpha_2\ldots\alpha_p,\overset{\nu}{0},[\alpha_1\nu]} = R^{\varrho}_{0\alpha_2,\alpha_1\nu} X_{\varrho\alpha_3\ldots\alpha_p,\overset{\nu}{0}} + \cdots + R^{\varrho}_{0\alpha_p,\alpha_1\nu} X_{\alpha_2\ldots\varrho,\overset{\nu}{0}} + \\ \qquad + R^{\varrho}_{\alpha_1} X_{\alpha_2\ldots\alpha_p\varrho}. \end{cases}$$

Dies bilden wir mit wechselndem Vorzeichen für $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$ und setzen es rechter Hand in (17) ein. Man erhält:

$$(20)\quad \begin{cases} U_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \sum\limits_{(i,k)} \pm 2 R_{\varrho\alpha_i,\alpha_k\nu} X_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\alpha_{i+1}\ldots\alpha_{k-1}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_p,\overset{\varrho\,\nu}{0\,0}} + \\ + R^{\varrho}_{\alpha_1} X_{\alpha_2\ldots\alpha_p\varrho} - R^{\varrho}_{\alpha_2} X_{\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_p\varrho} + \cdots + (-1)^{p+1} R^{\varrho}_{\alpha_p} X_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\varrho} + \\ \qquad + (-1)^p X_{\alpha_1\ldots\alpha_p\overset{\nu}{(0)}(\nu)}. \end{cases}$$

Bis auf das letzte Glied[1]) stehen also rechts nur lineare Kombinationen der $X_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$. Sind die g_{ik} konstant, so bleibt nur dieses letzte Glied stehen und wir haben[2])

$$(21)\quad U_{\alpha_1\ldots\alpha_2} \doteq (D''D' - D'D'')X_{\alpha\ldots\alpha_p} = (-1)^p \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{\partial^2 X_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}{\partial x_\nu^2}.$$

---

[1]) Es sei auf den Unterschied zwischen $X_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\overset{\nu}{0}(\nu)}$ und $X_{\alpha_1\ldots\alpha_p\overset{\nu}{(0)}(\nu)}$ hingewiesen. Der zweite dieser Tensoren entsteht so: $X_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ wird kovariant abgeleitet: $X_{\alpha_1\ldots\alpha_p(\lambda)}$; dann wird λ hinaufgebracht: $X_{\alpha_1\ldots\alpha_p\overset{\lambda}{(0)}}$, dann wird abermals kovariant abgeleitet: $X_{\alpha_1\ldots\alpha_p\overset{\lambda}{(0)}(\nu)}$; schließlich wird bezüglich λ und ν verjüngt: $X_{\alpha_1\ldots\alpha_p\overset{\nu}{(0)}(\nu)} = X_{\alpha_1\ldots\alpha_p(\mu)(\nu)}g^{\mu\nu}$.

[2]) *L. E. J. Brouwer*, l. c.