佐藤スクールと Hyperfunction
- 表現論への応用 -

佐野　茂（Shigeru SANO）*

1　歴史的背景

佐藤幹夫先生の huperfunction の理論は有能な人達の協力を得て成果をあげてきたのは良く知られている．日本で開花した研究の歩みを距離をおいた客観的な立場からまとめてみたい．当時活躍した多くの若き数学徒も今では大家となっているが，数学史研の慣習に従い今後敬称はすべて省略させていただく．

１９世紀の末に工学者の Heaviside は

$$Y(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$$

なる関数を科学技術に使っている．２０世紀に入り Dirac は科学現象を扱うために次の条件を満足する δ 関数を考えた．

(i)　$\delta(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ \infty & x=0\end{cases}$

(ii)　$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$

(iii)　$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0)$

これらの関数には

$$Y'(x)=\delta(x)$$

なる関係がある．こうした科学技術者のおおらかな論理を数学的に正当化しようと L.Schwartz は Distribution の理論を作った．

コンパクトな台をもつ無限回微分可能な関数空間 $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ に適当に位相を入れて汎関数 $\mathscr{D}(\mathbf{R})\to\mathbf{C}$ により Distribution は定義される．例えばベビサイド関数やデラック関数は $\varphi(x)\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$ に対し

$$<Y,\varphi>=\int_0^{\infty}\varphi(x)dx,\qquad\qquad <\delta,\varphi>=\varphi(0)$$

となる．微分は $<Y',\varphi>=-<Y,\varphi'>$ と定義すると

$$<Y',\varphi>=-\int_0^{\infty}\varphi'(x)dx=\varphi(0)=<\delta,\varphi>$$

明確に $Y'(x)=\delta(x)$ が示せる．

この L.Schwartz の Distribution 理論を佐藤幹夫は学生のときに知り感銘を受けたが，関数空間 $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ に解析関数が入っていないのは不自然だと違和感をもっている．

* 職業能力開発総合大学校 (Polytechnic University of Japan), 東京都小平市, e-mail address: shgrsano@gmail.com

2 Hyperfunction 誕生

2.1 1変数の hyperfunction

佐藤幹夫は寺沢寛一の『数学概論』で楕円函数，微分方程式，積分方程式，グリーン函数などを夢中になって読んでいる．中でもハミルトン-ヤコビの理論やモンジュ-アンペールの方程式など具体的な内容に惹かれている．そうした数学観からデルタ関数を次の様に解釈している．コーシーの積分定理より解析関数 $\varphi(x)$ に対し，原点の周りの正の向きの積分路 C において

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{z}dz = \varphi(0)$$

となるが，$C = -C_+ + C_-$ と積分路を上半 C_+ と下半 C_- に分けると

$$\int_{C_+}\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\frac{\varphi(z)}{z}dz - \int_{C_-}\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\frac{\varphi(z)}{z}dz$$

$$= \int_{a+i0}^{b+i0}\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\frac{\varphi(z)}{z}dz - \int_{a-i0}^{b-i0}\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\frac{\varphi(z)}{z}dz$$

$$= \int_a^b \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right)\varphi(z)dz$$

ゆえに

$$\delta(x) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right)$$

と解釈できる．この例を参考にして，部分集合 $V \subset \mathbf{R}$ の複素近傍 W をとり

$$\mathscr{B}(V) = \varinjlim_{W \supset V} \mathscr{O}(W \backslash V)/\mathscr{O}(W) \qquad (2.1)$$

を hyperfunction の空間と定義する．

2.2 多変数の hyperfunction

チェックコホモロジーを用いて多変数関数の hyperfunction を定義する．$X = \mathbf{C}^n$ とし，$\mathscr{W} = \{W_i | i \in I\}$ を X の開被覆とする．写像

$$\varphi : \ I^{p+1} \ni (i_0, ..., i_p) \longrightarrow \varphi_{i_0,...,i_p} \in \mathscr{O}(W_{i_0} \cap ... \cap W_{i_p})$$

が任意の置換 $\sigma : I^{p+1} \to I^{p+1}$ に対して

$$\varphi_{\sigma(i_0),...,\sigma(i_p)} = sgn(\sigma)\ \varphi_{i_0,...,i_p}$$

を満足するとき，p-交代コチェインと言う．p-交代コチェイン全体の集合を $C^p(\mathscr{W};\mathscr{O})$ と表す．双対境界作用素

$$d^p : C^p(\mathscr{W};\mathscr{O}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathscr{W};\mathscr{O})$$

を

$$(d^p\varphi)_{i_0,\dots,i_{p+1}}=\sum_{m=0}^{p+1}(-1)^m\varphi_{i_0,\dots,i_{m-1},i_{m+1},\dots,i_{p+1}}|_{W_{i_0}\cap\dots\cap W_{i_{p+1}}}$$

で定義する．$\mathscr{W}$ に関する n 次チェックコホモロジー空間を

$$\mathrm{H}^p(\mathscr{W};\mathscr{O})=\mathrm{Ker}\ d^p/\mathrm{Im}\ d^{p-1}$$

で定義する．

$\mathscr{V}=\{V_j|j\in J\}$ を X のもう 1 つの開被覆で $\mathscr{W}$ より細かいとする，すなわち各 V_j は適当な W_i に含まれる．自然な準同形写像

$$h^n(\mathscr{W},\mathscr{V}):\ \mathrm{H}^p(\mathscr{W};\mathscr{O})\longrightarrow\mathrm{H}^p(\mathscr{V};\mathscr{O})$$

が与えられる．こうした開被覆の順序に関する帰納的極限により決まる

$$\mathrm{H}^p(X;\mathscr{O})=\varinjlim\mathrm{H}^p(\mathscr{W};\mathscr{O})$$

ベクトル空間を $\mathscr{O}(X)$ の p 次チェックコホモロジー空間という．

X の閉部分空間 $Y=\mathbf{R}^n$ をとり，X と Y に関する対の開被覆 $(\mathscr{W},\mathscr{W}')$ を与える．すなわち $\mathscr{W}'=\{W_i\}_{i\in I'}$ は $X\backslash Y$ の開被覆で X の開被覆 $\mathscr{W}=\{W_i\}_{i\in I}$ は $\mathscr{W}'$ を含む $(I'\subset I)$．この開被覆 $(\mathscr{W},\mathscr{W}')$ に関して，p-交代コチェイン $\varphi\in C^p(\mathscr{W};\mathscr{O})$ で

$$\varphi_{i_0,\dots,i_p}=0\qquad i_0,\dots,i_p\in I'$$

を満足する $C^p(\mathscr{W};\mathscr{O})$ の部分空間を $C^p(\mathscr{W},\mathscr{W}';\mathscr{O})$ で表す．

$(\mathscr{V},\mathscr{V}')$ をもう 1 つの対の開被覆で $\mathscr{V}$ と $\mathscr{V}'$ はそれぞれ $\mathscr{W}$ と $\mathscr{W}'$ より細かいとする．このとき $C^p(\mathscr{W},\mathscr{W}';\mathscr{O})$ から $C^p(\mathscr{V},\mathscr{V}';\mathscr{O})$ への自然な準同形写像がある．この開被覆の順序に関する帰納的極限により

$$\mathrm{H}^p_Y(X;\mathscr{O})=\varinjlim\mathrm{H}^p(\mathscr{W},\mathscr{W}';\mathscr{O})\qquad(2.2)$$

を与える．$\mathbf{R}^n$ の開領域 V をとると，$Y=V$ に対しても同様に $\mathrm{H}^p_V(X;\mathscr{O})$ が定まる．

定理 1

$$\mathrm{H}^p_V(X;\mathscr{O})=0\ \ p\neq n,\qquad\mathrm{H}^n_V(X;\mathscr{O})\neq0$$

定義 hyperfunction の層 $\mathscr{B}$ を $\mathbf{R}^n$ の開領域 V に切断

$$\mathscr{B}(V)=\mathrm{H}^n_V(X;\mathscr{O})\qquad(2.3)$$

を対応させ定義する．

ここではチェックコホモロジーによる分かりやすい定義を採用した．佐藤幹夫は 1 変数と多変数の hyperfunction の論文を 1959 年に立て続けに発表している．この論文の中でもチェックコホモロジーによる hyperfunction の定義を考えているが，正確な定式化は後に小松彦三郎が行っている ([Ko])．

この hyperfunction の論文を読むと自然に次の疑問が出てくる．

Q1．1 変数の理論は分かりやすくて良いが，多変数理論ではコホモロジーを使って理解しにくい．多変数の hyperfunction にも理解しやすい自然な導入の仕方があるのではないか．

Q2．すでに distiribution の理論があり，hyperfunction の理論は本当に必要なのか．distiribution よりすぐれた所はあるのか．

Q3．数学上の応用は何か．

Q4. サイエンスへの応用は何か.

こうした疑問をよそに，論文発表後のパリでの反響は早かった．ブルバキセミナー (1960/1961) で Martineau は"Les hyperfonctions de M.Sato"という題で講演している．

佐藤幹夫は論文発表後渡米し，プリンストンに滞在して新理論を講演しているが周りがみな冷淡なので拍子抜けしている．この理論をもっと具体的な問題，微分方程式などに応用したいと思っていたが，だれにも理解されないことを一生懸命やってもしょうがないと回顧している．恐らく Q1,Q2 などの理由から理論の魅力が理解されなかったためだろう．

他方，理論の魅力をいち早く見抜いた小松彦三郎はカリフォルニアのスタンフォード大学でハーヴェイに佐藤の論文を勉強させ証明を完成するように指導している（文献 [Ha]）．そして hyperfunction の微分方程式への応用を試み始める．こうした動きを知らない佐藤幹夫は hyperfunction を離れ概均質ベクトル空間を考え始めていた．杉浦光夫らの努力で東大の教養学部に招かれ，佐藤幹夫は再び hyperfunction に取り組み始めた．

3 多変数 hyperfunction の自然な導入

$Y = \mathbf{R}^n$ の開領域 V をとり、正則関数を用いて $\mathscr{B}(V)$ を正確に与えよう．W を $X = \mathbf{C}^n$ の正則領域で $V = W \cap \mathbf{C}^n$ を満足しているとする．W の部分集合

$$W_j = \{z = (z_1, ..., z_n) \in W : \mathrm{Im}\, z_j \neq 0\} \qquad j = 1, ..., n$$

をとり $\mathscr{W}' = \{W_1, ..., W_n\}$ そして $\mathscr{W} = \mathscr{W}' \cup \{W\}$ とおく．X と Y に関する対の開被覆 $(\mathscr{W}, \mathscr{W}')$ によりコホモロジー空間を定義に従い求めると

$$\mathscr{B}(V) \cong \frac{\mathscr{O}(\{z \in W : \mathrm{Im}\, z_j \neq 0\ \forall j\})}{\sum_{k=1}^{n} \mathscr{O}(\{z \in W : \mathrm{Im}\, z_j \neq 0\ \forall j \neq k\})} \tag{3.1}$$

となる．

Martineau は 1970 に"edge of the wedge theorem"を発表している．

定理 (Martineau) 任意の部分集合 $V \subset \mathbf{R}^n$ に $V \subset W \subset \mathbf{C}^n$ なる複素近傍 W をとると，任意の $f \in \mathscr{B}(V)$ に対して凸開集合 $\Gamma_i (i \in I)$ と正則関数 $F_i \in \mathscr{O}(W \cap (V + \sqrt{-1}\Gamma_i))$ が存在して

$$f = \sum_{i=1}^{I} b_{\Gamma_i}(F_i) \tag{3.2}$$

となる．

1 変数 hyperfunction を正則関数の境界により定義したが，この edge of the wedge が多変数 hyperfunction の正則関数の境界による自然な定式化を与えている．佐藤幹夫は一松信からこの論文の存在を教わっている．パリでの熱心な研究活動をこの時期まで気が付いていなかったのである．

4 層 C での超局所解析

佐藤幹夫は 1970 年に数理研に移って，Martineau の"edge of the wedge theorem"を利用して hyperfunction の特異点の周りを拡大する層 $\mathscr{C}$ の概念に到達している．自然な射影

$$\pi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbf{R}^n$$

から，開集合 $V \subset \mathbf{R}^n$ に対して

$$0 \to \mathscr{A}(V) \overset{\alpha}{\to} \mathscr{B}(V) \overset{\beta}{\to} \mathscr{C}(\pi^{-1}(V)) \to 0$$

という層の完全列が成り立つ．層 $\mathscr{C}$ を microfunction の層という．β という写像が重要で，これはちょうど光をプリズムをあてて 7 色に分析するように，hyperfunction の構造を分析するものであると述べている．そして柏原正樹は層 $\mathscr{C}$ が脆弱層となることを示した ([Ka])．これは従来の distribution にはない性質で hyperfunction の重要性が認められるようになっていった．

5　微分方程式への応用

5.1　正則特異点をもつ方程式

ここでは表現論と対称空間上の調和解析に必要な微分方程式にしぼってまとめる．ユークリッド空間 $M = \mathbf{R}^{n+k}$ において，局所座標を $(x,t) = (x_1,,...,x_n,t_1,...,t_k)$ とする．M の超平面 $N_1,...,N_k$ を

$$N_j = \{(x,t):\ t_j = 0\} \qquad j = 1,...,k$$

で定義して $N = N_1 \cap ... \cap N_k$ とおく．

$P_1,...,P_k$ を M 上の次数がそれぞれ $r_1,...r_k$ の実微分作用素とし，微分方程式系

$$\mathscr{M} : P_j u = 0 \qquad (j = 1,...,k) \qquad (5.1)$$

を考える．簡明のために $P_1,...,P_k$ は互いに可換と仮定する．

定義　N をエッジとする壁 $N_1,...,N_k$ に沿って方程式系 $\mathscr{M}$ が正則特異点をもつとは次の条件を満足することである．

(1) $P_j = P_j\left(x,t,t\frac{\partial}{\partial x},t\frac{\partial}{\partial t}\right)$ とする．ここで各点 (x,t) において $P_j(x,t,z,s)$ は変数 $z \in \mathbf{C}^{kn}$ と $s \in \mathbf{C}^k$ の多項式である．また

$$t\frac{\partial}{\partial x} = \left(t_j\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\ j = 1,...,k; i = 1,...,n \qquad t\frac{\partial}{\partial t} = \left(t_j\frac{\partial}{\partial t_j}\right)\ j = 1,...,k$$

である．

(2) 任意の x に対して $a_j(x,s) = P_j(x,0,0,s)$ の次数は r_j である．各 x において $s = 0$ のみが

$$a_1^o(x,s) = ... = a_k^o(x,s) = 0$$

の解となる．ただし，$a_j^o(x,s)$ は $a_j(x,s)$ の次数 r_j の同次部分である．

多項式 $a_j(x,s)$ を P_j の指示多項式という．そして方程式

$$a_1(x,s) = ... = a_k(x,s) = 0$$

の解 $s(x) \in \mathbf{C}^k$ を $\mathscr{M}$ の特性指数という．

定義　N をエッジとする壁 $N_1,...,N_k$ に沿って方程式系 $\mathscr{M}$ が弱い意味で正則特異点をもつとは，適当な正の整数 m が存在して変数変換 $t_j = (t'_j)^m$ により方程式系が条件 (1),(2) を満足することである．