Abstract

Origin of Halo Notation

Suzuki Shinji

This paper aims to investigate the origins of halo notation, also called actuarial notation. Numerous authors such as Heinrich Braun, Frank P. Di Paolo, John Boermeester, and Tsuneto Yamauchi, have provided a common theory about the subject. However, they are partial and not necessarily consistent with one another. Therefore, in this paper, I attempt to consistently summarize various viewpoints. Furthermore, a fresh insight into this subject has been provided herein that the characteristic subsymbol ㄱ with a halo was derived from Newton's symbol for exponents found in the letter that Newton wrote to Oldenburg in 1673.

To demonstrate this hypothesis, I investigated Newton's symbol for exponents used from the 18th to the middle of the 19th century in the UK. I learned that Newton's symbol was used even in the early 19th century, while Leibniz was being accused of plagiarism.

It also prepared a short chronological table for incomplete life insurance mathematics so as to specify the source for various concepts and formulas. For example, the concept of the present value was invented by Simon Stevin in 1585. "Principles equivalent to income and expenditure" was established by Richard Witt in 1613.

An important outline for life insurance mathematics and personal profiles of remarkable actuaries is also provided in this paper. This includes instances in which commutation columns were created. This paper encapsulates the entire human drama that was foundational to the development of halo notation.

Ｈａｌｏ Ｎｏｔａｔｉｏｎの由来

Cajoriが書かなかった数学記号の歴史

鈴木　真治[1]

目次

---

[1] 2017年1月18日投稿　suzuki-zeta.888@gol.com

0 はじめに

Florian Cajori の主著である『数学記号の歴史（1928)』は，稀代の大家が 69 歳（実際には 66 歳で殆ど書き終わっていた）と云う円熟した境地で著した，紛れもない数学史の傑作である．ある識者が，「世間に出回っている数学記号の歴史は，すべて Cajori の本からの孫引きに過ぎない.」とまで極言して憚らない程に，この本の影響は甚大で，実際，現在に至るも，筆者自身，総合報告として，本書を超える数学記号の歴史書と思えるものにお目にかかったことがない.

しかしながら，数学史上稀に見る変革期の最中に出版され，既に 1 世紀近い歳月が経った著書が，現在においても，なおこの分野で基準書であり続けるというのは数学史にとって余り健全な状況とは言えまい. 私たちは，Cajori を乗り越えるべく努力する必要があると考える.

このような観点から，少なくとも次の３つの方向から Cajori に挑む必要があろう.

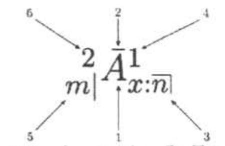
1．Cajori が書き漏らした数学記号の歴史
2．Cajori が書き間違えた数学記号の歴史
3．Cajori が書けなかった数学記号の歴史

それぞれについて，1 例だけ挙げて見よう．１．については，非ヨーロッパ系の数学記号，例えば和算の記号などが彼の著書では大きく欠落しているので，これを補完することが考えられる．また，Cajori は，Nicolas Chuquet が，現代に連なる命数法を確立したと書いているが，現在では Jehan Adam が類似の方法をもっと早く考えていたことが分かっているので，これなどは，２．に該当すると言えよう．３．については，例えば，空集合を表す数学記号 $\emptyset$ などを取り上げることが考えられる．この記号は，Cajori の死後に，André Weil によって Bourbaki の中で導入されたものであるから，彼に書けるはずはない．このような例を探し出して整理することは地味ではあるが，大切な数学史の基礎研究であろう．ただし，これら３方向は，どれも総合報告として公表に耐え得る水準まで持って行こうとするならば，途方もない労力が要求されることが予想される．一度に，全てを網羅するようなものを目指すのは適切な方針とは言えまい．ある程度の纏まったトピック毎に完結させて行く方が現実的である.

このような研究方針に則り，本論では Halo Notation の由来について考

察してみたいと考えている．これは上記の分類で言えば1．に属する．

多くの読者諸兄は恐らくHalo Notationと云う言葉を初めて聞かれたのではなかろうか．むしろ，アクチュアリー記号と言った方が，馴染みがあるかも知れない．要するに，生命保険数学で使われる特殊な一群の表記方法である．その典型的な一例を Wikiから引用して右図に掲げて置く[2].



アクチュアリー記号の例
1. 一時払純保険料
2. 即時払
3. 年齢 x 歳、保険期間 n 年
4. 死亡時の支払
5. m 年据置
6. 利力を2倍にする

これらの記号は，優に 150 年を超える風雪に耐え，現在も世界中のアクチュアリーたちに使われ続けている“生きた”数学記号である．ところが，この記号群に対する Cajori の扱いは実にそっけないもので，記号の統一化が上手く行った例として挙げられているだけで，具体的な記号そのものについては一例の引用さえも与えられていない．（付録2参照）当に，「Cajoriが書き漏らした数学記号」であると言えるであろう．

このような本流で活躍する数学史家の無関心のせいか，アクチュアリー記号の歴史は，その歴史の長さや重要性の割には扱っている書籍や論文もそれ程多くはないように思われる．数少ない例外として浩瀚なH．Braunの『生命保険史』があるが，これにしても記号そのものに対する記述はそれ程多くはない．日本の文献では，筆者が調べた限りでは，山内恒人氏の『生命保険数学の基礎』くらいしか目立った記述があるものを見つけることが出来なかった．本論では，Braunや山内氏の考察も含め，内外の先行研究を纏め，少なくとも本論を読めばHalo Notationの出所・由来が一渡り了解されることを一つの目標とした．

また，先行研究を整理するだけではなく，筆者自身がこの調査の中で気付いた「Halo Notationの特殊な表記形状が，実はニュートンの冪記号に由来する」可能性を紹介することで本論のオリジナリティーをなんとか確保できるように努めた．

更に，この分野に詳しくない読者のために，生命保険数学の触りの部分と略年表および偉大な足跡を残したアクチュアリー[3]の点描をいくつか与えておいた．邦文では殆ど見ることのない話もあると思うので興味を持って頂ければ幸いである．

---

[2] ただし，筆者自身は6．が使用されている例に出くわしたことは未だない．

[3] たとえば，Benjamin Gompertzなどは，一般的な数学史では，ほぼ無名であるが保険数学の世界では，知らない人がいないと言えるほど有名である．

1 生命保険数学小史

率直に言って，生命保険数学史は数学史のなかでもその扱いがマイナーな分野であると言えるであろう．Todhunter は『確率論史』の第 5 章で「死亡率と生命保険」を扱っており，その章は次のような書き出しから始まる．「死亡法則の研究の歴史，生命保険計算の歴史は，重要でもあり，またそれがおおう範囲も広いので，それだけをとりあげて研究してみるのも十分な価値がある．死亡法則とか生命保険計算とかの問題は，元来，確率論との関係が深かったのだが，現在では数理科学のなかで独立した分野を形成していると考えてよいだろう．それゆえ，ここでは，その起源をたどるだけにしておこう．」19 世紀の半ばにして，既に，保険数学が正当な数学ではないと見なされていることが読み取れる．それでも，1820 年生まれの Todhunter や 1829 年生まれの M.Cantor くらい迄は，一応，保険数学の淵源を数学史の一部として書き記しているが，Cajori を初めとして 20 世紀に活躍した著明な数学史家たち — David E. Smith，Carl B. Boyer，Victor J. Katz，佐々木力 等々 — の主著（通史）に actuary と云う単語は殆ど全く登場しない．最近出版された異色の数学史書 The Oxford Handbook of the History of Mathematics も同様で，保険数学には全く触れられていない．この分野には，Halley, Leibniz, Bernoulli, de Moivre, Simpson，De Morgan と言った錚々たる数学者が貢献しており，Euler が十数編の保険数学に関する論文を書き，Gauss も晩年にこの分野に携わっていたにもかかわらずである．

このような保険数学の一般数学から疎外された扱いは歴史だけに留まらない．一つの目安ではあるが，岩波数学辞典第 1 版では，「保険数学」と云う項目が与えられ，独特な畳記号が説明されていたが，第 2 版，第 3 版では，辞典全体の分量はかなり増大しているにも拘わらず，「保険数学」は消し去られていた．その時期は，保険数学の新しいテキストもあまり発行されず,保険数学は「実務上，役には立つが古典的には完成してしまった分野」のように多くの数学者には捉えられていたのかもしれない．しかしながら，最新の岩波数学辞典第 4 版（2007 年）では再び「保険数学」は復活し，しかも「死亡率や利率を確定関数として扱う決定論的保険数学に代わり，現在ではそれらを確率過程として扱う確率論的保険数学が主流になるなど理論的にも進歩が見られ」との記載もある．そして 2009 年の『生命保険数学の基礎』[山内] 以降，僅か数年で立て続けに新著が出版され，「アクチュアリー数学の一種のルネサンス」とも語られている．一数学史家としては，余り踏み込んだ現状分析は避けるべきだろうが，それでも新しい潮流の気配を感じざるを得ない．（付録 3 参照）

本節では，そのような最近の動きではなく 1954 年までの生命保険数学の発展の歴史で，特に資産運用に関連したものを除いて，略年表を作成しておいた．アクチュアリーサイエンスの立場からは，資産運用関連の業績を除く理由はないし，現在，最も活発に議論されている分野でもあるのだが，内容的に少し異質で，筆者の準備不足との理由もこれあり，ここでは対象外とさせて頂いた．また，1954 年までとした理由については，それが現在の生命保険数学の記号がほぼ決定された年であったからである．そして偶然にも，上述の岩波数学辞典第 1 版が出版された年でもある．

畳記号創設の歴史上の位置づけを知る上で，一般の数学史書に記載が少ない生命保険数学の小史を，たとえはなはだ不完全であったとしても，一応，まとめておくこともあながち無駄ではないと考える．

生命保険数学の略年表

230	Domitius Ulpianus (170 - 228)	Ulpian's Table (ウルピアヌス表) Note : 現存する最古の生命表．2.4 参照
1202	Leonardo Fibonacci (1170-1250)	Liber Abaci (算板の書) Note : アラビア数字と位取り計算の紹介（初めてではない） 利息計算も扱われている．
1340 (1472)	Francesco Balducci Pegolotti (1310 - 1347)	Pegolotti's table (ペゴロッティ表) Note : 現存する最古の複利計算表の手稿で，1340 頃に計算され，1472 年に複写が作成された．2.4 参照
1494	Fra Luca Bartolomeo de Pacioli (1445 -1517)	Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita (算術・幾何・比及び比例全書) Note : 複式簿記を初めて学術的に説明した文献であり，不正確であるとは言え，確率的な問題を数学的取り上げた初めての文献でもある．また，彼自身も正確な肖像画の残る初めての数学者であると言われている．
1558	Jean Trenchant	L'arithmétique departie en trois livres. (算術三書)

		Note：印刷された初めての複利計算表を含む. 2.4 参照
1585	Simon Stevin (1548 - 1620)	La Practique d'Arithmetique. (実用算術) Note：1%から 16%の複利表及び$v^n, a_{\overline{n}|}$表，現価の考え方が出現. 2.4 参照 De Thiende. (十分の一法) Note：小数の加減乗除を説明．ヨーロッパに小数が広まる切っ掛けを作った歴史的著書．しかし，小数の初出文献はウクリーディシーの『インド式算法の諸章』(952)であり，ヨーロッパに限ってもクリス・ルドルフ(1499-1545)の『例題小論集』(1530)の方が早い.
1596	Ludolph Van Ceulen (1540 - 1610)	Vanden circkel.… ten laetsten van interest (円について．…最後に利息) Note：2.4 参照
1613	Richard Witt (1568- 1624)	Arithmeticall Questions (算術質疑) Note：初めての生命関数抜きの保険数学の教科書. 2.4 参照
1614	John Napier (1550 - 1617)	Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio (驚くべき対数規則の記述) Note：対数発見の歴史的著書. 2.4 参照
1618	Henry Briggs (1561 - 1630)	*A* description of the admirable table of logarithms, etc.,invented and published in Latin by Lord Napier, Baron of Merchiston,and translated into English by Edward Wright; with an addition of the instrumental table by Henry Briggs. (マーチストンの男爵であるネピア卿によって創案されてラテン語で出版され，エドワード・ライトによって英語に翻訳された、素晴らしい対数表などの説明．ヘンリー・ブリッグスによる有益な追加表付．) Note：対数を使った簡便な複利計算. 2.4 参照
1654	Laurens Tonti (1630 - 1695)	Edict of the King for the Creation of the Society of the Royal Tontine (王立トンチ協会の創設のための勅令) Note：トンチ年金
1657	Christian Huygens (1629-1695)	De Ractiociniis in Ludo Aleae (サイコロ遊びのにおける計算について) Note：出版された初めての確率に関する書物

1662	John Graunt (1620 – 1674)	Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality 2nd edit. (死亡表に関する自然的及び政治的諸観察 第2版) Note：初めての死亡率表，「大数の法則」を経験的に発見
1668	John Newton (1613 - 1678)	Scale of interest (利息の尺度) Note: 2.4 参照
1669	Christian Huygens (1629-1695) & Ludwig Huygens (1631-1699)	Extracts from Letters (手紙からの抜粋) Note：「期待値」を定義 Ludwig は Christian の弟
1671	Johan de Witt (1625 - 1672)	Waerdye van lyf-renten Naer proportie van los-renten (償還年金と釣りあいの取れる生命年金の価格) Note：本書がアクチュアリー学誕生の書とも言われるのは，ヨハン・デ・ウィットが複利と死亡率を組み合わせたアクチュアリアルな計算を初めて行った人物であるからであろう. ウィットはライデン大学でスホーテンに数学を学んだあと，政治の道に進んだ．イギリス，フランスからの防衛費用を捻出するために生命年金による国債の募集を行う．このとき，初等的とはいえ，初めてアクチュアリアルな考察に裏打ちされた生命年金が考案された．この業績が生命保険数学の誕生の産声であると評価されている．一方，この年金法案が議会を通過した1年後，フランスが突然のオランダ侵入し，オランダは大敗を喫する．これに怒った群衆はウィットを惨殺した.
1683	Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)	Meditatio Juridico-Mathematica de Interusurio simplice (単利の中間利息に関する法律的・数学的考察) Note：現在の逸失利益の計算に用いられる将来価値の割引の計算方法. 『生命保険数学の基礎』[山内] pp.51-52 参照
1690	Jakob Bernoulli (1654 - 1705)	On the easiest Method for Calculatingthe Value of Annuites on Lives from Tables of Observation (観察諸表からの終身年金価値計算の最簡便法) Note：瞬間利率

1693	Edmund Halley (1656 - 1742)	An estimate of the degrees of the mortality of mankind drawn from curious tables of the births and funerals at the City of Breslau (ブレスラウ市の興味ある出生・死亡表から引き出された死亡率の推定，あわせて終身年金の代価決定の試み) Note：統計的手法による初めての死亡表の作成（移住者の多いグラントのデータを使わず，カスパール・ノイマンが提供した移住者の少ないブレスラウ市のデータを使用した)
1705 (1761)	Edmund Halley (1656 - 1742)	Of Compound Interest and Annuities. Sherwin's Mathematical Tables. (シャーウィンの数理表 第7章「複利と年金について」) Note：複利計算の体系的研究 初版 1705/1706,第4版 1761
1707	John Smart	Tables of Interest, Discount, Annuities, &c (利息，割引，年金表 等) Note：ジョン・スマートの利息表は 18 世紀を通じて最も重要な利息表で，終価と現価と云う用語が導入されている.
1709	Nicholas Bernoulli (1687- 1759)	De Usu Artis Conjectandi in Jure. (法則における推測法の使用について) Note：本書で，初めて「平均余命」が定義される.
1713	Jakob Bernoulli (1654 - 1705)	Ars Conjectandi (推測法) Note：「大数の法則」に証明を与えた
1718	de Moivre (1667-1754)	The Doctrine of Chances (偶然の原則) Note：ド・モアブルはフランス人であったが，1865 年のナントの勅令の廃止にともなってイギリスに亡命してきた．ニュートンからその才能を高く評価されたが，異教徒であったため大学に職を得ることが出来ず，数学教師や，保険会社やギャンブラーへの助言などで糊口をしのいだ．ジェイムズ・ドドスン(数学者，アクチュアリーであり王立協会の会長にもなる)は彼の教え子の一人である.
1720	de Moivre (1667-1754)	2 Letters of reimbursing and paying off Annuities (年金償還に関する二つの書状)
1725	de Moivre (1667-1754)	Annuities on Lives (終身年金) Note：本書は，英国で初めての連生年金に対する体系的な取扱いを

		与えたものである．公式 $a_x = vp_x(1 + a_{x+1})$ は本書で初めて与えられた．生存の見積もりは正しく定義されている.
1727	Richard Hayes (1715 – 1740)	A New Method for Valuing of Annuities upon Lives (生命年金の評価に対する新しい方法) Note：ヘイズは，最初の生命表の本を出版した．その生命表は，さまざまな度合の確率についての前提に基づいており，その前提とは異なる年齢の生存者が生き続けなければならないことである．彼は自分の計算方法の詳細を明らかにしなかった．利率5%に対し，彼が作成した生命年金表は，ド・モアブルによる1725年に与えられたものとかなり近い結果を与える．他の表のなかには理論的に根拠が薄弱な近似方法によって計算された可能性のあるものもあったが，その表は複利の拙速な計算方法を超える大きな進歩であったので普通に使用されるようになった.
1730	de Moivre (1667-1754)	Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis Note：本著は，土地所有から生じる収入を扱う人のために書かれたものである．年払いにするための'v ÷ a'法を使って計算し，7 年目の終わりに一括払いを生成することは，この種の最初の計算であるように思われる－そしてリチャード和，それは一部の人にとっては少し難しすぎると思われるかもしれない．著者は，ハレーによって基礎づけられてド・モアブルによって定められた方法により計算された 1 人，2 人，そして 3 人の生存者に対する生命年金の価格を計算している.
1737	John Smart	A Letter to George Heathcote, Esq inclosing tables extracted from ye Tables of Bills of Mortality (ジョージ・ヒースコート殿への書状，年度末死亡明細表から抜粋された表を含む) Note：この手紙は，1728 年から 1737 年にロンドンで発生した死亡者数から算出した生命表を提供する．これは，トーマス・シンプソンが，年金についての 1742 年の彼の論文のために調整した表である.
1740	Thomas Simpson (1710 - 1761)	The Nature and Laws of Chance (偶然の性質と法則)
1742	Thomas Simpson	The Doctrine of Annuities and Reversions (年金および復帰財産の原則)

	(1710 - 1761)	Note：シンプソンは終身年金価格に対して，支払が半年ごとまたは四半期ごとに行われて，正しい実践的な追加を見つけ出した場合，調整を行うことも検討した．本著は，年金や据置の数学的な教科書でもある．
1742	James Dodson (1705–1757)	The anti-logarithmic Canon (逆対数基準書) Note： 通常の対数表とは逆対応の表とその利用法が説明されており，複利計算が例示されている．
1746	Antoine Deparcieux (1703-1768)	Table XIII from Essay on the Probabilities of the Duration of Human Life (人の生存期間の確率に関する試論からの表 13) Note：様々の修道会のために主に期間 1685-1745 の死亡率データを収集した．彼は，各加入年齢，すなわち職業の誓いが取られたときの年齢，に対して，別々に生データを示している．特に，初めての，女性の生命表が作成された．
1747	Corbyn Morris (??? - 1779)	An Essay towards illustrating the Science of Insurance (保険科学を示すために試論) Note：終身保険の年払平準保険料の初めての料表が計算された．
1752	Thomas Simpson (1710 - 1761)	Select Exercises for Young Proficiency in the Mathematics (若い数学熟練者のための精選演習) Note:定期年金の近似式 $a_x^n = a_x + \frac{n-1}{2n}$ が n=2,4 の場合について掲げられている．
1752	de Moivre (1667-1754)	Evalution of Anuuities of Lives (終身年金の評価) Note:ド・モアブルの死亡法則,最高齢=86,余命(complement of life),Present value of annuity for an Age of 50 として$a_{\overline{36}\|}$ (p.16)
1756	James Dodson (1705–1757)	First Lectures on Insurance (保険に関する最初の講義) Note：ロンドンの観察に基づいて計算された通貨表がある． 著者のドドソンはド・モアブルの弟子であった． 彼には，この著作とは別に，生命保険の歴史において大変興味深い役割を果たすエピソードがある．1756 年，彼はアミカブル社への保険加入を高齢であることを理由に謝絶された．この謝絶にショックを受けたドドソンは，年齢別の死亡率を考慮した保険料を用意しておけばこのようなことはなくなると考え，そのような保険料体系が設定された保険会社の設立を目指すことになる．ところが，翌年，

		ドドソンは急死する．図らずも，危険選択の意味では，アミカブル社の判断は正しかったわけである．これにより彼の計画は頓挫するかと思われた．しかし，幸運にも，彼の遺志は共同設立者たちにより受け継がれ，エクイタブル生命の創設と云う形で結実した．
1758	Thomas Simpson (1710 - 1761)	Letter of 1758 from Thomas Simpson dealing with series (級数を扱ったトーマス・シンプソンからの 1758 年の手紙) Note：年金を観測から直接計算する方法を与えた．
1760	Leonhard Euler (1707–1783)	A General Investigation into the Mortality and Multiplication of Human Species (ヒトの死亡率と繁殖率に関する全般的調査)
1760	Daniel Bernoulli (1700 – 1782)	A new Analysis of the Mortality caused by Smallpox (天然痘による死亡率の新しい分析)
1762		The Equitable Life Assurance Society was founded (エクイタブル生命創設) Note: 死亡表に基づいて保険料が計算された初めての近代的保険会社であり，相互会社でもある．
1763	Thomas Bayes (1702 - 1761)	" An essay towards solving a problem in the doctrine of chances " Mathematical note-book Letter from Thomas Bayes to the Royal Society (偶然の原則における問題を解決するための試論：数学ノート トーマス・ベイズから王立協会への手紙) Note：ベイズの定理の初出．ベイズは亡くなるときに友人のリチャード・プライスに確率に関する論文を託した．プライスはその重要性を認め，王立協会に投稿した．これが 1763 年に発表されたベイズの公式の出自であり，ベイズ統計の淵源となった．
1770	Richard Price (1723 - 1791)	" Observations on the proper method of calculating the values of reversions depending on survivorships " (生存に依存する復帰財産の価値の適正な計算方法に関する所見)
1771	Richard Price (1723 - 1791)	Observations on Reversionary Payments (復帰払についての所見) Note：利率記号は r=i+1 を使用している． 2.3 参照
1772	William Dale	Calculations deduced from first principles. (第一原理からの演繹計算) Note：計算基数の萌芽
1772	Francis	A Proposal for Establishing Life-annuities in Parishes for the

	Maseres (1731 –1824)	Benefit of the Industrious Poor. (工業的貧困層の利益のための教会における生涯年金制度の提案)
1772	John Heinrich Lambert (1728-1777)	The Mortality of Smallpox in Children. (子供の天然痘の死亡率)
1774		An act for regulating insurances on lives, and for prohibiting all such insurances, except in cases where the persons insuring shall have an interest in the life or death of the persons insured (保険者が被保険者の生死に関心を有する場合を除き，生命保険を規制し，そのような保険をすべて禁止する法律) Note：いわゆる，「他人の生命の保険」の規制の始まり．
1775	Richard Price (1723 - 1791)	Observations on the proper method of keeping the accounts and determining from year to year the state of the Society for Equitable Assurances on Lives & Survivorships' (毎年のエクイタブル生命保険会社の収支を維持し，財政状態を判断する適切な方法に関する所見) Note：生命保険契約の積立金，被保険者による経験死亡率
1775	William Morgan (1750-1833)	初めての現代的アクチュアリーである William Morgan がエクイタブル生命のアクチュアリーとなる． Note: 4.2 参照．
1777	William Dale	Supplement to Calculations of the Value of Annuities (年金価格の計算への補足)
1779	William Morgan, Richard Price	The doctrine of annuities and assurances on lives and survivorships (年金や生命保険と生存保障に関する原則)
1779	William Morgan (1750-1833)	The Doctrine of Annuities and Assurances on Lives (年金と生命保険の原則) Note：40 年後に改訂再版
1785	Karstens	寡婦金庫の理論 Note：保険計算を取り上げたドイツ最古の書物

1785	Nicolaus Tetens (1736–1807)	Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhangen mit Tabellen zum practischen Gebrauch, von Johann Nicolaus Tetens, Professor der Philosophie und Mathematik zu Kiel. (1 人以上の人物の生死に依存する生命年金と年金受給権の計算の概要：実用的使用のための表，ヨハン・ニコラウステーテンス哲学と数学のキール大学教授による) Note：大陸での計算基数の初出． 4.3 参照 Tetens は「ドイツのロック」とも呼ばれることがある．
1808 (1813)	Francis Baily (1774-1844)	The Doctrine of Interest and Annuities (利子および年金の原則) Note：名称利率と実利率と云う用語も導入されている． 利率記号としては$r = 1 + i$ を使用． 2.3 参照 1813 年版の補遺 The Doctrine of Life-annuities and Assurances (生命年金および生命保険の原則) Note：Barrett の計算基数のアイデアを支持・発表． 4.2 参照
1810	Francis Baily (1774-1844)	The Doctrine of Life-annuities and Assurances : Analytically Investigated (生命年金および生命保険の原則：分析的に調査) Note：4.2 参照
1811	William Inwood (1771–1843)	Tables for the Purchasing of Estates, Freehold, Copyhold ,or Leasehold, Annuities, Advowsons,&c. and for the renewing of Leases held under Cathedral Churches, Colleges, or other Corporate Bodies, for Terms of Years certain, and for Lives. Together with several useful and interesting Tables connected with the Subject. Also the Five Tables of Compound Interest. (不動産，（不動産の）自由保有権，謄本保有権，または借地権，年金，聖職者推挙権，等の購入のための表．司教座聖堂，大学，またはその他の法人組織の下で開催された賃貸契約の更新，特定の期間，生涯に対するものである． その主題に関連したいくつかの有益かつ興味深い表付き． また，5 つ複利表) Note: 終価と現価と云う用語が著しく強調されている． 2.4 参照 Inwood は英国の著名な建築家であり測量士である．

(1786) ~ 1819	George Barrett (1752-1821)	Correspondence with Francis Baily Calculations based on Swedish, Northampton and Deparcieux's observations (フランシス・ベイリーとの文通： スウェーデンとノーサンプトンの元表に基づく計算，及びドパルシューの所見) Note：計算基数の創案．4.2 参照
1815	Joshua Milne (1776-1851)	Carlisle table (カーライル表) Note：カーライル市の統計資料をもとに 1815 年に作成した生命表で，近代的な生命表作成の技術を初めて導入した． A Treatise on the Valuation of Annuities and Assurances (年金と保険の評価額についての取扱) Note：p.114 には現価率記号vの導入． 2.3 参照 p.123 には量記号のルーツもある． p.283 には保険料積立金の第 2 基本方程式 $V_m = (P_{x+m} - P_x) \cdot a_{x+m}$ が与えられている．(かなり現代式とは異なるので補足が必要)
1816	William Rouse	An investigation of the errors of all Writers on annuities, in their valuation of half-yearly and quarterly payments, including those of Sir Isaac Newton, De moivre, Dr.Price, Mr.Morgan, Dr.Hutton &c &c (半年払や四半期払の年金の評価額に関する，Issac Newton 卿や De moivre，Price 博士，Morgan 氏，Hutton 博士，等々の，すべての筆者たちの誤謬の調査研究)
1820	Benjamin Gompertz (1779-1865)	A Sketch of an Analysis and Notation applicable to the Value of Life Contingencies. (生命蓋然性の価格への応用可能な解析と記号の粗描)
1820	Griffith Davies (1788-1855)	Values of assurances by Northampton 3 per cent. (3 パーセントノーザンプトン表による生命保険の価格)
1822 ~ 1831	Griffith Davies (1788-1855)	An investigation of the bases for calculating life contingencies,of the profits on life assurances, and of an equitable method of apportioning those profits by way of bonus among those assurers (生命蓋然性の計算基礎，生命保険に関する利益，及びこれらの利益を配当によって公平に割り当てる方法) Note：責任準備金が 1 保険年度の間に変化し，それぞれの保険料が

		払わされるごとに増加するすことを示すダイヤグラムを提示．
1824	Highland Society of Scotland	Report on Friendly or Benefit Societies Exhibiting the Law of Sickness as deduced from returns by Friendly Societies in different parts of Scotland (友愛慈善社の提示する疾病率に関するレポート:スコットランドの異なる場所のおける友愛社による返還からの推論) Note：この詳細レポートは，疾病率への最初の数学的研究である．
1825	Francis Corbaux	The doctrine of compound interest (複利の原則) Note：年，半年，4半年の利息の変換の違いを明確に区別した表を初めて導入した．利率記号としては$r = 1 + i$ を使用． 2.3参照
1825	Benjamin Gompertz (1779-1865)	On the Nature of the Function expressive of the Law of Human Mortality (人の死亡法則を表す関数の性質について) Note：ゴンパーツの法則 3.3 参照
1825	Griffith Davies (1788-1855)	Tables of Life Contingencies (生命蓋然表) Note：pp.35-40 には基数列 D_x,N_x S_x,M_x R_x の性質及び使用を説明 4.3 参照 割引率記号 d を導入．2.3 参照
1826	Charles Babbage (1791-1871)	Comparative View of the various Institutions for the Assurance of Lives (生命保険に対する様々な制度の比較所見について) Note：Baily が書いた論文の補遺にある Commutation Method について言及 4.2 参照
1833	Francis Corbaux	On the Natural and Mathematical Laws Concerning Population, Vitality, and Mortality (人口，生命力，および死亡率に関する自然と数学法則について) Note：健常者，年金受給者，標準体，無差別人口と標準下体に関して 10 個の生命表（性別毎に 5 個）を発表した． 2.3 参照
1838	De Morgan (1806 - 1871)	An essay on probabilities, and their application to life contingencies and insurance offices. (確率及びそれらの生命蓋然性と保険会社への応用についての試論) Note：現代アクチュアリー記号の萌芽

1839	Peter Hardy	Doctrine of Simple and Compound Interest (単利および複利の原則) Note: p.3 に利率に記号 i が使われている．　2.3 参照
1843	David Jones	On the Value of Annuities and Reversionary Payments (年金と復帰払の価格について) Note：p.116 に現在の Halo notation（暈記号）の原型を導入した．計算基数 M_x,R_x を別に表示しているが，Cx は定義していない．3.3 参照 p.192 に保険料積立金の第 3 基本方程式が示されている． $V_m = 1 - \frac{a_{x+m}}{a_x}$ p.155 に$d_x = l_x - l_{x+1}$　の初出が見られる．　2.3 参照
1843	Jenkin Jones	A series of tables of annuities and assurances calculated from a new rate of mortality amongst assured lives. (被保険者死亡率の新しい率から計算された年金と生命保険の一連の表) Note：17 社共有死亡率表 17 社死亡率表は，複数の保険会社のデータを統合して得られた最初の経験死亡率表であった．彼は，国立商業保険会社のアクチュアリーでデヴィッド・ジョーンズの兄弟でもある．
1848		アクチュアリー協会がロンドンに設立される．職業としてのアクチュアリーが誕生した．
1850	W Orchard	Single and Annual Assurance Premiums (単体年払い保険料) Note：「オーチャード表」は次の関係式を利用した初めての公表された死亡表であり，$P = \frac{1}{a} - d$，$A = 1 - d\ddot{a}$ この関係式は終身保険や養老保険に対し，適当な年金現価を使うだけで，単体年払い保険料を簡単に計算する方法を与える． コンピュータが利用可能となる以前は，保険料変換表によってもたらされた労働力の節約は莫大なものであった―必要な他の関数は保険料変換表で参照できるため，保険料を計算するにはただ 1 つの生命関数($\ddot{a}$)しか必要なかった．
1851		アクチュアリー協会が協会誌の第 1 号を出版する．
1851	C.F. Gauss (1777-1855)	ゲッチンゲン大学教授寡婦金庫の監査
1856		エディンバラ大学にアクチュアリー学科が創設された．

1860	William Makeham (1826–1891)	On the Law of Mortality and the Construction of Annuity Tables Note：本論でメーカムはゴンパーツの法則($\mu_x = Bc^x$)を改良し，ゴンパーツ・メーカムの法則($\mu_x = A + Bc^x$)を確立した．
1861	Elizur Wright (1804-1885)	Non-forfeiture law in Massachusetts (マサチューセッツ州における不没収法) Note：契約を失効させた契約者に対し，完全に没収することなく何らかのメリットを付与する方法として，延長定期保険の導入を行った．この影響で，ニューヨーク生命が，1868 年に払済保険の規定を設けた．更に，1880 年，マサチューセッツ州で，失効時に現金による(一部)払戻が実現された． 　ただし，払済保険自体はイギリスのユニティ社が既に 1855 年に行っており，1831 年にはゴータ社は，自由意思による解約に対し，解約返戻金を支払っている．
1863	August Zillmer (1831-1893)	Beitriige zur theorie der priimiem-reserve bei lebens-versicherungs-anstalten (生命保険会社に対する保険料積立金の理論への貢献) Note：本論では，初期費用および手数料が正確に生命保険の責任準備金の計算に考慮される方法，いわゆるチルメル式責任準備金，を示している．
1863	Sheppard Homans	On the Equitable Distribution of Surplus 「剰余金の公平な配分に関して」 Note：本論には，著者と J パークス・ファクラーが展開する剰余金を分配方法である「利源別配当方式」をはじめての公開された記述が含まれている．
1865	Wesley Stoker Barker Woolhouse (1809 – 1893)	On Interpolation Summation and the Adjustment of Numerical Tables (補間加算と数値表の調整について) Note：ウールハウスの論文は，初めての加法公式を用いた死亡率の目盛の詳しい解説であった．
1869	Wesley Stoker Barker Woolhouse (1809 – 1893)	On an improved theory of annuities and assurances (年金と保険理論の改良について) Note：本論は連続性を基盤とする生命確率の理論の初めての提示であり，有名な　$\bar{A} = 1 - \delta\bar{a}$　を導出した．

1870	David Parks Fackler	" Agents' monetary,life & valuation tables ,with valuable explanations",Appendix iii (「代理店の金利表，生命表および積立金表．貴重な説明付」，付録 iii) Note：いわゆる，ファクラーの再帰式 $_{t-1}V + P_x - v \cdot q_{x+t-1} = v \cdot p_{x+t-1} \cdot {}_tV$
1872		（英国）アクチュアリー協会で Halo 記号は正式に採択される
1874	G. Humphreys	On the practice of the Eagle Company with regard to the Assurance of Lives classed as Unsound,and on the Rates of Mortality prevailing amongst the Lives so classed, assured during the Sixty-three Years ending 30 June 1871. (不健康として分類された生命保険契約と，そのように分類された生命保険契約のなかで支配的な死亡率に関する，1871 年 6 月 30 日に終了した 63 年間に亘る保険契約についてのイーグル社の実践について。) Note：この論文は，医療障害のために追加保険料を取ることで引き受けた生命保険契約のグループについての経験値の調査結果の最初に公表された詳細な記録である．また，年増法による年齢を基準にして作成された死亡率表が与えられている．
1874	William Makeham (1826–1891)	On the solution of problems connected with loans payable by instalments. (分割払いによる貸出金に関連する問題の解決について) Note：よく知られている償還可能な有価証券の評価に使用される公式 $A = K + \frac{g}{i}(C - K)$ が証明されている．2.4 参照
1875	Wilhelm Lexis (1837–1814)	Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik (人口統計理論序説) Note：観察原理を平面的に示す代表的な作図法である Lexis の図法 (Lexis diagram)を初めて紹介した著作．
1877	Wilhelm Lexis (1837–1814)	Zur Teorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft. (自然科学と社会科学・人間社会における大量現象の理論について)
1879	Thomas Bond	On the Construction of a Combined Marriage and Mortality

	Sprague (1830–1920)	Table (結婚・死亡残存表の構築について)
1881	Thomas Bond Sprague (1830–1920)	Explanation of a New Formula for Interpolation (補間のための新公式の説明)
1887	George King (1846-1932)	生命年金や生命保険を含む「生命確率」についての，初めてのアクチュアリー協会テキストが書かれる． Note：'Key to the Notation'が本著第 2 部で与えられる． 3.3 参照
1889	Jorgen Pederson Gram (1850–1916)	Standard Deviation in the Value of Life Assurances (生命保険の価格の標準偏差) Note：デンマークのアクチュアリー兼数学者．グラム＝シュミットの正規直交化法が有名．
1890	G. F. Hardy	Transactions of the Actuarial Society of Edinburgh (エディンバラアクチュアリー会　会議) Note：いわゆるハーディーの公式 $i = \dfrac{I}{\frac{1}{2}(A + B - I)}$
1895		第 1 回国際アクチュアリー会議 Note：各国のアクチュアリーは一致してインスティテュート・オブ・アクチュリースの記号を採用することが望ましいことが動議として提出され満場一致の賛同を得た．3.3 参照
1898	George King 他	第 2 回国際アクチュアリー会議 Note：Halo 記号が採択される．　3.3 参照
1900		第 3 回国際アクチュアリー会議 Note：Halo 記号は最終的に承認される．3.3 参照
1903	George James Lidstone (1870–1952)	Further remarks on the valuation of endowment assurances in groups (団体における養老保険の積立金に関するさらなる注釈) Note：著者は，ゴンパーツ・メーカムの法則に基づく保険契約の消滅に連結した式を導き出した．死亡率がこの法則に従わなくても，この Z 法から非常に正確な結果が得られる．
1903	G. F. Hardy	Graduation of the British Offices' experience 1863-93 (英国生命保険会社の経験表(1863-93)の日盛付) Note：日盛付の根底にある主な考え方は，ハーディー自身が 1894 年に発見したもので，ゴンパーツ・メーカムの公式を生命表の選択

		と集計に適用できるというものである．実際の目盛付のために，著者は多くの新しい方法を展開した．彼はピアソンのフィッティング基準を瞬時に採用したが，逐次加算による計算の大きな実用的改善をもたらした． その結果，O（m）選択，O（nm）選択，O（am）選択およびOmの集計表はすべて厳密にメーカム基準で目盛付し，連生生命年金やその他の関数の実際的な計算に重要な利点を与えた．
1905	George James Lidstone (1870–1952)	Changes in Pure Premium Policy-Value (純保険料式保険契約価値における変化)
1906	W P Elderton	Frequency curves and correlation (頻度曲線と相関) Note：エルダートンの「Temporary Assurances」（1903年）の最初の論文では，曲線のあてはめについての広範な参照が含まれており，ウィリアム・ヒューズが大統領の時代，彼はピアソン頻度曲線の作業を拡張すべきだと提案した．3年後にエルダートンはその主題についての本を出版した．この本のなかで，頻度曲線の詳細な説明，併せてモーメント法の指導と，アクチュアリー関数の目盛付における特別な困難について説明している．その本の内容は素晴らしく，出版後60年以上にわたって大学で広く使われ続け，最終的には第5版を数えた．1969年，それはFIAであるN L ジョンソン教授によって完全に改訂され，表題「頻度曲線のシステム」の下で再出版された．
1907	Charles Ronald Vauldrey Coutts	Bonus Reserve Valuation (配当積立金評価) Note：配当積立の評価方法の実際の起源は，クーツの論文の前に戻っている．それはスプレーグの論文で1857年(JIA7.61)に発表された．クーツの論文が公表される前にいくつかの特定の会社で公式の評価のために実際に使用されていた．1901年，マンリーは，（保険記録への手紙の中で）貸借対照表における積立金の中に，宣言された利率での配当積立の現在価値が，保険契約の将来の存在に対する負債として扱われるべきであるという考えを表明した．しかし，それは完全な結論を引き出すためにクーツに任せられた． 　将来支出として，将来支払予定の保険金額の他に，将来かかる経費や将来支払われる予定の通常配当の現在価値から，将来収入予定の営業保険料の現在価値を引いて算出する方式

1909	James John M'Lauchlan	The Fundamental Principles of Pension Funds (年金基金の基本原則) Note：マクラウクランは単純な言葉で年金基金の特徴を説明しようとしていた．特に，彼は，保険数理的方法によってもたらされた大きな積立金が本当に必要であることを示したいと望んでいた．彼の予測は簡単で2つのケースを扱っている： i) 20歳に入会する1000人のメンバーの基金．給与の5%の拠出と平衡しているが，新規加入者はいない． ii) 新規加入者が各年度に 1000 人の割合で入会する同様の基金． マクラウクランは，後者のファンドは完全な満期に達するまでに80年かかり，その時点で年間給与の3倍弱になるとしている．
1911	G. F. Hardy and F. B. Wyatt	Report of the actuaries in relation to the scheme of insurance against sickness, disablement, etc, embodied in the National Insurance Bill, 1911 (国民保険法案に具体化された病気，障害等に対する保険制度に関連したアクチュアリーの報告(1911年)) Note：1911年の国民保険法案が策定されたとき，資金調達と費用に関する助言が必要となり，政府は当然の成り行きとして，アクチュアリー協会に接近した．ハーディーはワイアット元アクチュアリー協会会長と一緒に，人口ベース，死亡率，結婚，問題，病気，失業率などの徹底的な調査を行った．その後，1912-28年の間，拠出金と給付の財政予測を行った．これらは，計画に対する必要な州の助成金が，1912-13年における190万ポンドから1927-28年においては550万ポンドに増加する可能性があることを示した．
1912	William Palin Elderton (1877–1962) and Richard Clift Fippard	Notes on the Construction of Mortality Tables (死亡率表の作成に関する注意) Note：この論文は，生命保険会社のデータから，一般市民の国勢調査および死亡記録のデータからの死亡率に対して使用される方法により，どのようにして死亡率を見つけ出すことができるかを示している．また，国勢調査の方法を変更して，死亡率の連続調査を行う方法も示している．エルダートンとフィッパードは，1914年に，この主題についての本を出版した．この本は「死亡率及び罹患率表の作成」と題され，後に第5版まで数えることになる．計画は1914年にアクチュアリー協会とアクチュアリー会議によって合意されたが，その実施は戦争によって遅れた．1924年になって，C.M.I.が ついに誕生した。

1931	W. Perks	On some experiments in the graduation of mortality statistics (死亡統計の目盛付におけるいくつかの実験) Note：ゴンパーツ・メーカムの公式を適用すると，パークスは高齢者の死亡率曲線の形に不整合があることに気付いた．これを受けて彼は数式を大幅に拡張し，現在，ロジスティック曲線族として知られている非常にエレガントで適応性の高い一連の曲線を作成した．しかし，いまだに時々，アクチュアリーの間では パークス曲線と呼ばれることもある．
1934		第 10 回国際アクチュアリー会議
1936	E. W. Phillips	Binary Calculation (2 進数計算) Note：フィリップスは才能のある男であり，非常にオリジナルの思考を持ち，アクチュアリーだけではなく弁護士としても従事した．しかし，彼の最も驚くべき貢献は，コンピュータ開発の年代記でバベッジの後で今や最も初期の論文として認められている本論である．フィリップスの目的は，死亡率の目盛付と生命保険会社の積立金に掛かる計算の労力を和らげる手段を見つけることであった．この目的のために，彼は 8 進数の使用を提唱し，2 進乗算を実行するためのエレガントな機械を設計した．その原理は本論に記載されており，機械自体は科学博物館に展示されている．しかし，フィリップスはさらに，セレン電池に焦点を当てた光線を使って作動する電気的開発を予想していた．彼は 1 時間に 40,000 回の乗算を行うことができると考えていた．一たび稼働させると，午前中（数拠点）には積立金の算術計算が可能になり，その結果は午後には表示された．
1937		第 11 回国際アクチュアリー会議 Note: 3.3 参照
1954		第 14 回国際アクチュアリー会議 Note: 現在の Halo 記号がほぼ出来上がる．3.3 参照

2 貨幣の時間的価値

生命保険数学で使用される記号の歴史を語る前に，その理論的背景にある貨幣の時間的価値の考え方に簡単に触れた後，その発展史を複利計算と現価(present value)の概念を中心にして概説する．

特に，現価の考えは生命保険数学では極めて基本的であり，これを理解しておかないと，現在使用されている生命保険数学の記号の定義の意義は，まったく理解できないであろう．歴史にまで言及する必要はなかったかもしれないが，現価を導入したのがあの Simon Stevin であることを明記する適当な邦文で見つけられなかったので，敢えて載せておくことにした．

2.1 単利と複利

利息の付け方には，単利(simple interest)と複利(conpound interest)がある．たとえば，元金 100 円に対し 5%の利息を付けるとして，1 年後はともに 105 円となるが，2 年後については，単利なら 110 円で，複利なら 110.25 円となる．

数式を使って表現するなら，次のように表される．

元金 P(principal)が**年利率 i** によって**期間 n 年**運用されて**利息 I(interest)**が生み出された結果が**元利合計 S** である．

(単利の場合)　$P(1+ni) = P + I = S$　したがって，$I = nPi$
(複利の場合)　$P(1+i)^n = P + I = S$　したがって，$I = P(1+i)^n - P$

数式を見れば明らかであるが，単利は毎年元金に対してのみ年利率を掛けた利息が生み出されるのが，複利は元金と利息の両方に年利率を掛けた利息が生み出されている．つまり単利の場合は元金のみが利息を生むのに対し，複利の場合は利息も利息を生むわけである．

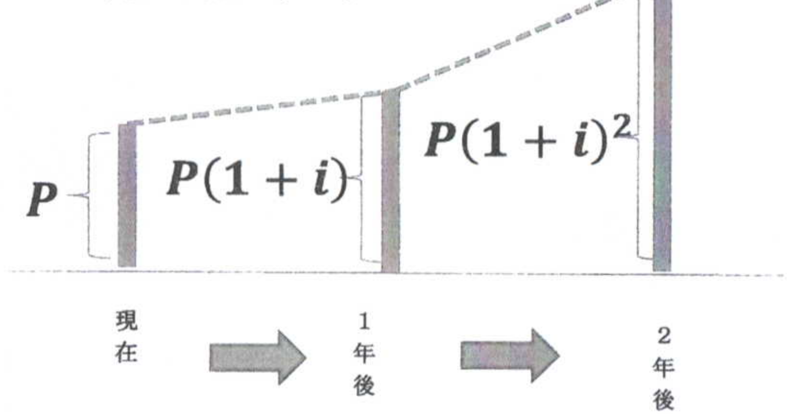
運用期間途中の端数期間に対して利息を付ける場合は，単利を用いることが多いが，生命保険数学では基本的には複利を使用する．

また，根本的な疑問である「なぜ単利ではなく複利の方を重用するのか」に対しては，「単利の場合であっても，投資家が毎期末に元利合計を再投資すれば実体として複利になってしまう」と云うのも一つの回答であろう．

2.2 終価と現価

元利合計Ｓのことを終価とも言う．単なる用語の置き換えのように見えるかもしれないが，この二つの用語には貨幣の時間価値の観点からは大きな差がある．元利合計が the total sum of the capital and interest や amount with interest added の翻訳であることを考えれば，元本と利息の合計であること以上の意味的な含みがない．それに対し，終価が accumulated value の翻訳であることを考慮するなら何らかの価値を表していることが見て取れる．つまり，現在のＰ円は１年後のＰ（1+i）円と等価であると云う発想に繋がっているのである．

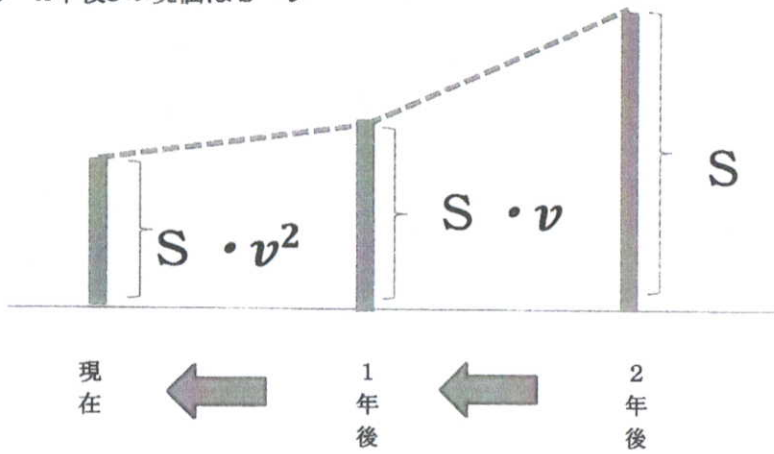
◎ Pのn年後の終価は$P(1+i)^n$



しかし，歴史的には終価(accumulated value)と云う専門用語の中に value と云う単語が組み入れられるのはだいぶ後で，The amount of one pound といった素朴な言い回しが 19 世紀まで続く．

一方，１年後のＳ円は現在の$\frac{S}{1+i}$円と等価であり，この値はＳ円の現価と云うのであるが，こちらは少なくとも 18 世紀の初期の段階で present value が用語として与えられている[4]．ただ，現在の標準的な現価率記号 $v=\frac{1}{1+i}$ が導入されるのは 19 世紀初頭のようである[5]．

◎ n年後Sの現価はＳ・v^n



P.V.(Present Value 現価)とは将来の CF(Cash Flow)を 現在に引き戻す方法

[4] John Smart ;Tables of Interest, Discount, Annuities, &c(1707)
また，present worth と言う用語が 17 世紀の前半には現れている．
John Norton; The Scale of Interest, Or Proportionall Tables and Breviats Shewing the Forbearance and Discompt of Any Sums of Money for Any Time, from a Day to 100 Yeares, at the Rate of 8 Per Centium, Per Annum, Etc(1633) p.69

[5] Joshua Milne; Carlisle table(1815) 次節参照

2.3 金利計算定数記号

金利計算で良く使われる概念と現在の標準記号を与えておく．これらの記号のいくつかは，その初出と思われるものを提示しておいたが，将来的に変更しなければならない可能性もあるので，参考情報程度に考えておいて頂きたい．

利率：i　Peter Hardy（1839）[6]

現価率：$v = \frac{1}{1+i}$　Joshua Milne, Carlisle table(1815)[7]

割引率：$d = 1 - v$　Griffith Davies, Tables of Life Contingencies(1825)[8]

転化回数(k)の名称利率($i^{(k)}$)と実利率(i)[9]：$1 + i = (1 + \frac{i^{(k)}}{k})^k$

転化回数(k)の名称割引率($d^{(k)}$)と実割引率(d)：$1 - d = (1 - \frac{d^{(k)}}{k})^k$

利力：$\delta = \log_e(1 + i) = -\log_e(1 - d) = \lim_{k\to\infty} i^{(k)} = \lim_{k\to\infty} d^{(k)}$

---

[6] Doctrine of Simple and Compound Interest (p.4)
Now let i denote the *rate of interest* or total increment on ￡1 at the end of one year;
ここで，i は利率または1￡に対する1年の末日における増分を表記しているものとする．
Interest の頭文字を利率記号に使うことは自然であると思われそうだが，この当時の印刷事情からIは1と混同しやすいので避けられたのではなかろうか．また，1+i よりも1文字のrを使っている場合の方が多い．(たとえば，Francis Baily(1808), Richard Price(1771), Francis Corbaux(1825)) 実際の，初出はもっと早いと思われる．Milne の著書にも i はでてくるのだが，利率ではなく，利息を表記している．

[7] 『生命保険数学の基礎』[山内] p.13 参照
211. Let $\frac{1}{1+r}$,the present value of one pound, to be received certainly at the expiration of a year (15), be denoted by v.
Then will v^n be the present value of that sum, certain to be received at the expiaration of n years (15).
211. $\frac{1}{1+r}$ を1ポンドの現価，(15)より1年後に確実に受け取れる金額のことであるのだが，として vと表記する．それ故，v^nは，(15)よりn年後には確実に受け取れる金額なのだが，その合計の現価となる．

[8] 『生命保険数学の基礎』[山内] p.14 参照
p.xxxviii
v =the present valute of ￡1 due 1 year hence and $d = 1 - v$ =the discount of ditto.
vを1ポンドに対する1年間の現価としよう．そして$d = 1 - v$をその同額に対する割引

[9] 名称利率(Nominal rate of interest) と実利率(true rate of interest)という用語は Francis Baily(1808)（§77）に既にある．

2.4　複利計算小史

複利の歴史は意外に古く，数千年前の古代バビロニアでは，当時すでに存在していた金貸し業で複利は使われていた．しかし，バビロニア人は複利が指数関数的に借金を増加させ，借り手を圧倒することを知っていたらしく，債務を定期的または状況に応じて解消する規約を設けていた．彼等は初期の段階からいわゆる暴利に対して嫌悪感を抱いていたようである．このような傾向が更に加速すると，イスラム社会や宗教改革前のキリスト教社会のように利息を取ることそのものを認めないこととなる．

Ulpianus
(170 - 228)

ローマ人たちが割引を行ったり，利息を取ったりした記録はあるし，素朴な年金表を作っていた記録もある．たとえば，A.D.230 年頃に作られた「Ulpianus の平均余命表」は非常に有名である．この当時，法定相続人以外に財産の 2/3 以上を遺贈することは禁止されていた．(ファルキディアス法) そこで年金の形にして毎年財産を小分けにして譲渡することで法の網を潜りぬけようとするものが現れた．これに対し，行政側はこのような年金の原資を計算し，その原資が 2/3 以下なら合法的であると判断することにした．しかし，遺贈する相手がこの先何年生きるか，つまり平均余命が見積れないと，このような判断はできない．このような必要性に迫られてローマの執政官 Ulpianus はこの平均余命表を作成したのである．

彼は Caracalla 帝の政治顧問でもあった．Severus 帝の治世に入ってから，召されて近衛長官となるが，兵士と群衆の間の暴動の最中，宮殿で暗殺された．

彼の平均余命表はどのようにして作成されたのかは不明であるが，Bruce Frier と云う研究者は計算根拠についての興味深い仮説を発表している．驚くべきことに，彼の平均余命表は 17 世紀まで使われ続けた．(それどころか，トスカーナ政府は 1814 年！に Ulpianus 表に基づいて計算された生命年金を認可している)

ローマ帝国の崩壊後，中世ヨーロッパでは，教会は聖書の記述[10]を理由

---

[10] レビ記 25 章 37 節：その人に金や食糧を貸す場合，利子や利息を取ってはならない．

Clemens VII
(1478 - 1534)

に原則として利息の授受を禁止した．その主な動機は貧民を守ることにあった．中世の君主の中にも，利息を払うことを禁止したものがいた．たとえば，イギリスでは，Richard I 世が 1197 年に暴利拒否法を公布した．

しかし，貨幣の時間的価値に利息を再び持ち込んだのは，他ならぬ教会であった．16 世紀の第 2 の 4 半世紀，法王庁は深刻な財政難に直面しており，教皇 ClemensⅦ世は 1526 年に初めてのローマ法王拠出債務(Monte della Fede)を設立した．

現存する最古の複利計算表は，Pegolotti's table の手稿であると言われている．これは 1340 年頃に計算され，1472 年に複写が作成された．100 リラ(lira)の，１%から 1/2%刻みで 8%までの利率に対する，20 年間の終価が与えられている．この表は Pegolotti が 1315 年の著作 Pratica della Mercatura(商業の実務)の一部として編纂したものであった．

印刷された初めての複利計算表は，数学者 Jean Trenchant が 1558 年に発表した，L'Arithmetique(算術)にある．本書は商業数学の要素を加味した一般算術の教本である．単利と複利を扱っている章があり，4%の場合の終価 $(1+i)^n$ と確定年金の終価 $S_{\overline{n|}}$ の表及び 10%の場合の終価 $(1+i)^n$ と 1 年未満の期間に対する表も与えられている．本書は，後に小数をヨーロッパに広め，指数記号を初めて導入した，当時の最高の数学者の一人である Simon Stevin にも影響を与えた．

Stevin は 1585 年に，初めて完全な利子表を含む著書 La Practique d'Arithmetique(実用算術)を出版している．本書のなかで，元金，利子，単利，複利は明確に定義され，1%から 16%の複利表が収載されている．ここで留意すべきは，この当時，利息の算定は極秘事項とされていたことである．それ故，Stevin 自身も本書のなかで「多額の費用なしにはそれを得ることは出来ず，原則的にその作成法はごく少数の人々のみに明かさるるものとされり」とわざわざ言及しており，その秘密主義の理由が「それらを秘密にしておくことはややもすると学芸への愛よりむしろ利益への愛により説明さるるように思われん」と分析する必要を感じていたものと思われる．彼の生涯を通じて貫かれた公開主義は本書の発表時にも既に明確に意識されている．加えて特筆すべきこととしては，彼が現価(present value)の考えを初めて明確に捉え，現価表を計算していたと言うことである．複利表の出版について言及されることは多いが，それだけならば Jean Trenchant が既に行っており，彼の独創性を示すことにはならない．むしろ，本質的な「現価」の概念に気付いたことこそもっと喧伝すべき偉業であると思われる．

Ludolph Van Ceulen の著書 Vanden circkel.... ten laetsten van interest(円について．…最後に利息)は，Stevin の本の 11 年後に出版されているが，部分的には Stevin の著書が出版される前に計算されていた．彼は Delft でフェンシングと数学を教えていた．彼が後半生の殆どを費やして，本書の表題の最初の部分が示す円周率の計算を行ったことは有名な話である．それは Archimedes の行った手法で正 2^{62}（＝約 461 京 1686 兆）角形を使って π の 35 桁目までを正しく計算されており，この空前絶後の力技に敬意を表して，現在もドイツでは円周率のことを Ludolph(ルドルフ)数と言うことがある．しかし，この本の題名の後半部分の話題はたいてい割愛されている．

1613 年には，Richard Witt による Arithmeticall Questions(算術質疑)が出版された．本書の歴史的重要性は，生命関数抜きではあるものの「収支相当の原則」[11]が初めて実態として明確に使用されたことであろう．ここに Stevin が発見した「現価」の概念は Witt によって見事に応用・発展されたことが見て取れる．例えば，本書の 70 番目の問題は次のようなものである．

（問題）

2 年後の終わりに支払わなければならない借金が 900 ポンドある人物がいる：彼は債権者に 5 年でそれを支払うことの同意を得た．すなわち，毎年の年金のように支払う．それぞれのこれら 5 回の支払いはいくらであるべきか．ただし，1 年に 10 パーセント複利であるとする．（拙意訳）

答えは $£196.4s.3d$ とある．これは 196 pounds, 4 shillings and 3pence を意味し，1pound=20 shillings,1shilling=12 pence の換算レートを使って，10 進法基準に変換すると $£196.4s.3d = £196.213$ であり，現代の記号を使って表現するならば下記のような収支相当の原則に基づいた

11 保険料を計算する上での大原則で，契約始期において　収入の現価＝支出の現価が成立することを言う．

等式から求められていることが分る．本書はこのような問題で溢れている．

収入（この場合は借入金）　$£900$　⇒収入の現価：$£900 \times v^2$

支出（この場合は毎年末の返済額）$£P$ ⇒支出の現価：$£P \times a_{5|}$

よって，収支相当の原則より　$£900 \times v^2 = £P \times a_{5|}$

$$£P = £\frac{900 \times v^2}{a_{5|}} = £\frac{743.8017}{3.790787} = £196.213$$

なお，ここで使用されている 10%は，この当時の法定最高利率である．通常の利率である 6.25%に基づいている問題もある．Witt は十分に実務家として，金利計算の本質を理解しており，例えば，年払いだけではなく，半期や四半期ごとの支払にも対応していた．それだけに「初めての保険数学の教科書(C.G.Lewin)」との評価があるのも頷ける．

Richard Witt は Northamptonshire の農家の出身である．彼は 1568 年 3 月 27 日 St Clement Eastcheap で，父親の死の 4 ヶ月後に生まれた．彼の母親は 1570 年に再婚する．一家は St Michael Bassieshaw に移り住んだ．当時の記録から判断するに，一家の経済状態はあまり良くなかったようである．彼が大学で学んだのかどうかははっきりしないが，後に自分の蔵書の一部をオックスフォード大学に寄贈することを遺言に書き残している．1609 年に母親が亡くなり，Eastcheap で埋葬された．この頃には，彼は数学に明るい実務家として知られるようになっていた．

1610 年には，彼は William Colson によって書かれた会計学と算術に関する新しい本の推薦人であるロンドンの 8 人の数学者の一人となっている．本書は 1612 年まで出版されず，しかも自費出版であったところをみると，出版社を見つけるのはなかなか難しかったのだろう．しかし，本書には英国で初めての複利表が収載されており，その影響力はなかなかのもので，先の 8 人の数学者のうち Witt を含めて 5 人が部分的にではあるが複利計算を扱った著書を後に出版している．そういう訳で，Witt の Arithmeticall Questions も Colson の著書に触発されて書かれたものと考えるのが自然であろう．

本書は，1613 年，Witt が 44 歳のときに出版されたものである．当時，彼は学士で，St Mary Woolchurch の教区に住んでいた．ここは，現在は邸宅街であるが，当時は，肉や魚の市場であった．

この年の 8 月，Witt は 2 歳年下の未亡人 Helen Pennaunt と結婚し，Coleman 通りにあった賃貸の新妻の家に移った．彼女は読み書きが出来ず，亡くなった前夫との間に 3 人の子どもがいたが，皆，若くして亡くなっている．彼女は Witt との間には子供をもうけることはなかった．

Witt は自らを「数の芸術における熟練者」と称しており，彼の遺言書の中で言及している彼の蔵書や幾何学的器具からも窺えることだが，彼の数学における興味の対象は単なる商業算術に納まりきるようなものではなかった．

1623 年 4 月，当時は未だ健康であったのだが，Witt は遺言書を書いている．その中で，異父兄弟姉妹に様々な小さな遺贈を定めている．また，彼は自分の使用人である Thomas Painter に，喪服を買うための 40 シリングと英語で書かれた算術と幾何学のすべての彼の蔵書および論文と書かれたものや印刷されたものの複写および彼が所有する幾何学的器具一式を残し，ラテン語，または英語以外の他の言語の算数，幾何学，神学のすべての本をオックスフォード大学に遺贈した．更に，埋葬費用として 40 シリングを残している．後に，この使用人は校長になる．

1624 年 11 月 4 日，彼は 56 歳で亡くなった．その年に流行した疫病で亡くなったとの説もあるがはっきりしない．遺言書に従って，彼は St Clement 教会にある母親の墓の隣に埋葬された．

Napier による対数の発明が天文学や航海術に多大な貢献をしたことは数学史の常識であるが，複利表の作成においても，最も厄介な計算の難所を回避する素晴らしい方法を提供することになる．1614 年の Napier の著書，Mirifici logarithmorum canonis descripto(驚くべき対数規則の記述)では，複利計算については直接触れられていないが，彼の方法を改良した Henry Briggs の 1624 年の著書 Arithmetica Logarithmica(対数算術)では，どのようにして対数を与えられた名称利率における複利計算に適用できるかが示されている．

Witt の点描のなかで既に触れたとおり，英国における初めての複利表は 1610 年に自費出版された William Colson による A General Tresury, a Perpetual Repertory, or a Common Councel-Place of accounts for all Countries in Christendome(一般財，永続的な宝庫，または，キリスト教世界におけるすべての国のための共通の重要な協議場所)であるのだが，17 世紀は多くの金利及び年金価格表が出版される．

1620 年，William Webster による，The True Valuation of Annuities, Leases, Fines and Reversions(年金，賃貸，利息，復帰払の正しい価格表)の初版が，次いで，1629年にはTables of Compound Interest(複利表)と云う表題で増補第2版が出版された．1642年の英国内戦開始までには，WittとWebsterの利子表の改定版がそれぞれ現れている．

1660年の王政復興までは，年金表の利率改定がなされることはなかったが，王政復興後の貿易の増加や財産権の取引の増加，および1666年のロンドンの大火災で焼失した都市の建物を再開発する必要から利率の改定がなされたと考えられている．

この時期に現れた現存する金利表としては，1668年のJohn NewtonによるScale of interst (利息の尺度)がある．この金利表には，6%(当時の法定上限利率)に対し，1年目から3ヶ月刻みで30年目にいたるまでの終価と現価が与えられている．また，この著書には，1年の日割りでの単利および複利の利率と割引率の表も載せられている．

John Newtonの金利表には誤りが多く，11年後に出版されたSamuel Morland表（1679）では，それらを訂正しようとしている．

数年後，John Collin表が，Collinの死後，1685年に，出版された．

Edmond HalleyとIsaac Newtonは，おそらく年金表に貢献した数学者の中で最も有名な2人である．彼らの数理科学上の業績は，天文学や科学的研究の分野でよりよく知られている．しかし，頻繁に彼等と接触を持ったフランスからの亡命者であるAbraham De Moivreの影響を受けた可能性がある．De Moivreは1685年，ナントの勅令の廃止直後にロンドンに亡命し，1692年に有名な天文学者Halleyと会っている．Halleyはシレジアの首都ブレスラウの生命死亡率表を準備したが，その後，1693年に，De Moivreは，ロンドン用に同様の表を作成した．これらの表は，生命年金の価格を評価するために使用されていた．これらの生命死亡率表の発表はIsaac Newtonに影響を与えたかもしれない．1731年，Isaac Newtonの名前で，年金，復帰権付賃借不動産の評価のための表が発行された．1686年にケンブリッジで出版された小冊子Tables for Renewing and Purchasing of the Leases of Cathedral-Churches and Colleges(大聖堂・教会と大学の賃貸契約の更新と購入のための表)にIsaac Newtonの褒辞が含まれていたことは事実である．しかしながら，Newtonがこれらの表の著者であることを決定的に証明することは出来ない．これらの表は，Isaac Newtonの名の下で18世紀中出版され続けたが，Rouse（1816）の考察によれば，この表には数学的齟齬があるので，Newtonによって編集された可能性は殆どない．

さて，18世紀も様々な利息表が出版されている．

John WardのYoung mathematician's guide(若い数学者の案内)(1707)には，5%と6%においての，日割りの終価が与えられており，Clavis usuræ(利息の鍵)(1710)には，対数を使って利息を求める方法が詳しく例示され，対数表も与えられいる．

1707年にJohn Smartが出版した利息表は，初めて死亡率を組み込んだものであった．本書の1726年の増補版の利息，割引，年金等の表では複利について，半年から100年に亘り，2%～10%（0.5%刻み）に対し，半年毎の並びにおける終価表と現価表，そして確定年金終価表と確定年金現価表等が与えられている．

The anti-logarithmic Canon(逆対数基準書)で有名なJames Dodsonは，1747年に発表したThe calculatorにおいて，表Ⅱで2%～8%(0.5%刻み)について1年～60年分の終価表，表Ⅲで現価表，そして表Ⅳで確定年金終価表，表Ⅴで確定年金現価表を付けている．彼はこれらを「Smart表よりもそれほど有用ではない」と言っている．

Francis Bailyは，1808年の著書であるThe Doctrine of Interest and Annuities(利子および年金の原則)のなかで名称利率と実利率の差異を明確に述べ，Smart表を組み込んだが，半年部分は省略した．

William Inwoodが1811年に発表した利息表は，表の並び方がJohn Smartの利息表の並び方に基づいており，今日の実務家には馴染み深い．

1816年には，William Rouseによる重要な著作が現れた．本書の表題は次のように長くかつたいへん大胆なものであった．

半年払や四半期払の年金の評価額に関する，Issac Newton卿やDe moivre，Price博士，Morgan氏，Hutton博士，等々の，すべての筆者たちの誤謬の調査研究

Rouseは，彼の論文で，年金支払いのタイミングと頻度の意味を非常に明確に理解していることを示している．Rouseは，彼がこの論文を書いていた頃には，限られた年数の年金の場合に支払パターンが重要であるという認識があったが，永続性については考慮されていなかった．

古典的な利率計算について最後の1ピースは1874年にW.M. Makehamが発表したOn the solution of problems connected with loans payable by instalments(分割払いによる貸出金に関連する問題の解決について)であろう．本論の中で，よく知られている償還可能な有価証券の評価に使用される公式　$A = K + \frac{g}{i}(C - K)$　が証明されている．

3 暈（かさ）記号の歴史

生命保険数学のテキストを瞥見すると通常の数学とは異質な記号群が目につくであろう．オーソドックスな数学記号から形状の似ているものを敢えて選び出すとするならテンソル記号であろうか．

しかし，少し保険数学を学んでみると，見掛けの差異以上に記号を定義する発想が通常数学とは全く異なっていることが分ってくる．良く言えば徹底して実用的であるし，悪く言えば汎用性が全くない．

形状面で，決定的にこの記号群の特異性を象徴するものは特徴的な¬部分であると思われる．これは halo(暈(かさ))と呼ばれ，そのためアクチュアリー記号のことを halo notation とか halo system などと呼び習わされているわけである．

ここでは，暈記号が導入され共通のアクチュアリー記号として採択されていく歴史に触れるのだが，その前にその歴史を理解するための最低限の予備知識を与えておく．詳しくは，適当なテキスト（例えば，『生命保険数学の基礎』[山内]）を参照していただきたい．

3.1 生命関数記号

生命表とはある大きさを持つ出生者の集団について年齢を伴なう脱退（減少）の推移のうち死亡による脱退原因のみを扱ったものである．ここでは，同時に誕生した１０万人の集団の死亡による減少を１歳刻みに追跡したものと考えればよい．

記号としては，生存数l_x，死亡数d_xとおく．特に，慣例として$l_0 = 100{,}000$とする．生命表の作成は，生命保険数学の中心的な問題であるが，本論では，これらは与えられていることを前提とする．

また，(x)と書いて「x歳の人」を表し，このxを変数とするl_x, d_xと云った関数を生命関数と呼び，その記号を生命関数記号と言う．現在の生命関数記号は David Jones, On the Value of Annuities and Reversionary Payments（1843）[12]に由来するものが多い．

(1)　生存数：l_x　　David Jones（1843）

(2)　死亡数：$d_x = l_x - l_{x+1}$　　David Jones（1843）

[12] JB Cherriman（1879　Actuarial Notes）によると，$d_x = l_x - l_{x+1}$のルーツは De Morgan ではなく，David Jones であると論じている．

(3)　生存率：$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$　　David Jones（1843）

(4)　死亡率：$q_x = \frac{d_x}{l_x}$　　David Jones（1843）

(5)　(x)がn年後まで生存している確率：${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$

(6)　(x)がf年生存した後１年以内に死亡する確率：${}_{f|}q_x = \frac{d_{x+n}}{l_x}$

(7) 死力：$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx}$

（参考:いろいろな死亡法則）

ド・モアブルの法則(1724)	$\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega-x-t}$
ゴンパーツの法則(1824)	$\mu_x = Bc^x$
ゴンパーツ・メイカムの法則(1860)	$\mu_x = A + Bc^x$
ワイブルの法則(1939)	$\mu_x = kx^n$

(8) 平均余命：

$e_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_x}\sum_{k=1}^{\infty} l_{x+k}$　　David Jones（1843）

David Jones（1843）p.121 によると平均余命(expectation of life)の算式と記号は上記の通りである．これは現在の立場では完全平均余命の近似式を表わしており，どちらかと言えば$\mathring{e}_x$と書く方が，混乱が無くて良いのだが，ここではオリジナル表記を尊重しておいた．

（現在の記号）

略算平均余命：$e_x = \frac{1}{l_x}\sum_{k=1}^{\infty} l_{x+k}$

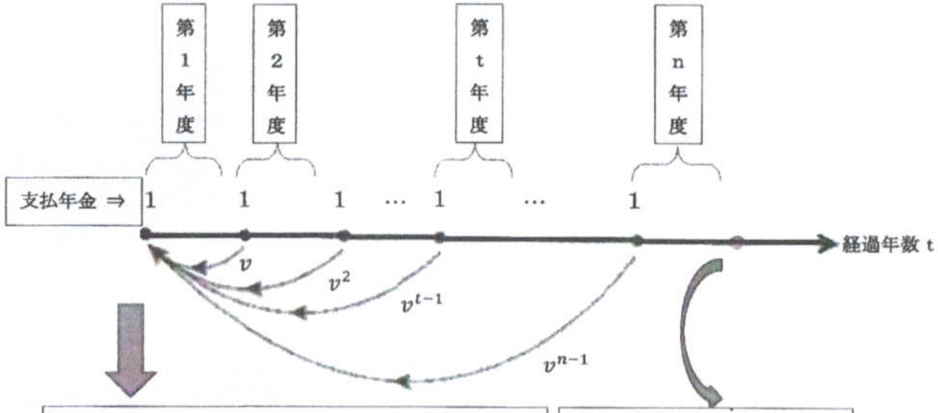
完全平均余命：$\mathring{e}_x = \int_0^{\infty} {}_tp_x\, dt$

（略式平均余命と完全平均余命の近似的関係式）

$\mathring{e}_x \fallingdotseq \frac{1}{2} + e_x$　　より精確な近似式として $\mathring{e}_x \fallingdotseq \frac{1}{2} + e_x - \frac{1}{12}\mu_x$ がある．

3.2 量記号

2.2 で略説した現価の考えから，人の生き死にとは無関係に支払が確定している確定年金の現価は，自然にその定義が定まる．

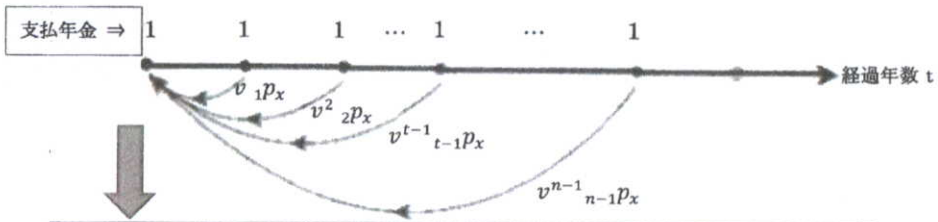


各年度の始めに 1 を支払うので
第 n 年度末には支払はない

$$\ddot{a}_{n|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v}$$

期始払　n 年　年払　確定年金現価

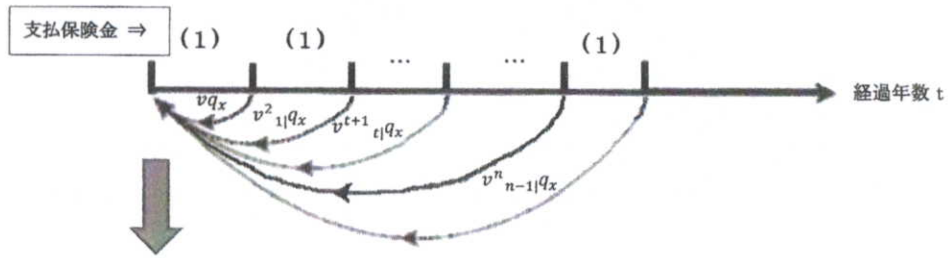
$\ddot{a}_{n|}$の定義における毎年の支払年金額 1 を現在に引き戻す現価率v^tを(x)の生存の期待値を加味した$v^t\ {}_tp_x$に置き換えれば自然に$\ddot{a}_{x:n|}$が定まる．



$$\ddot{a}_{x:n|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\ {}_tp_x = 1 + v\ {}_1p_x + v^2\ {}_2p_x + \cdots + v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x = \frac{1}{l_x}\sum_{t=0}^{n-1} v^t\ l_{x+t}$$

期始払　n 年　年払　生命年金現価

次に，定期保険と云う非常に基本的な保険の保険料を表わす量記号を紹介する．



$$A^1_{x:n|} := \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_{k|}q_x = \frac{1}{l_x}\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} d_{x+t}$$

期末払 n 年満期定期保険の一時払純保険料

	1 年目	2 年目	…	n 年目
現価率	v	v^2	…	v^n
	×	×		×
保険金	1	1	…	1
	×	×		×
据置死亡率	q_x	${}_{1\|}q_x$	…	${}_{n-1\|}q_x$
	‖	‖		‖
期待値の現価	vq_x	$v^2\ {}_{1\|}q_x$	…	$v^n\ {}_{n-1\|}q_x$

⇒合計が$A^1_{x:n|}$

※据置死亡率は，1 年目は$q_x = \frac{d_x}{l_x}$で，2 年目以降は，

(x)が$t-1$年生存した後 1 年以内に死亡する確率：${}_{t-1|}q_x = \frac{d_{x+t}}{l_x}$

※$A^1_{x:n|}$は，t 年目の期中に死亡が発生しても，t 年目末に保険金を支払うことを前提に計算されたものであり，現在の支払い実務に合わせるならば，t 年目の期央に保険金を支払うことを前提に計算すべきで，実際，そのように計算された即時払の n 年満期定期保険の一時払純保険料$\bar{A}^1_{x:n|}$が使用されている．これは　$\bar{A}^1_{x:n|} = \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} A^1_{x:n|}$　で簡単に計算できる．

3.3 暈記号小史

生命保険数理発展の初期の時代である 18 世紀，アクチュアリー数学はヨーロッパ大陸でももちろん発展していたが，その先頭を走っていたのはいち早く産業革命を推進し，社会構造を変革していたイギリスであった．halo notation のルーツもイギリスにある．Abraham de Moivre や James Dodson,Thomas Simpson と云った草創期の人々は，生命保険数理用の現在とは異なる素朴な記号を個々に使用していたのだが，19 世紀初頭から George Barrett や Francis Baily，Joshua A.Milne，Griffith Davies といったさまざまな人々が慣習的に使用してきた記号が次第に統一されていった．

Frank P. Di Paolo[13]及び John Boermeester[14]によると，halo notation（暈記号）の初出と採択の歴史はおおよそ次の通りである．

1843 年に Universal Life Assurance Society のアクチュアリーである David Jones が The Value of Annuities and Reversionary Payments (年金及び復帰年金の評価について) (p.113) において，現在の halo notation の原型と思われるものを初めて使用した．1872 年，英国アクチュアリー協会で，若干の修正と伴に，halo notation は正式に採択され，次いで，1887 年，この記号に基づいて George King により，初めての現代的な生命保険数学のテキストが執筆された[15]．余談であるが，彼の伯父は著名な物理学者であるケルヴィン卿である．良い教科書の存在と云うのは結構影響が大きいもので，このような優れた教科書があったことは，英国流のアクチュアリー記号が国際アクチュアリー記号として採択される要因の一つであったと言われている[16]．

1895 年，ブラッセルスで開催された第一回国際アクチェアリー会議（日本からは日本アクチュアリー会初代代表の矢野恒太が出席している）で，フランスの Leon Mare が次の動議を提出して満場一致の賛成を得た．

13 (当時)Confederation Life, THE INTERNATIONAL ACTUARIAL NOTATION Society of Actuaries March 1976 – Volume 10, No. 3

14 Note on Notation, The Actuary.(1972)

15 Institute of Actuaries' Text Book of the Principles of Interest, Life Annuities, and Assurances, and Their Practical Application,(1887)

16 John Boermeester (Note on Notation, The Actuary.(1972)や竹下清松(Gerge King の業績,日本アクチュアリー会会報第 2 号.（1941））は，このことにより，英国流のアクチュアリー記号が国際アクチュアリー記号として採択される要因の一つであるとしている．

(1) 各国のアクチュアリーは一致して英国アクチュアリー協会の記号を採用することが望ましい．
(2) この記号の修正が必要であるならば将来の国際会議で考慮する．

そして遂に，1898 年，halo notation は第 2 回国際アクチュアリー会議で採択された．カジョリは「数学記号の歴史」で，記号の統一化が成功した例として，この話を取り上げている．1900 年，halo notation は最終的に国際アクチュアリー会議で承認された．

1937 年 6 月にパリで開催された第 11 回国際議会では，アクチュアリー記号表記問題が検討され，次の議会に明確な提案を提出する義務を負う国際委員会が任命された．この委員会は，1938 年 7 月にブリュッセルで会合し，1939 年 7 月に再会合し，彼らが纏め上げた変更提案が 1940 年にルツェルンで採択されることになっていた．

実際には，戦争のため行われることはなかったが，いつまでもこの変更を反映しないままにしておくことは好ましいことではないと考えられ，アクチュアリー協会およびアクチュアリー会は，委員会会議で全会一致または実質的な支持を得た勧告を採用することを決定した．この変更はアクチュアリージャーナルの Vol.Lxxvi と 1950 年 5 月のアクチュアリー協会の試験において有効とされた．F.S.Perryman の総説によれば名称利率の表記記号が$j_{(m)}$から$i^{(m)}$に，期始払年金記号が$\ddot{a}$（エイ・トレマ）に変更され，計算基数の定義が若干の修正を受けている．（4.3 参照）

これらが 1954 年の第 14 回国際アクチュアリー会議で正式に承認され，おおよそ現在使われている記号となっている．

Halo Notation の略歴はこれで十分かもしれないが，筆者としては，David Jones に至るまでの変遷の歴史にも興味があったので，その当時のアクチュアリーたちの著作や論文を瞥見していた．すると，意外なところに特徴的な暈記号 ⌐ が顔を出していることが判明した．

1815 年，Joshua Milne は A Treatise on the Valuation of Annuities and Assurances on Lives and survivorships, vol.1 の p.58 で現在の用語で言えば t 年据置平均余命と t 年定期平均余命にそれぞれ$\urcorner_{t}a$及び $_{\overline{t}|}a$ なる記号を与え，$\urcorner_{t}a+{}_{\overline{t}|}a=a$ なる公式を示している．先に紹介した David Jones の 1843 年の著書には，Milne の仕事から影響を受けたことが明記されおり，実際，p.127 の 1 行目の公式における ⌐ 記号の使い方は Milne と同じである．

1820 年, Benjamin Gompertz(1779-1865)が A Sketch of an Analysis and Notation applicable to the Value of Life Contingencies(生命蓋然性の価格への応用可能な解析と記号の粗描)の p.217- にxの関数の補助係数(mutatis mutandis)として $\begin{smallmatrix}x\\p\\n\\m\end{smallmatrix}\big|$ なる記号を導入している. これは 関数の前に付記して
$x = n, x = n + p, x = n + 2p, \dots, m$についての総和を意味する. 具体的には, 次式を意味する.

$$\begin{smallmatrix}x\\p\\n\\m\end{smallmatrix}\Big|\mathrm{M}_x = \mathrm{M}_n + \mathrm{M}_{n+p} + \mathrm{M}_{n+2p} + \cdots + \mathrm{M}_m$$

1825 年, Benjamin Gompertz が Gompertz の法則$\mu(x) = Bc^x$を発表した著書の p.534 には David Jones の名前が見えし, p.532 には $\begin{smallmatrix}x\\p\\n\\m\end{smallmatrix}\big|$がある. 暈記号特有の ˥ は, 既に, この Gompertz の補助係数記号として使用されており, しかも, David Jones は確実にこの記号を良く知っていた.

H.Braun はイギリス式記号法の特徴をアルテンブルガー (Julisus Altenburger) を引用して説明を与えており, そのなかで ˥ についてもつぎのように触れている.

「添え字はそれの用いられ方によって, それぞれ 1 つの意味を持つ. つまり年齢を示すにはアルファベットの終わりの方の文字が, そして期間を表わすには中頃の文字が使われる. 万一の誤りを避けるために, 時としては後者の上に ˥ という記号をつけることができる. ・・・」

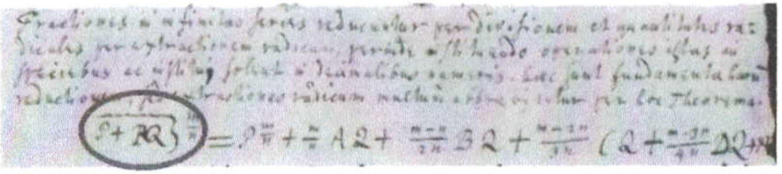
Altenburger の説明により, ˥ と言う部分記号がアクチュアリー記号においてどのような役割を果たしているかは明解となった, しかし, なぜこの記号が選ばれたかには全く言及していない. 「たまたま」と考えるべきなのかもしれないが, David Jones に影響を与えた Milne や Gompertz のテキストに頻出する ˥ 記号が少なからず影響を与えたと考えるのが自然であろう. そして, それらの ˥ 記号のルーツは, 意外にも, Newton の冪記号であったと思われる.

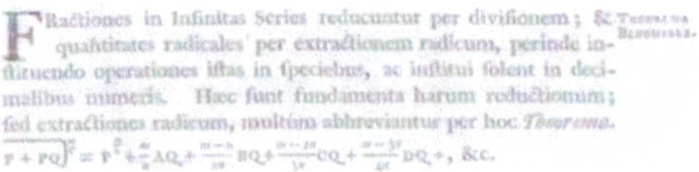
Newton が史上初の分数冪の 2 項定理を発見し, Oldenburg への手紙の中に, その初出を見ることができることは数学史ではかなり有名な話である. そして, その手紙で記されている冪記号は, 現在では使われない, 独特なもので, ˥ を括弧のように扱い, 右上に指数を表示するものであった. 重要なことは, この記号法が Newton の死後もイギリスの Newton 信奉者たちによって使われ続けていたということである. この当時のイギリスの数学界は, 未だ Newton の影響から抜け切れず, Gompertz のテキストにも, 現在では全くつかわれることのない Newton 記号 ˥ が使用されている.

イギリスにおける Newton 信奉を象徴する面白い話を紹介しておこう. ルーカス教授職にあった Robert Woodhouse が Leibniz 流の記号を採択した書籍を出版したことに対し, 1804 年付の書評で「Isaac Newton 卿の流率法の記数法を棄て, 卓越した多才な人ではあるが科学の問題についてはまちがいなく剽窃者である Leibniz の微分記数法を採用したことは愚かなてらいではないか」と言った批判がされているのである. Nicolas Fatio de Duillier が 1699 年に発表した自著のなかで, Leibniz を剽窃者として告発してから既に 1 世紀以上の歳月が流れているにも拘わらず, 未だにこのような言説が現れていたとは驚くべきことと言わざるを得ない. また, 先に紹介した Gompertz 自身が Newton 信奉者であることも, 良く知られている. しかし, 1840 年代に出版された Jones の著書には, アクチュアリー記号としての「暈」はあるが, Newton 記号としての「暈」はさすがに見られなかった. 付録 1 に, 18 世紀から 19 世紀中ごろまでのイギリスでの Newton の暈記号の使われ方について調べた表があるで参照してみて頂きたい.

以上のような考察から, 筆者はアクチュアリー記号の特徴である暈記号は, Newton に由来すると考える. 少なくとも, 大陸のアクチュアリーたちならば, この記号を使うことは無かったであろうし, 実際, 著明な何人かのアクチュアリーの使った記号を調べたが, この記号は使われていない. 参考までに Newton の手稿を紹介しておこう.

（参考）Newton がこの記号を使った有名な例として，下記にある史上初の分数幂の二項展開定理を披露した Oldenburg への手紙(1673 年 6 月 13 日)の抜粋手稿[17]及びその印刷版[18]を挙げておく．また，この記号は Newton にとってその場限りのものではなかったようで，有名な 1676 年 10 月に記述された Leibniz への手紙の中にも現れている．（付録 4 参照）

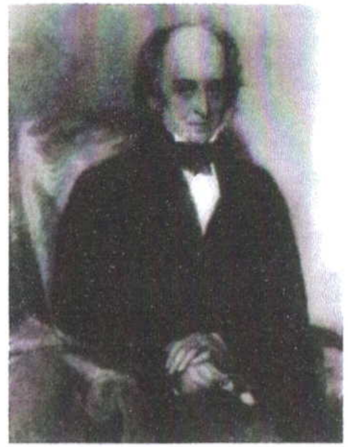



Fractiones in Infinitas Series reducuntur per diviſionem; & quantitates radicales per extractionem radicum, perinde inſtituendo operationes iſtas in ſpeciebus, ac inſtitui ſolent in decimalibus numeris. Haec ſunt fundamenta harum reductionum; ſed extractiones radicum, multum abbreviantur per hoc *Theorema*. Theorema Binomiale.

$\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ +$, &c.

本節で現れた人々の中で，Newton や Leibniz は言うまでもなく，Abraham de Moivre や Thomas Simpson も一般的な数学史のなかで良くお目にかかる名前であるが，それ以外は殆ど聞いたこともない人も多いのではなかろうか．James Dodson ，George Barrett や Francis Baily，Joshua A.Milne，Griffith Davies，Benjamin Gompertz，David Jones，George King　皆，一般数学史の世界では殆ど無名に近い．しかし，彼らがアクチュアリー数学に残した功績は偉大であり，もう少し正当に評価されても良い気がする．例えば，Benjamin Gompertz[19]などは現在も生命表の高齢者部分の補正に使われ続けていて，すべてのアクチュアリーが知っておかなければならない Gompertz・Makeham の死亡法則の発案者でありながら，彼がどのような人物であったかを記す本を寡聞にして見たことがない．少しだけ，彼の人となりについて触れておくことも無駄ではないと信じる．

[17] http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03977/63
[18] http://www.maa.org/book/export/html/116901
[19] 「死力は年齢が行くに従って，指数関数的に増加していく」と云う法則を提言したことで有名である．彼の法則を一部改良した Makeham の法則は現在も Gompertz・Makeham の法則と呼ばれ，死亡表の高齢者部分（データが少ない）の補正に使われている．


Benjamin Gompertz
(1779-1865)

Benjamin Gompertz は，著明なユダヤ人一族の出身で，1779 年 5 月 5 日にロンドンに生まれた．父親と祖父はダイヤモンド商人として成功しており，オランダ生まれの母親も祖父がオレンジ公 William と親密であったほどの名家の出であった．彼には 4 人の兄弟がおり，皆，芸術や学問には豊かな才能を示したが，彼も含めていずれも商才には長けていなかった．

宗教上の理由から，Benjamin は大学で教育を受けることが出来なかったが，若い頃から溢れんばかりの才能に輝いており，独学で英語，フランス語で書かれた数学書に慣れ親しんだ．中でも Newton, Maclaurin や Emerson は彼のお気に入りで，Newton には心酔していた．少年時代，彼の知識欲はあまりに旺盛であったので，彼の両親は，彼が勉強のやり過ぎで身体を壊さないようにローソクを取り外したのだが，彼は両親の目を盗んで庭に出て，月明かりで勉学に励んだ．

Gompertz の最初の重要な論文は，1806 年に王立協会に提出されたもので，「不可分量」を使って得られたある種の級数の和に対して差分法を適用するものであった．また，彼は，1812 年から 1822 年の間，1 度も外れることなく，数学雑誌の懸賞問題に対して，年間優秀賞を獲得し続けたことにより頭角を現して行った．

また，Gompertz は当時としては先進的な「虚量（虚数）の理論」にも興味を持ち，王立協会に論文を提出したが，こちらは深淵過ぎて誰も理解出来ないとの理由で掲載を拒否されている．そこで彼は 1817 年と 1818 年に，これらの論文を私費で出版している．

このような輝かしい業績により，彼の数学者としての名声は確立し，彼は 1819 年に王立協会のフェローに，後には，理事会のメンバーになった．1821 年に設立された天文学会においても，理事会のメンバーに選出され，約 10 年に亘り，天文学に関連する論文を発表している．しかし，彼は技術的な天文学者にはならなかったし，現実への応用よりも算術的な理論研究の方に喜びを感じていた．

1822年，Gompertz は Francis Baily(4.2 参照)と固定した星々の見掛けの位置から平均位置に還元する方法についての共同研究を行った．これはこの当時の天文学者にとって厄介な問題であった．王立天文学会の完全な恒星目録の一部はこの二人の骨の折れる仕事の賜物である．Gompertz の天文学に関する論文は 1829 年が最後であるが，その後も終生，この分野には興味を持ち続け，隕石や流星，彗星などについて調べていた．

しかしながら，Gompertz が生涯において最も力を注いだ分野はもちろんアクチュアリーサイエンスであり，生命法則に関する 1820 年と 1825 年に王立協会に提出した論文は，歴史に残る傑出したものであった．彼の有名な死亡法則への洞察は次のような言葉で綴られている．

> 死は一般的に共存する 2 つの原因の結果である可能性がある．一つは，事前の資質に依らないことであるが，死亡または悪化への可能性であり，今一つは，劣化または，破壊を耐えしのげる不可能性の増加である．

彼の論文は，現在のアクチュアリー記号が確立する前のものなので，いささか迂遠で読み難くもあるが，彼の死亡法則を現在の記号で書くならば，$\mu_x = Bc^x$，と簡潔に表現される．(3.1 参照)

1825 年に発表され，彼の名前を不滅にした Gompertz の法則は，1860 年の Makeham によって改善され，より適用範囲の広い法則，$\mu_x = A + Bc^x$,となって現在に受け継がれていることは幸運なことであったが，不愉快なエピソードも無くはなかった．1832 年に，T. R. Edmonds は自分の死亡法則を発表し，それが不完全な Gompertz の法則より先にそして独立に発見されていたと主張する発表を行ったのである．De Morgan は Edmonds を非難したが，Edmonds がこれに反論する論文を書いた．T. B. Sprague が De Morgan に同調すると，Edmonds はこれに即座に反論，Sprague の名前の代わりに「Gompertz 氏の吹聴者」と記した．これを受けて Sprague は Edmonds を「Gompertz 氏の剽窃者」と呼んで応酬した．これに対して Edmonds が更に長い反論を展開するのであるが，このような議論に優れた数学者でもある W. S. B. Woolhouse が最終的な決着を付けた．彼は Gompertz を「ヨーロッパ最大の数学者の一人」と表現し，「偉大な誠実性」の持ち主と評した．

この法則が発表された前年，Nathan Rothschild と Moses Montefiore 卿の主導で，アライアンス保険会社が設立され，Gompertz はアライアンス保険会社の最初の首席アクチュアリー（1824-1847 年）になっていた．実は，彼がこの職責に就くにあたって，次のような興味深いエピソードがある．

Nathan Rothschild の義理の兄弟である Gompertz がひどく興奮した状態で Nathan のところに駆け上がってきたとき，Nathan は王立証券取引所で ― 久しく「Rothschild の柱」として知られていた ― 彼のお気に入りの柱に 1 日中もたれ掛っていたと伝えられている．

「どうしたんだ？」と尋ねる Rothschild．Gompertz は彼の宗教を理由に大きな保険会社のアクチュアリー職の競争で，彼が最適な候補者であるにも拘わらず，どのように拒否されたかを喘ぎながら説明した．選考に関わった取締役達は，自分たちはユダヤ人を採用しないだろうと言い放ったと言うのだ．今度は Nathan の方が激昂し，「なんだと！」と叫び，ポケットから手を出して，彼の義弟の両肩を掴んだ．「宗教が理由でお前を取らないだと！糞たれめ！儂がお前のためにそいつらのどれよりもでかい会社を作ってやる．」そして Nathan は言ったことを実行した．(Cornelius Walford による「保険事典」を参照のこと)

アライアンス保険会社は Gompertz の指導の下で，着実に伸展していった．彼は新契約を増やすことよりも適切な保険料計算の基盤の方に関心を持っており，使用する生命表としては Carlisle 表が望ましいと直ぐに気づいた．なぜなら，この表の死亡率が実際の死亡率よりも若干高めに見積もられているように見えたからである．彼は早くも 1820 年には，王立協会への論文のなかで，当時の保険会社が不適切な生命表を使用している慣行を批判し，様々な会社のアクチュアリーが協力して合同で適切な生命表を作成することを推奨している．この意見は 1843 年の 17 社共有死亡率表の完成で達成される．

1847 年に加齢と健康上の理由からアライアンス保険会社のアクチュアリーの職を辞すまで，彼は非常に活動的であり，しばしば他社からの相談を受けたり，他社のアクチュアリー職を兼任することもあった．また，王立協会や天文学会の他にも Spitalfields 数学者協会，後に天文学会に吸収されるのだが，の熱心な会員であり，一時期は会長も務めている．王立統計学会の設立に参加し，有用知識普及協会の推進者の一人でもあった．

彼は金銭面でもいろいろと貢献しており，ユダヤ人慈善団体やアクチュアリー協会に多額の寄付をおこなっている．

1847 年の退職後，彼の健康は悪化して行ったが，それでも 1860 年には国際統計学会に論文を寄稿し，出生から老後に至る全期間で適用可能な死亡率に関する彼の法則(いわゆる Gompertz の法則)の変更を提案している．

同じテーマの別の論文を 1862 年に王立協会に提出している．1864 年には Barrett の計算基数や保険会社間の競争をコントロールする方法についての公表をするはずであったが，健康上の理由から要約のみが発表された．

最晩年に至っても彼の旺盛な活動意欲は衰えず，1865 年 1 月に設立されたロンドン数学者協会の立ち上げメンバーの一人になっている．そしてこの年の 7 月，当学会への論文を準備している最中に，彼は 86 歳の天寿を全うした．

筆者はこの傑出した人物がユダヤ人差別によって保険会社のアクチュアリー職を拒絶されたことに強い印象を受けた．

西欧諸国のユダヤ人差別はシェークスピアの「ヴェニスの商人」を挙げるまでもなく常識であり，今でこそ数学や理論物理を席巻するするユダヤ人であるが，彼らが大学に数学者のポストを得ることが出来たのは，ようやく 19 世紀になってからである．

その程度の史実は筆者でも当然知っていたのだが，それにも拘わらず，上記のエピソードには大変驚かされた．なぜなら，現在はソフィスティケートされて非常にステータスが高くなっている銀行業であるが，元は高利貸しから始まったものであり，かつては宗教上の理由から賤業と見なされており，それ故，祖国を持たず普通の職に就き難かったユダヤ人がこの分野では中心的な役割を果たしていたと云う史実があったからである．つまり，筆者は保険業を現在的な感覚で金融業として銀行と同様の目で見ていたのであるが，どうやらこれは完全な考え違いであったらしい．上記のエピソードはそんな筆者の安易な思い込みを払拭してくれた．

本節の最後に，halo system（あるいは halo notation）の拙訳語である「暈記号」について少しコメントしておく．

1974 年，国際アクチュアリー記号に関する動きについて　＜国際アクチュアリー記号実行委員会＞（日本アクチュアリー会会報第 28 号）

に於いては「後光方式」[20]と云う訳語が与えられていた．この訳語は踏襲

20　(当時)三井生命保険相互会社システム部　藤田輝昭氏による．余談であるが，氏の名前は清水達夫氏の「新数学人集団（SSS）盛衰記」（数学セミナー　1993.12）のなかで次のように出てくる．「1952.6.23　遠山啓『無限と連続』の合評会　これに続く　26　遠山啓教授をかこんで　そうやって出来たのが　数学方法論研究会(仮称)　例会の第 3 回までは，目黒区高木町の宮原克美下宿．報告者は，立川三郎，銀林浩，藤田輝昭．つぎに東大で杉浦光夫，谷山豊．・・・」アクチュアリーとしては，「補正法（離散データの平準化）」を研究

されて，

1985 年，国際アクチュアリー記号常設委員会議事録（翻訳）（日本アクチュアリー会会報第 38 号）

に於いても「後光記法」が使用されている．しかしながら，

1991 年，国際アクチュアリー記号常設委員会の活動報告（1990.4）＜記号研究会＞（日本アクチュアリー会会報第 44 号）

では「暈状（うんじょう）表記」なる訳語に改められている．これ以降，国際アクチュアリー記号常設委員会の活動報告は会報に載っていない．確かに，halo には「後光」と云う意味もあるが，筆者の個人的な感想を言わせて頂くとするなら，「後光」と云う訳語にはいささか違和感を覚えざるを得ない[21]．$\bar{A}_{x:\overline{n}|}$　の $\rceil$ の形状を指し示すのであるなら，「後光」よりも「暈状」の方が適切と思われる．しかし，訳語としてはまだ重過ぎる気がする．そもそも「うんじょうひょうき」と言われて「暈状表記」と書くことは至難の業であろう．そういう訳で，本論文では，halo notation の訳語は「暈(かさ)記号」に統一することとした．

され，死亡率表の補正に重要な仕事をされている．また，1969 年に森北出版から発行された『保険数学』にも執筆協力者として名前を連ねている．また，上記の例会に参加していた立川三郎氏も(当時)大正生命に入社されアクチュアリー会の会報に論文を発表されている．

21 しかし，英米圏の人にはこの語感で感じているのかもしれない．実際，halo notation について，" Is the actuary a little lower than the angels?"と云うジョークを書いている John Boermeester のようなアクチュアリーもいる．

4 計算基数の歴史

生命保険数学には「計算基数(commutation columns)」と呼ばれる特徴的な記号で表記された基数関数(commutation functions)を使った計算方法がある．保険料や積立金(責任準備金)を簡単に計算するためのもので，理論的側面を言えば，この計算方法がなくても生命保険数学は構築できるし，コンピュータが発達して表計算ソフトが行き渡っている現在においては，実用面の優位性も揺らいできている．「計算基数の栄光の時代はさったといってよいだろう．(H.U.Gerber)」とまで言い切る専門家もいる．しかしながら，現在販売されている終身保険，養老保険，定期保険のような古典的な生命保険は，計算基数を使って計算されており，これらの商品が保有契約として残っている間は，計算基数は使われ続けるであろうから，案外，まだまだ使われるかもしれない．

4.1 計算基数

さて，計算基数の歴史を語る前に，計算基数とはそもそもどのようなものかを簡単に説明しておこう．

必要なものは，2.3 で定義した現価率 v と 3.1 で定義した，l_x, d_xと表記する生命関数と補助的な最終年齢ωだけである．精確を期すため，定義を下記にまとめておく．

(1) x : 年齢
(2) 生存数 : $l_x - d_x = l_{x+1}$ ただし，$l_0 \coloneqq 100{,}000$人
(3) 死亡数 : $d_x = l_x - l_{x+1}$
(4) 現価率 : $v = \frac{1}{1+i}$ ただし，iは利率．(例えば，$i = 0.015$なら$v \fallingdotseq 0.9852$)
(5) 最終年齢 : ω すべての人が死ぬ最終年齢をωと書く．つまり$l_\omega = 0$．
たとえば，生保標準生命表 2007(死亡保険用)男性の場合は$\omega = 108$である．

vは，予定利率をiと置いたとき，1 年後に 1 円になるために必要な原資の価格を表わすものであった．一方，l_xは，男女別にそれぞれ 10 万人が同時に出生したと考えてこれをl_0として，その後x歳に到達する人数を表わしたものであり，d_xはx歳の人が$(x+1)$歳になる前に死亡する人数を表わすものであった．

これらから$\mathrm{D}_x, \mathrm{N}_x, \mathrm{S}_x, \mathrm{C}_x, \mathrm{M}_x, \mathrm{R}_x$なる 6 つの基数関数と呼ばれる関数を下記のように定義する．これらの基数関数のことを計算基数と呼び，予定利率と性別を固定して年齢毎に $\mathrm{D}_x, \mathrm{N}_x, \mathrm{S}_x, \mathrm{C}_x, \mathrm{M}_x, \mathrm{R}_x$を列記した表を計算基数表と呼ぶ．

(生存基数)

$$\mathrm{D}_x = v^x l_x$$

$$\mathrm{N}_x = \sum_{k=0}^{\omega-1-x} D_{x+k}$$

$$\mathrm{S}_x = \sum_{k=0}^{\omega-1-x} N_{x+k}$$

(死亡基数)

$$\mathrm{C}_x = v^{x+1} d_x$$

$$\mathrm{M}_x = \sum_{k=0}^{\omega-1-x} C_{x+k}$$

$$\mathrm{R}_x = \sum_{k=0}^{\omega-1-x} M_{x+k}$$

生保標準生命表 2007(死亡保険用)による計算基数表　男性

予定利率 1.50% (一部のみ表記)

x(年齢)	l_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x
0	100,000	108	100,000.0	4,613,500	106.404	31818.705
1	99,892	75	98,415.8	4,513,600	72.800	31712.301
2	99,817	49	96,888.5	4,415,185	46.860	31639.501
・・・	・・・	・・・	・・・	・・・	・・・	・・・
30	98,434	85	62,974.4	2,189,633	53,576	30615.257
31	98,349	88	61,990.1	2,126,659	54.647	30561.681
32	98,261	90	61,019.4	2,064,669	55.063	30507.034
33	98,171	94	60,062.6	2,003,649	56.661	30451.971
34	98,077	98	59,118.3	1,943,587	58.199	30395.310
35	97,979	103	58,186.4	1,884,469	60.264	30337.111
・・・	・・・	・・・	・・・	・・・	・・・	・・・
106	2.3243	1.7182	0.47961	0.602830	0.34931	0.47071
107	0.6061	0.6061	0.12322	0.123220	0.12140	0.12140

なお，$\bar{\mathrm{C}}_x$，$\bar{\mathrm{M}}_x$については$\bar{\mathrm{C}}_x = \mathrm{C}_x(1+i)^{\frac{1}{2}}, \bar{\mathrm{M}}_x = \mathrm{M}_x(1+i)^{\frac{1}{2}}$と計算する．

ここでは分り易さを意識して，l_x, d_xも併記したが，通常は併記しない．

あとはこれらの計算基数の使い方を理解すればよい．

与えられたl_x, d_x, vから　基数$\mathrm{D}_x,\mathrm{N}_x,\mathrm{C}_x,\mathrm{M}_x$を算出しておけば下記のように生命年金の一時払保険料（現価でもある）や終身保険，養老保険，定期保険の年払保険料が簡単に求まる．これは計算機のない当時の実務実態を考えると驚くべき簡便計算法であったと思われる．

3.2 で例示した期始払　n 年　年払　生命年金現価を再掲し，基数表記に変形しておく．

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \ {}_tp_x = 1 + v\ {}_1p_x + v^2\ {}_2p_x + \cdots + v^{n-1}{}_{n-1}p_x = \frac{1}{l_x}\sum_{t=0}^{n-1} v^t\ l_{x+t}$$

$$= \frac{v^x l_x + v^{x+1} l_{x+1} + v^{x+2} l_{x+2} + \cdots + v^{x+n-1} l_{x+n-1}}{v^x l_x} = \frac{\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}$$

たとえば，

$$\ddot{a}_{30:\overline{5}|} = \frac{\mathrm{N}_{30} - \mathrm{N}_{35}}{\mathrm{D}_{30}} = \frac{2{,}189{,}633 - 1{,}884{,}469}{62{,}974.4} = 4.84584$$

同様に，期末払 n 年満期定期保険の一時払純保険料は下記のとおりである．

$$A^1_{x:\overline{n}|} := \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_{k|}q_x = \frac{1}{l_x}\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ d_{x+t}$$

$$= \frac{v^x d_x + v^{x+1} d_{x+1} + v^{x+2} d_{x+2} + \cdots + v^{x+n-1} d_{x+n-1}}{v^x l_x} = \frac{\mathrm{M}_x - \mathrm{M}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}$$

たとえば，

$$A^1_{30:\overline{5}|} = \frac{\mathrm{M}_{30} - \mathrm{M}_{35}}{\mathrm{D}_{30}} = \frac{30615.257 - 30337.111}{62{,}974.4} = 0.0044168$$

収支相当の原則を使えば n 年定期保険の年払純保険料も次のように簡単に求めることができる．

毎年初めに契約者から支払われる保険料を$P^1_{x:\overline{n}|}$と置くと，保険会社から見て

（契約始期の収入現価）　$P^1_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

（契約始期の支払現価）　$A^1_{x:\overline{n}|}$

収支相当の原則より　$P^1_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|}$

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{(\mathrm{M}_x - \mathrm{M}_{x+n})/\mathrm{D}_x}{(\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n})/\mathrm{D}_x} = \frac{\mathrm{M}_x - \mathrm{M}_{x+n}}{\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}}$$

たとえば，

$$P^1_{30:\overline{5}|} = \frac{\mathrm{M}_{30} - \mathrm{M}_{35}}{\mathrm{N}_{30} - \mathrm{N}_{35}} = \frac{30615.257 - 30337.111}{2{,}189{,}633 - 1{,}884{,}469} = 0.000911$$

終身保険についても計算基数による表示を与えておく．

（期始払終身生命年金現価）　$\ddot{a}_x = \frac{\mathrm{N}_x}{\mathrm{D}_x}$

（一時払終身保険純保険料）　$A^1_x = \frac{\mathrm{M}_x}{\mathrm{D}_x}$

（終身払終身保険年払純保険料）　$P^1_x = \frac{\mathrm{M}_x}{\mathrm{N}_x}$　※終身に渡り保険料を払う

（短期払終身保険年払純保険料）　${}_mP^1_x = \frac{\mathrm{M}_x}{\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+m}}$　※m 年保険料を払う

たとえば，

$$\ddot{a}_{30} = \frac{\mathrm{N}_{30}}{\mathrm{D}_{30}} = \frac{2{,}189{,}633}{62{,}974.4} = 34.770$$

$$A^1_{30} = \frac{\mathrm{M}_{30}}{\mathrm{D}_{30}} = \frac{30615.257}{62{,}974.4} = 0.48615$$

$$P^1_x = \frac{\mathrm{M}_{30}}{\mathrm{N}_{30}} = \frac{30615.257}{2{,}189{,}633} = 0.013982$$

$${}_5P^1_{30} = \frac{30615.257}{2{,}189{,}633 - 1{,}884{,}469} = 0.1003$$

このように基数表が与えられていれば，古典的な保険の保険料が簡単に求められることが了解されたであろう．読者の中にはこの方法があまりにも単純であるが故に，幸運な思いつきに過ぎないように感じられたかもしれない．しかし，それは現在を生きるわれわれの後智恵であって，この計算方法は，優れた計算家の4半世紀にも及ぶ血の滲むような努力の果てに獲得されたものであり，決して単なる思い付きではないことが次節で明らかになるであろう．そして，H. Braun が言うように1693年のハリーも1725年の De Moivre も1742年 Simpson，1771年の Price 博士も計算基数は発見出来なかった．更に，付け加えるなら，この分野に14本の論文を書いた Euler もそうであったのである．

4.2 計算基数の由来

計算基数の初出については，古くは David Jones や George King から，新しくは山内恒人氏に至るまで，Griffith Davies により上梓された Tables of Life Contingencies(生命蓋然表) (1825)であると見なされている．

Davies はウェールズ人で貧しい両親から生まれた．彼は数学教師として身を立て，後に，ガーディアン保険会社の初めてのアクチュアリー(1822-1854)となった．彼はまた1823年からリゾヴェーショナリー・インタレスト社のアクチュアリーでもあった．彼は復帰年金に興味があったのでエクイタブル社の経験表の準備を示唆したのかもしれない．Davies は，エイクタブル社のアクチュアリーである William Morgan によって与えられた予定死亡への実際の死亡率に基づいて，ノーサンプトン表を参照することで，この死亡表を計算した．Davies は，可能な方法の中で，非常に乏しいデータからいかに良好な結果を得ることができるかを示して見せた．

一方，H.Braun は，計算基数の創案者としての名誉を受けるに相応しい人物は，Calculations deduced from first principles (第一原理からの演繹計算) (1772)を発表した William Dale であるとしている．確かに，Davies の著書には殆ど現在と同じ記号と使い方を提示しており，C_xは導入していないとか，N_xを求めるときにD_xではなくD_{x+1}からサンメーションをとっていたと云った微細な差異を除けば，ほぼ現在の計算基数が完成していた言えよう．しかしながら，そのアイデアの源泉と云う観点から言えば，彼は祖述者であっておよそ創案者とは言い難い．その点では，Dale

の方がその資格がありそうである．しかし，彼の著書は結果的に後世に影響を与えていない．喩は悪いかもしれないが，Coulomb の法則を Coulomb の前に Cavendish が発見していたとしても彼の個人的な研究ノートの中にだけ存在していたのでは，やはりこの法則は「Coulomb の法則」と呼ばれてしかるべきと言わざるを得ない．その意味で Dale は計算基数の先駆者とは言えるだろうが，歴史に影響を与えた創始者とは言い難い．それでは計算基数を編み出して，世に広めた人物とは誰であろうか．

管見の及ぶ限りではあるが，George Barrett の四半世紀に及ぶ研究を発表した Francis Baily の The Doctrine of Life-annuities and Assurances(生命年金および生命保険の原則) (1813)こそが，歴史的に影響力を及ぼした計算基数の初出文献であると考えている．De Morgan は，計算基数における Barrett と Davies の位置づけを対数における Napier と Briggs になぞらえた．

ここでは，Leslie Stephen による Dictionary of national biography(英国人名辞典)から Barrett についての点描を与えておこう．

George Barrett は，Surrey 州にある小さな村である Wheeler 通りの農民の子として生まれた．幼い頃，日々の労働に従事していたにも拘わらず，独力で数学において著しい進歩を成し遂げ，人の寿命に関連する諸問題に特別の興味を抱いた．

その後，彼は25年（1786～1811）もの間，生命保険および生命年金の基数表の作成に心血を注ぎ，その間ずっと，最初は校長として，その後は土地管理人として，彼の若い親戚を扶養するために働き通し，その親戚を援助するために自分の収入の大部分を費やした．

1813年，彼はホープ生命保険会社のアクチュアリーになったが，その任期は2年にも満たなかった．世俗的な意味で彼の人生はすべて失敗であった．64歳のとき，健康を害し精神的にも疲れ切ってしまい，退職し，残された日々を彼は姉妹と一緒に過ごした．1821年，Godalming の家で亡くなった．

Barrett の包括的な一連の生命表，およびその表を作成するために彼が考案した基数計算法として知られている独創的で肥沃な方法は，Francis Baily の熱心な賛同を勝ち得た．Baily は，天文学者として有名で，日食の際に現れる「Baily の数珠」にもその名を残している．王立天文学会の創設者の一人でもあり，4回にわたり会長を務めている．彼は，王立協会のメンバーとしての影響力を利用して，この方法を含む生命表を予約出版

Francis Baily
(1774-1844)

させるために真摯な努力を続けたが，結果として徒労に終わった．1812 年に王立協会において，計算基数についての論文を読み上げたにも拘わらず，エクイタブルのアクチュアリーである William Morgan によって，説明なしに，その学術報告を出版することは拒絶されたからある．

その後，Baily は，1808 年に出版していた自著 Doctrine of Interest and Annuities(利子および年金の原則)の 1813 年版の補遺 The Doctrine of Life-annuities and Assurances(生命年金および生命保険の原則)として Barrett の計算基数を載せた．本書の序文の中で，この掲載の動機を次のような率直な言葉でに説明している．

「Barrett 氏の優れた業績を想起するとともに，彼の表がつくられた場合に基礎とされた原則—この原則は，分析者に新しい広大な分野を開くものであり，この学問で遭遇する最も複雑な問題のいくつかにおける計算の手数を大幅に軽減するものである—を明らかにするために，私は以下の論文を完成し，これを王立協会の機関誌 Philosophical Transaction に発表するのが有意義と判断するものとして，同協会にこれを提出したのである．昨年，同協会は，それがあまり関心をもたない論題についての私の送付論文を受け入れた．しかし，毎年王立協会が発行する機関誌には，特殊ではあるが価値のない考察が掲載されており，真面目で重要な性格の研究は閉め出しを喰らうのだということを悟らなければならなかった…．

それにもかかわらず，私のささやかな努力がいくらか役立つ限りは，Barrett 氏の驚嘆すべき業績が忘れられることはないであろう．幸いにも，私の著書『生命年金および生命保険の原則』への補遺のかたちで，以下の論文をその付表とともに発表してよいとの許可を Barrett 氏から得ることができた．これによってこの独自の学問的分野における，かれの素晴らしい労作が，この問題に興味をもつ人びとの記憶にとどめられることとなろう．」

ここで 1810 年に上梓された Baily の上記の補遺と同じ表題であるが異なる著書 The Doctrine of Life-annuities and Assurances(生命年金および生命保険の原則)について簡単にその歴史的意義を述べておこう．

（§369）では，公式$P = \frac{A}{1+a}$が普遍妥当性をもつものであることを明らか

にした．また，解約返戻金の概念から保険料積立金の概念を明晰化した．（§430）には「一定額を終身保険に付した人が，その請求権を放棄する場合に，彼に支払われるべき金額を求めること」があり，その解として保険料積立金の定義式

$$V_m = A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}$$

が言葉で表現され，計算例も与えられている．更に，（§432）では，生命保険数学の中で最も有名な公式の一つである $A = 1 - d \cdot \ddot{a}$ が，3 人の連生保険に関連した問題の中で得られている．この結果は初めてのもので，その後，1 人以上の任意な人数の場合に一般化されている．

Barrett の死後に起こった火事によって，彼の論文の殆どは焼失してしまった．Barrett 表は Charles Babbage によって購入された．Babbage は Barrett 表を自分の著書である「生命保険に対する様々な制度の比較所見について(1826)」に使った．Baily の著書の付録にある雛形を除いて，それは決して出版されなかった．

ここでは悪役のような損な役回りをしている Morgan であるが，彼の生命保険数学における貢献も大したもので，公平を期す観点から彼の点描も与えておこう．

William Morgan は 1750 年 5 月 26 日，Bridgend の内科医の家の長男として生まれた．医者になるためにロンドンで勉強するのだが，そこで母親の弟である Richard Price 博士と数年を過ごすことになる．この偉大な叔父は，後々，彼に大きな影響を与える．

William Morgan
(1750-1833)

Morgan の父親は，息子が家業を継ぐことを期待していたが，一方で，自分の息子が「薬学の研究よりも学術的な学問」に向く傾向が強いと感じていた．結局，彼は Morgan を医師として迎え入れることはなかった．

Morgan は医学の研究を進めるために，Limehouse Docks の薬局に勤めたが，そこの主人との関係が上手く行かず，3 ヶ月で「ムカついてやめた」．彼は，こんなことも書き残している．「私のウェールズ人としての気性はそれ以上耐えることができなかった．私は彼に向かい，（一発浴びせて）犬小屋に寝かせてやった．」

叔父の Price は，Morgan のためにもっと良い雇用主を探してやり，彼

は医学研究の終わりまで，ほぼそこに留まることが出来た．Morgan は一緒に勉強した人たちからは良く思われており，本人も，1772 年に，父親が亡くなった後，父の跡をついで医学の道で成功することを望んでいた．しかし，性格がいささか反抗的であったこと，患者たちが嫌がる身体的欠陥（内反足）があったことに加え，強力な商売敵がおり，この目的を達成するのはかなり困難であった．止めの一撃はこの商売敵の Jenkin Williams が Morgan の姉と結婚したことであろう．ここに至って，彼は地元で医者になる道を諦め，ロンドンに行って叔父の助言を求めた．

この頃，Price は金融問題の専門家として知られるようになっており，彼の助言はさまざまなテーマで求められていた．そうした相談を求めた者の中にエクイタブル生命保険会社があった．1773 年に Morgan が叔父の家に来たとき，エクイタブル社の「アクチュアリー」であった John Edwards が急逝したばかりであった．Price は，エクイタブル社の訪問から戻ってきたとき，数学ができるかどうかを甥に尋ねた．「いいえ，叔父さん」と答えたが，「でも，学ぶことはできます」． そして，非常に短期間のうちに十分に熟達し，彼は，1774 年 2 月にエクイタブル社のアシスタント・アクチュアリーに任命され，1 年後には同社のアクチュアリーに任命された．更に，その次の年である 1776 年には，彼の指導の下，エクイタブル社において，初めてアクチュアリアルな理論に基づいて準備金の積立が行われた．

1781 年に Morgan は，4 人の息子と 1 人の娘を持つ Susanna Woodhouse と結婚した．息子の一人，William は，数年の間エクイタブル社で父 Morgan のアシスタント・アクチュアリーとして働いたが，1819 年の息子の早世により，この息子に彼の跡を継がせたいという父親の希望は潰えた．後日，1801 年に生まれた末の息子，Arthur が，アシスタント・アクチュアリーとなり，その後，共同アクチュアリーとなった．

このように，Morgan の人生は叔父の Price に相当助けられていたことが見て取れるし，実際，彼は Price を生涯敬愛しつづけた．彼は，復帰支払に関する Price の本だけでなく，数多くの Price の説教も編集するように導いた．1815 年には，彼は叔父 Price の回想録を出版している．本書によると，Price が幅広い見識と，多くの興味と幅広い共感を持った人物であったこと，更に，Burke と Samuel Johnson からの返信を得るのに十分な権威を有する一角の人物であったことが分る．また，本書から，Morgan の親密な友人の中には Samuel Rogers がいたことも明らかとなった．彼は詩人であり，彼の美しい姪（Maria Towgood）は，Morgan の息子 William と結婚した．

興味深いことに，1785 年に王立協会に提出されたモーガンの最初の論文は生命偶発事故とは関係がないことに気付かされる．それは，「完璧な真空の非伝導力を確認するために行われた 2 回の電気実験の報告」である．数年前（1781 年）には，Crawford 博士の熱と燃焼の理論の試験を発表している．これらの 2 つの取り組みは，どちらも今日では価値があるとは思われないが，Morgan の直接の仕事以外の科学における興味の幅の広さを示していると言えよう．

Morgan は，1830 年 12 月 2 日にエクイタブル社に暇乞いをした，そして 1833 年 5 月 2 日に亡くなった．彼はその時代の大物であり，引退するまでの比類なき 56 年の在職期間において，生命保険ビジネスの枢要を構築し，保険数理の専門職の基礎を築いた．彼がエクイタブル社に入社する前にも同社に「アクチュアリー」と言う職責はあったが，それは単なる経理担当者のようなものに過ぎなかった．これを現在の「アクチュアリー」にしたのは Morgan の功績と言えるであろう．それ故，彼は「現代アクチュアリーの父」と呼ばれるのである．

計算基数の発見に纏わるエピソードには，創案者の Barrett 以外に，彼のアイデアの重要性を見抜き，王立協会で発表した天文学者 Baily，老齢の故かその優位性を理解できなかった Morgan，他にもコンピュータの前身である解析機械を作り上げた Babbage や著名な数学者 De Morgan まで入り乱れており大変興味深い．

4.3 基数記号小史

本節の最後にあたり，計算基数の展開の歴史を先行研究や出典を明示しながら補足することとする．

『生命保険数学の基礎』[山内]によると「現在のD_x, N_x, S_x表に相当するものとしてはっきりと見てとれるものは，デーヴィスの Tables of Life Contingencies(1825)である．これは今日におけるものとほぼ同じ計算基数を用いている．すなわち，D，N 表とそれらを用いた保険料の計算公式を記している．」（pp.143-144)とあるが，実際には，現在の記号での D，N，S，M，R 表が既に与えられている．(表 13)

H. Braun によれば Davies によって Barrett の方法から拡張された点は M の導入であると言う．Barrett は現在とは違う記号で D，N，S（𝔄， 𝔅，ℭ）に当たる表が与えられ(p.197)，簡単な算式によって C，M，R に当たる値を導いている．つまり，表にはしていない．

David Jones(後述参照)も Griffith Davies こそが初めて計算基数表を作成して，単生命についての年金や保険のいろいろな場合に対する計算基数による公式を与えた人物であると述べている．p.116

しかし，Frederick Hendriks[22]によると基数計算法(Commutation Method) を創案したのは Francis Baily の Doctrine of Life Annuities(1813)の方が早い．彼の記号は現在のものとは異なる．また，基数計算法のアイデアは George Barrett の永年の研究に基づくことを Baily 自身が書き記している．

更に言うと，直接彼等に影響を与えたかどうかは定かではないが，Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhangen mit Tabellen zum practischen Gebrauch, von Johann Nicolaus Tetens, Professor der Philosophie und Mathematik zu Kiel.(1785)「1 人以上の人物の生死に依存する生命年金と年金受給権の計算の概要：実用的使用のための表，ヨハン・ニコラウス テーテンス哲学と数学のキール大学教授による」で既に基数計算法は現れている．

H.Braun は，計算基数を使っての計算法を創案した人物としての名誉を受けるに相応しい人物は，William Dale(1726-)であるとしている．彼の書物(1772) は，殆ど知られることはなかったが，この本のなかで，$l_x(v^{(x-50)})$の数値を表にして，50 歳以降の年金現価を算定するのに使用している．

また，Griffith Davies は，D, N, S, M, R記号は導入しているが，C_xは導入していない．一方，De Morgan の Companion to the British Almanack(1840)には，現在と同じD_x, N_x, S_x, M_x, R_x及びC_xが使用されている．1887 年に発行された英国アクチュアリー協会テキストの第 2 部で，George King は，Griffith Davies が初めて D と N を定義したとし，その記号の由来を，おそらく Numerator（分子）と Denominator（分母）であろうと推測している．そしてここが定まると，Altenbuger が述べているように(1899)，M_xの由来がN_xのアルファベット順で一つ手前であり，対応するC_xも同様にD_xの一つ手前であることから決められたものと推測

[22] Globe Insurance Company のアクチュアリー
Memoir of the early History of Auxiliary Tables for the Computation of Life Contingencies. ASSURANCE MAGAZINE(1848-1851).pp.1-20

できるし，S_xはN_xの sum（総和）から選ばれた記号であり，対応するM_xの総和であるR_xが，如上の流れからS_xのアルファベット順で一つ手前であることから選ばれた記号であることは容易に推察できる．

1950 年のアクチュアリー会審査委員会によるアクチュアリー記号の改定に関する理事会からの発表をまとめた F. S. PERRYMAN の報告及びそれを更に敷衍した守田常直の報告（日本アクチュアリー会会報第 5 号(1951)）によると，既述の David が基数記号で，N_xを求めるときにD_xではなくD_{x+1}からサンメーションをとっていた理由が，この当時，生命年金の支払いが通常年度末であったことであるとされている．現在のD_xからサンメーションをとったN_xは，期始払の生命年金に使われるが，これは月払保険料を計算するときに使用された．昔のイギリスでは，前者を David フォームと呼び，後者を Barret フォームと呼んでいた．

David フォームが国際基準として，現在の Barret フォームに変更されるのは上記の改定の一環であった．つまり 1950 年までは使い勝手の悪い David フォームが使われ続けていた．Barret フォームの優位性は 19 世紀末には既に指摘されていたが，保険先進国のイギリスが強硬に反対したことにより遅れた．反対の理由は，George King が言うには，イギリスは当時既に 63 個の死亡表が作成されていて，それらがすべて David フォームだったので，今更，方法を改められると混乱するからと言う事であった．この後，半世紀ほどして 63 個の死亡表も古くなって死物化したので，David フォームを使う必要がなくなり，やっと整合性のある規約に変更できることとなった．記号変更に生命保険業界ならではの理由が深く関わった典型的な例であろう．

尚，上記の改定は，第 14 回国際アクチュアリー会議(1954)で承認され，ほぼ現在の記号となった．（3.3 参照）

あとがきと謝辞

「はじめに」でも述べたように，本論はもともとカジョリの『数学記号の歴史』を補完することを主な動機として起筆されたものであった．しかし，書き進めていくうちに「生命保険数学史」の方を先になんとかしなければいけないとの思いが次第に強くなっていった．

古くなったとはいえカジョリの『数学記号の歴史』は今でも十分役に立つわけで，これでは足らないと云う状況に陥ることはそうそう出くわすことはない．それに対し，生命保険数学を学んだものがその理論が構築されていく歴史に興味をもったとしても読むべき「生命保険数学」の通史はほぼ皆無と言えよう．一般数学史書がこの分野については殆ど助けにならないのは本論でも触れたとおりであるが，E.T.ベルの「数学をつくった人々」のような人物伝や通俗書さえないのが現状であることも追け加えておく．

そのような状況を考慮して，本論では数学史の論文であるにも拘わらず，敢えて学術的価値の無い生命保険数学の触りと人物点描をあちこちに配して見た．これは，「殆どの人が聞いたこともないような人物の聞いたこともない業績についての解説」をなんとか読んでもらいたいと考える筆者のささやかな試みである．たとえば，本論で少しだけ触れた計算基数の発明の歴史の裏話などは，もっと広まっても良いように思われた．そしてこの思いを少しでも共感して頂きたいと考えて，通俗書のようにBarrettやBaily，Morganの点描に紙幅を費やしたわけである．無用な商業主義的雑文に堕していることは十分認識しており，「量記号のルーツとしてのニュートンの冪記号」のような部分をもっと調査研究して深めて行く方が正当な数学史研究の在り方なのかも知れないが，このような努力もマイナー対象の数学史には必要と考える．

繰り返しになるが，この分野のまとまった参考文献は驚くほど少なく，筆者の貧弱な知見では精確な記述は到底望むべくもない．機が熟すまで待つとの選択肢もあったのだが，気力・体力がある程度維持出来ている内にできるところまでは進めておきたいと考え，不十分とは知りつつも発表させて頂いた．慧眼な読者からのご批判を謹んでお受けしたい．そして機会が許されるならば，是非，それらを反映した続編を書きたいと考えている．

最後になりましたが，このような論文を発表する場を与えてくださいました津田塾大学数学・計算機科学研究所の三宅克也氏と立教大学，津田塾大学数学・計算機科学研究所佐藤文広氏，津田塾大学数学科長岡一昭氏に深く感謝致します．

引用文献

1 **C. Attwood** : Compound Interest Functions: Practical Tables Series,Elsevier 2014

2 **Florian Cajori** : A History of Mathematical Notations, 1928

3 **John M.Boermeester** : Note on Notation.Society of Acturaries, Vol 6 ,No.10(December 1972), pp. 4-5

4 **Heinrich Braun** : Geschichte der Lebensversicherung und der Lebensversicherungstechnik,2 Aufl.,Berlin,Duncker & Humblot,1963.
ハインリッヒ，ブラウン;水島一也(訳)：生命保険史,明治生命 100 周年記念刊行会,(1983)

5 **J.B. Cherriman** : Actuarial Notes, Journal of the Institute of Actuaries, Charles & Edwin Layton ,(1879)

6 **Anders Hald** : A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750, John Wiley & Sons, 2005

7 **Fredebick Hendriks** : Memoir of the early History of Auxiliary Tables for the Computation of Life Contingencies. ASSURANCE MAGAZINE(1848-1851).pp.1-20

8 **P.F.Hooker** : Benjamin Gompertz, 1779-1865. JIA (1965) 91:203-212.

9 **C.G.Lewin** : An Early Book on Compound Interest–Richard Witt' s "Arithmeticall, Questions". J.I.A. 96 (1970) 121-132.

10 **C.G.Lewin** : Compound interest in the seventeenth century. J.I.A. 108(1981): 422-442. [Richard Witt]

11 **Maurice Ogborn** : Equitable Assurances: The Story of Life Assurance in the Experience of the Equitable Life Assurance Society, 1762-1962,Taylor & Francis, 2005

12 **FrankP.Di Paolo** : THE INTERNATIONAL ACTUARIAL NOTATION, Vol 10 ,No.3(March 1976), pp. 4-7

13 **Laurence Sigler** : Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation,Springer Science & Business Media. (2012)

14 **安藤洋美**：確率論の黎明,現代数学社,(2007)

15 **竹下清松**：Gerge King の業績,日本ｱｸﾁｭｱﾘｰ会会報第 2 号(1941)

16 **守田常直**：萬國統新記號に就て,日本ｱｸﾁｭｱﾘｰ会会報第 5 号(1951)

17 山内恒人：生命保険数学の基礎,東京大学出版会,(2014).
18 国際ｱｸﾁｭｱﾘｰ記号に関する動きについて　＜国際ｱｸﾁｭｱﾘｰ記号実行委員会＞(日本ｱｸﾁｭｱﾘｰ会会報第 28 号)(1974)
19 国際ｱｸﾁｭｱﾘｰ記号常設委員会議事録（翻訳）第 38 号(1985)
20 国際ｱｸﾁｭｱﾘｰ記号常設委員会議事録(翻訳)　＜ｱｸﾁｭｱﾘｰ会記号研究部会＞第 39 号　第 1 分冊(1986)
21 第 6 回国際ｱｸﾁｭｱﾘｰ記号常設委員会の結果報告　＜ｱｸﾁｭｱﾘｰ会記号研究部会＞第 40 号　第 2 分冊(1987)
22 国際ｱｸﾁｭｱﾘｰ記号常設委員会の活動報告（1990.4）＜記号研究会＞（日本ｱｸﾁｭｱﾘｰ会会報第 44 号）(1991)
23 Exhibition Catalogue, Illustrating the history of actuarial science in Great Britain with special reference to the Institute of Actuaries, Centenary Assembly 1948.
24 Some Landmarks in Actuarial Science, Catalogue of exhibition at Staple Inn Hall November1985

(原典：年代順)

25 **William Webster**：Arithmetick in epitome. (1746)
26 **William Dale**：Calculations deduced from first principles,(1772)
27 G.W.Nicol：The Antijacobin Review.（1806),p.256
28 **Robert Woodhouse**：The Antijacobin Review.（1806),p.256
29 **William Inwood**：Tables for the Purchasing of Estates, Freehold, Copyhold ,or Leasehold, Annuities, Advowsons,&c. and for the renewing of Leases held under Cathedral Churches, Colleges, or other Corporate Bodies, for Terms of Years certain, and for Lives. Together with several useful and interesting Tables connected with the Subject. Also the Five Tables of Compound Interest. (1811)
30 **Francis Baily**：The Doctrine of Interest and Annuities,(1808)
31 **Francis Baily**：The Doctrine of Life-annuities and Assurances, (1813)
32 **Joshua Milne**：A Treatise on the Valuation of Annuities and Assurances on Lives and Survivorships: On the Construction of Tables of Mortality and on the Probabilities and Expectations of Life,Vol 1,2, Longman, Hurst, Rees, Orme, and Brown, (1815)
33 **Benjamin Gompertz**：A Sketch of an Analysis and Notation

applicable to the Value of Life Contingencies ,L. Davis (1820).
34 **Davies, Griffith**：Tables of Life Contingencies ,London,(1825)
35 **De Morgan,A**：An essay on probabilities, and their application to life contingencies and insurance offices,(1838)
36 **Peter Hardy**：Doctrine of Simple and Compound Interest,(1839)
37 **De Morgan,A**：Companion to the British Almanack,(1840)
38 **De Morgan,A**：Companion to the British Almanack,(1842)
39 **David Jones**：On the Value of Annuities and Reversionary Payments with Numerous Tables, Baldwin and Cradock ,(1843)
40 **Issac Todhunter**：A History of the Mathematical Theory Of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace, (1865).
アイザック，トドハンター;安藤洋美(訳)：確率論史,現代数学社,(1975).
41 **Leslie Stephen**：Dictionary of national biography, Volume3,pp.281-282,(1885).[George Barrett]
42 **George King**：Institute of Actuaries' Text Book of the Principles of Interest, Life Annuities, and Assurances, and Their Practical Application,(1887)
43 **The International Congress of Actuaries of 1895(first)**　：Journal of the Institute of Actuaries XXXⅡ　Jan.1896, pp.233-247
44 **The International Congress of Actuaries of 1898(2nd)**　：Transactions of the second International Actuarial Congress, held in the hall of the Institute of Actuaries, Staple Inn, Holborn, London, May 16 to 20, 1898
45 **W.P.Elderton**：William Morgan, F.R.S, 1750-1833. TFA 14(1931): 1-20.
46 **F. S. PERRYMAN**：International Actuarial Notation, PCAS Vol. XXXVI,(1950),pp. 123-131.
47 **E.W.Kopf**：The Early History of the Annuity, xiii, pp 225-266, 1927

付録

1. 書物から見た１９世紀イギリスでのニュートン記号からの離脱

1710 年前後から 1860 年頃のイギリスの主な数学書からニュートン記号の使用の有無を調査してみた．出版年は初版を基本としたが，実際には半世紀後にも出版され続けていた場合が多いことを考慮しておく必要がある．つまり，古風な記号であっても，そのまま出版され続けていたということである．

そして本論でも指摘したように，1804 年当時においてさえ，ルーカス教授職にあった Robert Woodhouse が Leibniz 流の記号を採択した書籍を出版したことに対し，書評で批判されている．イギリスにおけるニュートンの影は思った以上に大きかったと言えるであろうが，それは単純にニュートンが偉大であったことのみに帰すべき話ではない．例えば，次のように分析する数学史家もいる．

「さてクレローとオイラーの教科書は英国ではあまり使われなかったが，その理由は一つには世紀末後半英国の数学者が孤立主義をとっていたからであり，もう一つにはマクローリンたちが初等段階のすぐれた教科書を書いていたからであった．」(p.100 ボイヤー数学史 4)

出版年	著者名	書名	ニュートン冪記号の有無
1706	William Jones (1675-1749)	A New Introduction to the Mathematics (数学新序説)	ニュートン記号が使用されている．P.68
1715	Brook Taylor (1685-1731)	Methodus incrementorum directa et inversa(直接及び逆増分法：ラテン語)）	ニュートン記号が使用されている．P.55
1718	Abraham de Moivre (1667-1754)	The Doctrine of Chances（偶然性の原則）	ニュートン記号が使用されている．P.7.
1720	Sir Isaac Newton, Edmond Halley,J. Senex	Universal Arithmetick（普遍算術）	意外にもニュートン記号は使われていない
1732	George Berkeley (1685-1753)	The Analyst（解析学者）	ニュートン記号が使用されている．P.20
1740	Nicholas Saunderson (1682-1739)	The Elements of Algebra（代数学原理）	厳密な意味では使われていないが，括弧記号の前身である Vincula に適用されていた．（通常は正整数だけに適用）
1745	Thomas Simpson (1710-1761)	A Treatise of Algebra（代数学論考）	ニュートン記号が使用されている．P.3
1762	Edward Waring (1736-1798)	Miscellanea analytica, de aequationibus algebraicis, et curvarum proprietatibus （代数方程式に於ける雑多な分析と曲線の条件：ラテン語）	ニュートン記号が使われている．P.16
1764	Thomas Bayes (1702-1761) 著 Richard Price(1723-1791) により出版	An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances. （偶然性の原則における問題解決のための試論）	ニュートン記号が使われている． P R O P. 7
1775	Charles Vyse	The key to the tutor's guide (教師の案内への鍵)	ニュートン記号が使用されている．P.296
1776	William Emerson (1701-1782)	Miscellanies(雑論)	ニュートン記号が使用されている．P.101
1782	Edward Waring (1736-1798)	Meditationes Algebraicae （代数的思索：ラテン語）	ニュートンの 2 項定理は載っているが記号はニュートンのものではない．
1784	George Atwood (1745-1807)	An Analysis of a Course of Lectures on the Principles of Natural Philosophy (自然哲学原理に関する講座の解析)	Vincula は紹介されているが，ニュートン記号は使われていない．
1800 (1783)	William Taylor	A Complete System of Practical Arithmetic (実践的算術の完備な体系)	ニュートン記号が使用されている．記号表
1796 (1748)	Colin MacLaurin (1698-1746), John Lawson	A treatise of algebra in Three Parts (3 部構成の代数学論考)	ニュートン記号が使用されている．P.51
1801	George Atwood (1745-1807)	Dissertation on the Construction and Properties of Arches (円弧の構成と特性に関する論説)	ニュートン記号は使われていない．
1811	Peter Barlow (1776–1862)	Elementary Investigation of the Theory of Numbers (数論の初等的探究)	ニュートン記号は使われていない．
1815	Joshua Milne (1776–1851)	A Treatise on the Valuation of Annuities and Assurances (生存者及び残存者に対する年金と保険の評価についての研究論文)	定義の異なる冪を使った記号はある． lv symbols table
1816	William George Horner (1786–1837)	I. On Annuities. - II. Imaginary cube roots. - III. Roots of Binomials,	ニュートン記号は使われていない．

		（Ⅰ．年金について　Ⅱ．虚数立方根　Ⅲ．二項式の根）	
1820	Benjamin Gompertz (1779–1865)	A Sketch of an Analysis and Notation applicable to the Value of Life Contingencies.(生命確率の評価に応用可能な解析と記号の素描)	ニュートン記号が使用されている．p.518
1830	George Peacock (1791–1858)	A Treatise on Algebra（代数学論考）	殆どが現在の記号を使っているが部分的に括弧記号と併用してVincula記号を使ったり，ニュートン記号を紹介している．pp.108-109
1836	John Henry Pratt (1809–1871)	The Mathematical Principles of Mechanical Philosophy (機械論の数学原理)	一般的なライプニッツ記号
1838	Augustus De Morgan (1806–1871)	An Essay on Probabilities.(確率試論)	ニュートン記号は使われていない．
1837 〜 1853	James Joseph Sylvester (1814–1897)	The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester (ジョセフ・シルベスター数学論文集)	p.249に定義の異なる量を使った記号はある
1841 – 1853	Arthur Cayley (1821–1895)	The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley 1 (アーサー・ケーリー数学論文集 1)	一般的なライプニッツ記号
1842 – 1847	George Stokes (1819-1903)	Mathematical and physical papers vol1 (ジョージ・ストークス 数学及び物理学論文集 第1巻)	一般的なライプニッツ記号
1843	David N. Jones	On the Value of Annuities and Reversionary Payments (年金及び復帰年金の評価について)	ニュートン冪記号はないが，量記号はある
1853	William Rowan Hamilton (1805–1865)	Lectures on Quaternions（四元数講義）	使われていない．四元数記号，ベクトル記号，一般的なライプニッツ記号
1854	George Boole (1815–1864)	An Investigation of the Laws of Thought (思考法則の探求)	使われていない．微分はラグランジュ記号
1867	Charles Dodgson (ルイスキャロル) (1832-1898)	An Elementary Treatise on Determinants (初等行列式論)	定義の異なる量を使った記号はある

2. F.Cajoriによるアクチュアリー記号についての所見

739. アクチュアリーサイエンス. — 第3の動向は，戦争によって中断されなかったので，大きな成功を収めた．アクチュアリーサイエンスの分野について言及しよう．この方面に関し，英国アクチュアリー協会は，かなりの一般的な承認を得られるように，明確で効率的な表記法の完全なシステムを考案することに，長年にわたって活動を続けて来た．いくつかの些少な変更を経て，イギリスの提案は1895年と1898年の国際アクチュアリー会議で採択された．この活動の結果として，非常に長い一覧表にある記号の多くは広く採択され続けているが，しかしながら，知りうる限り，それらの記号はすべての他の記号を除外するために使用されているわけではない．この活動は，部分的な成功を収めた．ひょっとしたら，そのやり方の改善のいくつかは，国際的な専門家達によって合意された記号のより普遍的な受け入れにつながって来たかもしれない．おそらく，一つの間違いは，一度にあまりにも多くの記号について，合意に達っしようと無理強いしたことである．全会一致が得られる最大個数であるような少数の記号の一般的な採択の方が，6ページを超えてぎっちりと印刷された一覧表よりも，望ましいものであったかもしれない．我々が引用している国際的な活動を通じての統一化についての3回の試みのうち，最初の2回は失敗している．なぜなら，最初の不可欠な手順が取られていなかったからである；各国間の代表が合意に達することはなかった．第3回の試みにおいて，ようやく合意に達した，しかし，決定され得る限りにおいてではあるが，より最近のさまざまな国の個々の実務家が，合意された記号を採択しなければならないと感じることはなかった．実際，さまざまな国で採用されている保険制度は多様であるため，しばしば，ヨーロッパ大陸の何人かのアクチュアリー達にとって，英国に起源を有するその記号を使うことは困難であった．

（拙試訳）

3. 日本の生命保険数学の教科書

生命保険数学　関伊右衛門　1912
最近生命保険数学　関伊右衛門　1912
生命保険数理汎論　古沢嘉寿之丞　1912
通俗生命保険数理　岩間六郎　1915
生命保険数理の話　中村喜代治　1926
生命保險數學　中村萬藏, 村椿彌一郎　1929
保険数学　杉浦徳次郎　1931
保険数学　豊田亀治郎　1933
生命保険数学　忍田又男　1933
通俗生命保険数学　佐藤峯太郎　1934
保険数学　鈴木敏一　1936
保険数理解説　郵政省簡易保険局,郵政省簡易保険局 編　通信教育振興会　1949
生命保険数理入門　R．E．ラルスン　1955
生命保険実務講座〈第５巻〉数理編　1958
保険数学（上）　守田常直　1963
保険数学（下）　守田常直　1964
実用生命保険数理　鈴木梅雄　1967
保険数学　山内正憲　1969
生命保険数理　角辻治　1977
保険数理入門　数理研究会 編　通信事業教育振興会　1984
経理および数理　生命保険新実務講座編集委員会　1991
生命保険数学（上・下）　二見隆　1992
生命保険数学　H.U. ゲルバー　2007
生命保険数理への確率論的アプローチ　黒田耕嗣, 松山直樹 2010
保険の数学　保険毎日新聞社, 2010
生命保険の数学　成川淳　2011
確率で考える生命保険数学入門　京都大学理学部アクチュアリーサイエンス部門　2012
生命保険数学の基礎　山内恒人　2014
アクチュアリーのための生命保険数学入門
京都大学理学部アクチュアリーサイエンス部門　2014
生命保険数理　黒田 耕嗣　2016

4. ニュートンの手紙