デカルト数学断片集の執筆時期ならびに
卵形線に代表される屈折光学問題
Writing Time of the Descartes Mathematical Fragments
and Dioptric Problem of the Oval.

四日市大学関孝和数学研究所　但馬亨
Seki-Kowa Institute of Mathematics, Toru TAJIMA
torutajima@seki-kowa.org

1 『数学摘要』の概要

デカルト数学断片集とは原題を *Excerpta Mathematica* と呼ばれる AT 版 (AT X, pp. 277-324.) に集録されているデカルトのマイナーワークであり，手稿や刊行本（１８世紀までのもの）を集録したものである．以下『摘要』と称す．これら１２の断片は，複雑で雑多な元テキストの構成と出自を示している．AT 版とは，ながらくデカルト研究においては決定版とされてきた Charles Adam (1857-1940), Paul Tannery　(1843-1904) 編纂のデカルト全集であるが，近年はその内容についての見直しが進んでおり，以下の内容についての表題を列挙する．

I.	Polygonorum inscriptio	諸多角形の内接
II.	Horum Usus Trigonometricus	内接の三角法への利用
III.	Numeri Polygoni	諸多角数
IV.	De Partibus Aliquotis Numerorum	数の約数について
V.	Radix Cubica Binomiorum	２項式数の３乗根
VI.	Circuli Quadratio	円の求積
VII.	Tangens Cycloïdis	サイクロイドの接線 [1]
VIII.	Tangens Quadratariæ per Cycloidem	サイクロイドによる円積線の接線 [2]
IX.	Æquationum Asymmetriæ Remotio	方程式の非対称性の除去[3]
X.	Ovales Opticæ Quatuor	四種の光学的卵形線
XI.	Earum Descriptio et Tactio	卵形成の描画と接触
XII.	Earumdem Octo Vertices, Horumque Usus	卵形線８種類の頂点と利用

進行中の AT 版の見直しの中でもとくに重要な新解釈に Jean-Marie Beyssade らによるラテン語・フランス語翻訳書がある．[4]この新訳（pp. 530-531）で考察された『摘要』の２つの起源がある．

1. 手稿群 L：１７世紀時にコンスタンティン・ホイヘンスが収集，ライデン大学付属図書館所蔵

[4]R. Descartes, *Œuvres complètes*, Gallimard, 2009.

2. 断片 A：「デカルト氏による抜き書き（摘要）」(Excerpta ex MSS. R. Descartes), 1701 年『遺稿小論集』(Opuscula posthuma) に収録.[5]

とりわけ後者は重要である．なぜならば，後者はラテン語による 6 論文から構成されており,『世界論』や『精神指導の規則』等の重要著作の最後に位置する順序で収録されているからである．デカルトの死後に出版された著作集としてはかなり早い段階で整理されたものであり，死後 50 年後にアムステルダムで公刊されている．

2 AT 版の問題と執筆時期について

AT 版はデカルト研究者にとっては必携の書ではあるが，全集の編集以来，完成度の高い文献批評が完成したものとして研究者は批判的に一次文献を分析しなくなってしまった．いわば AT 版の権威主義化，更新の必要性についての議論が希薄であった．そこで今回の調査を経て理解された『摘要』の問題点を以下にまとめることができる．

1．数学的内容の連関が不明なものを 1 論文（ひとまとまり）として集録.
2．デカルト自身が付していない題名を付与.
3．他数学者であるフェルマーの業績の複写を集録.
4．執筆時期の同定が精密ではない.

この論点のうち，とくに 1 と 4 の問題は解決させるべき重要性を秘めており，現在のデカルト数学史研究のためには，数学的内容の分析並びに執筆時期の精密な考察が必要であろう．つづいて，先の諸断片と『幾何学』との対応関係をから執筆時期の推定を行うことが最も取り組み易い作業であろう．なお第２４回数学史シンポジウムにおいてすでに整理した点であるが,『摘要』の数学的内容についてもう一度修正して略解する．

[5]正式には､『R. デス＝カルテスの自然学および数学上の遺稿小論集』(R. Des-Cartes Opuscula Posthuma, Physica et Mathematica) と称される.[6]

『摘要』の数学的内容の一覧

（１）内接多角形と弦の表（正弦表の作成）
（２）正弦表の三角形への応用
（３）ディオファントス『算術』からの多角形数問題
（４）約数の和の一般的性質についての分析
（５）３乗根の開平，２項式で表される数への変換
（６）円の方形化（求積）に役立つ独自アルゴリズム
（７）サイクロイド曲線の性質についての引用
（８）サイクロイド曲線の性質についての引用
（９）等式に含まれている無理数の消去法
（１０）卵形線の性質についての分析
（１１）卵形線の性質，表記の方法
（１２）卵形線の性質とその応用法

以上のような数学的中身をもつ『摘要』であるが，この内容で『幾何学』との連関をもつ箇所は（５），（９），（１０），（１１），（１２）である．さらに精密にその内訳を明らかにすると，（５）が第１巻「乗法・除法・平方根の抽出」に対応する．そして，（９）は第３巻「真根を増すと偽根は減ずること」，そして最後の長大な３断片（１０，１１，１２）はそれぞれ順に，第２巻「光学に役立つ新しい卵形線４種の性質」，同じく第２巻「反射および屈折に関するこれらの卵形線の性質」，同じく第２巻「これらの性質」に対応する．1637 年の『幾何学』との相互関係について言及ができるのはこの５つの断片しかありえない．さらに，この中で比較的重要だと思われるのは，（１０），（１１），（１２）の卵形線についての議論であろう．

3　デカルトの卵形線問題への取り組み

このテーマについては，白水社『デカルト著作集』の自然哲学ならびに数学領域に関する主要翻訳者である原亨吉による先駆的かつほぼ唯一の研究である「デカルトはいかにして卵形線を発見したのか」（“Comment Descartes a-t-il découvert ses Ovales? ”）がある.[7] これによれば問題１０，１１，１２の最初の出自は断片 A である．さて，デカルトはどのような経緯で，いつこの卵形線に関心をもったのであろうか．生前の原亨吉氏から数学史上の薫陶を受けた佐々木力氏によれば，このように整理されている．すなわち［佐々木 2003］276-7 頁では「1620 年代の書き物，及び書簡でこれらの卵形線に言及していない．（中略）17 世紀初頭の数学者にとって，いかなる種類であれ卵形線は円錐曲線の自然な拡張として理解されていたのかもしれない.」とあり，

[7] *Historia Scientiarum*, No. 29(1985), pp.51-82.

1628 − 35 年の間に発見の時期を限定しているのである．執筆時期としてはかなり幅があるがデカルトが数学研究に注力をはじめて,『幾何学』の構想を練る段階から実質的執筆活動を完遂させる直前までを視野に入れるとするならばこれ以上の言及はできない．

4　卵形線問題の数学的構成と意義

それでは，この卵形線の数学的意味について議論する．名称として oval という語は数学者にとってもあまり聞き馴染みのある曲線とは言えないが，古くはルネサンスのアルブレヒト・デューラー (Albrecht Dürer, 1471-1528) やデカルトより後世である 17 世紀後半のパリ天文台で活躍したジョヴァンニ・ドメニコ・カッシーニ (Giovanni Domenico Cassini, 1625-1712) が研究した曲線であるが，デカルトは先述のとおり,『幾何学』に収録する目的でこの領域の研究を精力的に行っている.[8]デューラーやカッシーニが絵画や天文学上の関心からこの曲線を扱ったのに対して，デカルトのモチベーションとは異なるところにあった.『幾何学』第 2 巻に収録されているように，屈折光学研究の成果を展開し，理想的なレンズ曲面を数学的に演繹しようとしたのである．以下では，断片 10 から 12 にかけて展開される卵形線についての数学的構成について概説し，執拗に展開された研究のねらいを明らかにしていく．

断片 10 の第 1 部

同一直線上に定点 C, N, B, A をとる．点 N は BC の中点，$NA = a$, $NB = b$ とする．媒介変数 x, y にたいして，動点 E を

$$CE + BE = 2a - 2y,$$
$$DA = x$$

であるようにとる．ここでは D は E から直線 AC に降ろした垂線の足となっている．ただし，E が A を通るように媒介変数 x, y は $x = 0$ のとき $y = 0$ であるようにとる．このとき，

$$\begin{aligned} CE^2 - BE^2 = CD^2 - BD^2 &= (a + b - x)^2 - (a - b - x)^2 \\ &= 4b(a - x) \end{aligned}$$

[8]カッシーニの卵形線の定義はこのようなものである．平面上で q_1 と q_2 の 2 点を定点とし，b を定数とするならば，q_1, q_2 を焦点とする卵形線はある条件を備えた点 p の描く軌跡として定義される．ある点 p とは，p から q_1 までの距離と p から q_2 までの距離の積が b^2 となるような点である．以下で扱うデカルトの卵形線も四次曲線の一種であり，線対称をひとつだけもつという点ではカッシーニのものと幾何学的には相違ない．

となるから,[9]

$$CE - BE = \frac{2b(a-x)}{a-y}$$

となる．ここで BE, CE は以下のようにあらわされる．

$$BE = a - y - \frac{b(a-x)}{a-y} = \frac{y^2 - 2ay + a^2 + bx - ab}{a-y}$$

$$CE = a - y + \frac{b(a-x)}{a-y} = \frac{y^2 - 2ay + a^2 - bx + ab}{a-y}$$

したがって

$$DE^2 = BE^2 - BD^2 = \frac{(y^2 - 2ay + a^2 + bx - ab)^2}{(a-y)^2} - (a-b-x)^2$$

$$= \frac{y^4 - 4ay^3 + (5a^2 - b^2 - x^2 + 2ax)y^2 + (2ax^2 - 4a^2x + 2ab^2 - 2a^3)y - a^2x^2 + b^2x^2 - 2ab^2x + 2a^3x}{(a-y)^2}$$

$$= \frac{(y-x)(a+b-y)(a-b-y)(2a-x-y)}{(a-y)^2}.$$

いま点 E が描くべき曲線に E で接する円の中心となる AC 上の点 F を見つける．そこで $NF = c$, $FE = d$ とおき，原点を N とする XY 座標を $E = (a-x, DE)$ であるようにとると，中心 F，半径 FE の円の方程式は

$$(X-c)^2 + Y^2 = d^2.$$

また媒介変数 x, y を「何らかの方法で」消去することができ，媒介変数を消去した E の軌跡の方程式

$$f(X, Y) = 0$$

が得られたとすると，円と点 E の軌跡が接することから，

$$f\left(X, \sqrt{d^2 - (X-c)^2}\right) = 0$$

という X の方程式は $X = a - x$ で重解をもたなければならない．この条件から c および d を求めることができる．

断片 10 の第 2 部

C, B, A, R はこの順で同一直線上にある定点 D, E, F は動点である．$CB = 4, BA = 1, AR = 5$ より，C, B, A, R を定め，点 A を原点にとると，

$$C = (-5, 0), B = (-1, 0), A = (0, 0), R = (5, 0)$$

[9] $BD = a - b - x$, $CD = a + b - x$

と座標を設定する．媒介変数 $0 \leq y \leq 1$ にたいして

$$EB = 1 + 5y, EC = 5 - 3y.$$

で点 E を定める．ここで $CB = 4, EB = 1+5y, EC = 5-3y$ より $0 \leq y \leq 1$ でつねに C, B, E は三角形を構成し，$y = 0$ で E は A と一致し，$y = 1$ で $EB = 6, EC = 2$ であるような直線 BC 上の点となる．また点 D は点 E から線分 CA に降ろした垂線の足である．ここで，

$$CD^2 - DB^2 = EC^2 - EB^2 = (5-3y)^2 - (1+5y)^2 = -16y^2 - 40y + 24,$$

$$CD - DB = \frac{CD^2 - DB^2}{CD + DB} = -4y^2 - 10y + 6$$

より

$$CD = -2y^2 - 5y + 5,$$

$$DB = 2y^2 + 5y - 1.$$

よって，

$$DA = DB + BA = 2y^2 + 5y,$$

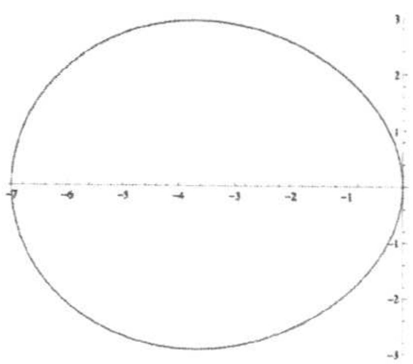
$$DE^2 = eb^2 - DB^2 = (1+5y)^2 - (2y^2 + 5y - 1)^2$$

$$= -4y^4 - 20y^3 + 4y^2 + 20y$$

となる．すなわち，

$$E = \left(-5y - 2y^2, \sqrt{-4y^4 - 20y^3 + 4y^2 + 20y}\right)$$

とまとめることができる．ちなみにここで，媒介変数 y を $0 \leq y \leq 1$ の範囲で動かせば E の軌跡を描画でき，デカルトの著作中においては一度も出現しなかった卵形線の全体像が表示できる．



さらにここで，$E=(X,Y)$ とおいて y を消去すると

$$4X^4+116X^3+(8Y^2+316)X^2+(116Y^2-2100)X=Y^2(525-4Y^2)$$

という軌跡の方程式が得られる．この一般形もデカルトは表示しているわけではない．あくまでも $CD-DB$ という形で論じているに過ぎないのである．

さて，さらにここから別の点 F を定義していく．すなわち，

$$FA=\frac{29y+10}{4y+5}$$

という関係を満たす点 F を定め，この点から ER, EC に降ろした垂線の足をそれぞれ G, H とするとき，

$$\triangle FCH\sim\triangle ECD$$

$$\triangle FRG\sim\triangle ERD$$

なので，

$$\frac{FH}{FG}=\frac{-9y+15}{4y+5}\frac{4y+5}{49y+35}\frac{5+7y}{5-3y}=\frac{3}{7}$$

となる.[10]したがって，FH/FG は y によらず一定である．R から出た光が点 E で FE と直交する直線で相対屈折率 $3/7$ で反射しながら屈折した光が点 C に到達していると理解できる．

さて，FE と直交する直線は卵形線 C に接する．これを示すには，以下の条件が必要である．すなわち中心 F，半径 EF の円の方程式は，

$$\left(X+\frac{29y+10}{4y+5}\right)^2+Y^2=EF^2$$

となるので，これを Y^2 について解いて E の軌跡の方程式に代入すると X についての方程式ができる．この方程式が $X=-5y-2y^2$ で重解をもつことがわかればよい．

断片 10 の第 3 部

定点 C,B,A,R を同一直線上に $AC=AR=a, AB=b$ であるようにとる．動点 E を

$$CE=\frac{2by}{a}-y+a,$$

$$BE=b+y$$

[10] $FH:ED=\frac{-9y+15}{4y+5}:(5-3y)$,$FG:ED=\frac{49y+35}{4y+5}:(5+7y)$ より．

であるようにとり，点 E から AC に垂線を降ろしてその足を D とする．このとき，

$$CD^2 - BD^2 = CE^2 - BE^2 = \left(\frac{2by}{a} - y + a\right)^2 - (b+y)^2,$$

$$CD - BD = CB = AC - AB = a - b$$

よって，

$$CD + BD = a + b - 2y - \frac{4by^2}{a^2}$$

したがって

$$CD = a - y - \frac{2by^2}{a^2}$$

$$BD = b - y - \frac{2by^2}{a^2}.$$

さらに

$$AD = AB - BD = \frac{2by^2}{a^2} + y,$$

$$DE^2 = BE^2 - BD^2 = (b+y)^2 - \left(b - y - \frac{2by^2}{a^2}\right)^2,$$

$$-\frac{4b^2}{a^4} - \frac{4b}{a^2}y^3 + \frac{4b^2}{a^2}y^2 + 4by$$

が成り立つ．ここで，

$$FA = \frac{4b^2y + 2ba^2 + a^2y}{4by + a^2}$$

であるような点 F を AB 上にとり，F から BE, CE に降ろした垂線の足をそれぞれ G, H とする．このとき

$$\triangle FBG \sim \triangle EBD,$$

$$\triangle FCH \sim \triangle ECD$$

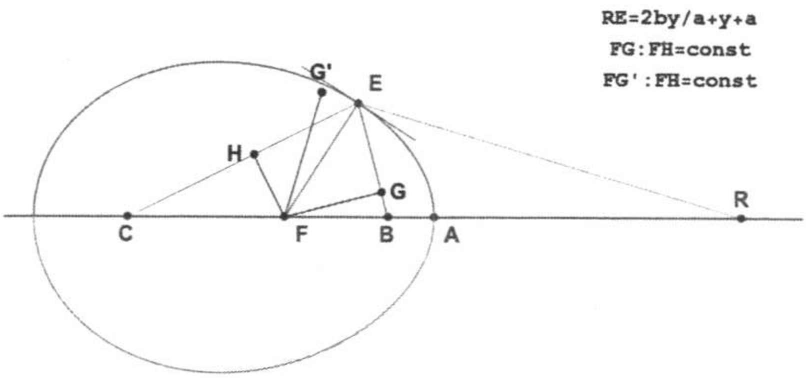
なので $FG : DE = BF : BE, FH : DE = CF : CE$ となり，FG/FH は曲面の屈折率を表すことになる．比例式を最後まで解くと，

$$\frac{FG}{FH} = \frac{BF}{BE}\frac{CE}{CF} = \frac{AB - FA}{BE}\frac{CE}{AC - FA}$$
$$= \frac{a}{2b - a}$$

と y に依存しない定数になる．

重解による方法と疑われる他の方法

断片 10 から 12 で扱われる卵系線とはデカルトによれば，円錐曲線を包含する上位曲線として考案されたもので 3 種類の焦点で定義されるものである．この曲線を研究するための意義は，デカルトにとっては屈折光学上の知識の拡充として最適なレンズの形状を決定するためである．図にあるように焦点は B, C, R だとすると，この特異な曲線の方程式を求めるには，動点 F の位置が重要なポイントになってくる．ただし，この方程式を求めるためには，原



によって推測される方法によると長大な計算が必要とされるが，断片 10 に含まれている記述にはその結果しか示されておらず，デカルトが実際にとった方法をこの記述のみから導出することは出来ない.[11] この方法とは，卵形線に内接する円を描画し，さらにこの円の接線との交点を解析的に求める，すなわちより具体的にいえばこの 2 つの方程式の重解を用いる方法である．しかし，この分析には 1 つの難点がある．断片 10 において考察されている卵形線は初期条件のことなるものが 4 種類存在しており，最初の 3 種についてこの重解を用いる方法であれば順調に計算を遂行することで結果まで到達できる．しかし，最後の 4 種目については計算量の観点からはきわめて膨大で精密な計算を遂行しなければ達成できないので，この 4 種類についてはフェルマーの接線法を用いるなどの別の方法の利用が推測されるのである．

5　むすびとして

デカルトの数学研究の発展過程において，マイナーワークから得られる情報はこれまで精密科学史上の議論対象にはならなかったように思われる．たしかに大著作『幾何学』の達成と比べると，今回分析の俎上に乗せた『摘要』は最大の分量を誇る卵形線問題でも比較的小規模の作品であり，技術的な計

[11] [Hara 1985]: Comment Descartes a-t-il découvert ses ovales? *Historia Scientiarum* 29, pp. 51-82.

算過程を集めたものという誹りを免れないかもしれない．しかしながら，デカルトの直観の鋭さは，こうしたマイナーワークにこそよりよく反映されており，さらにいえば直観や数学的発想の豊かさ以上に技術的な計算を粘り強く丹念に繰り返していた点については数学者としての，いわば足腰の頑健さを強く感じずにはいられない．そもそも『幾何学』においても結果を散文的に配置する記述方法は，現在の数学の論理様式にどっぷり浸かっているわれわれにとっても容易に読み進められる代物ではないが，結果を粘り強く追い求める良い意味での執拗さがこれまでとは異なるデカルト数学のイメージと呼べるのかもしれない．なお，この部分の全訳を近日中に発表する予定であるが，当報告においては断片１０のみを付録として公表する．

参考文献

・佐々木力『デカルトの数学思想』東京大学出版会，2003.

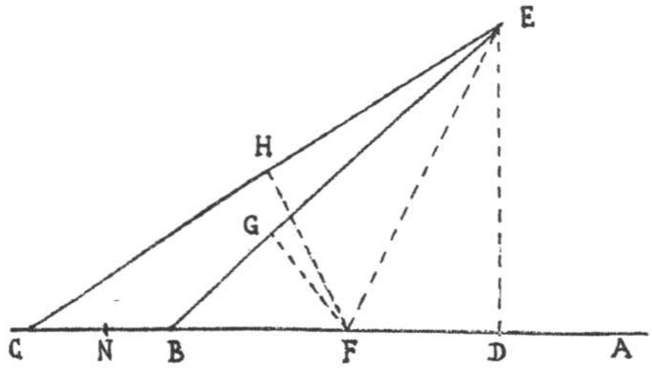
・小泉義之他訳『デカルト全書簡集』（第２巻）知泉書房, 2014.

René Descartes, Opuscula posthuma, physica et mathematica （Landmarks of science, ed. by Harold Hartley, Duane H. D. Roller）, Readex Microprint, 1969.

・René Descartes, Physico-mathematica ; Compendium musicæ ; Regulæ ad directionem ingenii ; Recherche de la verité ; Supplément à la correspondance （Œuvres de Descartes / publiées par Charles Adam et Paul Tannery, 10） Nouv.éd . J. Vrin, 1996.

・John Schuster Descartes-agonistes : physico-mathematics, method and corpuscular-mechanism 1618-33 （Studies in history and philosophy of science, v. 27）, Springer, 2013.

付録：第 10 断片「四種の光学的卵形線」



[1] 点 A, B, C を一直線上に並べ，頂点 A，軸 AB の曲線を見出す．このとき曲線は，点 B から発せられる光線が，この曲線上で屈折し，あたかも点 C から光線が発せられ，より遠くへ連続していくように，湾曲していくものとする．また逆も同様である．

点 B, C の中点 N をとり，$NA = a$, $NB = b$

$$CE + BE = 2a - 2y, \text{そして } DA = x$$

としてこのとき x と y は二つの不定量である．その片方は不定のままとどまるものであり，この曲線のすべての点を描くだろう．また他方は曲線が必ず描画されるやり方でやがて決定される．そしてこのやり方を見出すために，まず点 F を探す．点 F とは，中心とみなされ，ここから点 E において曲線と接するような円をここから描くように，わたしが認める点である．つづいて，FC によって掛け合わされる直線 BE が，BF によって掛け合わされる CE に対するのと，HF が FG に対するのは等しくなり，ある透過媒質内で屈折される光線の傾きが他の媒質内で屈折される光線の傾きに対するのと等しくなる.[12]

$$BD = a - b - x, \sqrt{xx + aa + bb - 2ax + 2bx - 2ab}$$

$$CD = a + b - x, \sqrt{xx + aa + bb - 2ax - 2bx + 2ab}$$

$$BE = \frac{yy - 2ay + aa + bx - ab}{a - y}$$

[12] $FC \cdot BE : BF \cdot CE = HF : FG$

$$CE = \frac{yy - 2ay + aa - bx + ab}{a - y}$$

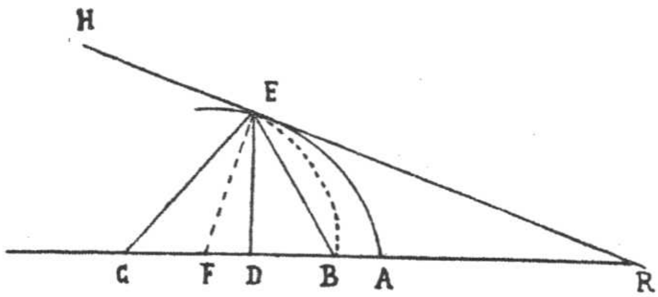
$$DE = \sqrt{\frac{\begin{array}{llll} y^4 & -4ay^3 & \left.\begin{array}{l} +5aa \\ -bb \\ -xx \\ <+2ax> \end{array}\right\} yy & \left.\begin{array}{l} +2axx \\ -4aax \\ +2abb \\ -2a^3 \end{array}\right\} y \quad \begin{array}{l} -aaxx \\ +bbxx \\ -2abbx \\ +2a^3x \end{array} \end{array}}{yy - 2ay + aa}}$$

いま，$NF = c$，そして $FE = d$ とおく．この 2 つの量 c と d は，各辺が決定している直角三角形 FDE が生じさせる方程式が

$$xx - 2ex + ee$$

とかならず等しくなることから見出し得る．同時に差を x とし同時に $e = x$ とすると，

$$FD = a - c - x, \text{または} \sqrt{xx + aa + cc - 2ax + 2cx - 2ac.[\cdots]}$$



[2]$CA = 5$, $BA = 1$ そして $AR = 5$ となるような点をおき，曲線 AE が描かれると想像する．この曲線は焦点 C[13]において固定された糸から出発して，C から E,B に至り，B からは E に引き返していく．つづいて，H の方向に無限に引き延ばされ，角 ERC が開いていけばいくほど[14]，延伸されていくものとする．

つねに以下のことが成り立つ．

[13] *funis*
[14] 開き方に比例しての意味.

$$ER = 5 + 7y,$$
$$EB = 1 + 5y,$$
$$EC = 5 - 3y,$$
$$DA = 2yy + 5y,$$
$$DE = \sqrt{-4y^4 - 20y^3 + 4yy + 20y};$$

つづいて $FA = \dfrac{29y+10}{4y+5}$ とおくと，中心を F とする円は，点 E において，与えられた曲線に接する．そして $FC = \dfrac{-9y+15}{4y+5}$ を $ER = 5+7y$ によって掛け合わすならば，その積は $CE = 5-3y$ によって掛け合わされた $FR = \dfrac{49y+35}{4y+5}$ と $3:7$ の関係になるであろう．ゆえに，曲線 A が透過立体を内部に含み，その中での反射が $3:7$ であるならば，点 R から発せられるすべての光線は，屈折を経て，C の方向に引っ張られる．

[3] いま，$AC = a, AR = a, AB = b, BE = b + y$ とすると，

$$RE = \frac{2by}{a} + y + a,$$

$$CE = \frac{2by}{a} - y + a,$$

$$AD = \frac{2byy}{aa} + y,$$

$$DE = \sqrt{-\frac{4bb}{a^4}y^4 - \frac{4b}{a^3}y^3 + \frac{4bb}{aa}yy + 4by},$$

$$FA = \frac{4bby + 2baa + aay}{4by + aa},$$

となり，ER による CF が CE による FR に対するように，$a-2b$ は $a+2b$ に対する.[15]

[4] いま，$AR = a, AB = b, AC = c, BE = b + y$ とすると，以下のようになる．

$$ER = \frac{3ay - cy + 4by + aa + ac}{a + c}$$

$$CE = \frac{+ay - 3cy + 4by + ac + cc}{a + c}$$

$$DA = \frac{4ayy - 4cyy + 8byy + 3aay + 3ccy - 2acy + 4aby - 4cby}{aa + 2ac + cc}$$

[15] $ER \cdot CF : CF \cdot CE = a - 2b : a + 2b$

$$FA = \frac{4aab + 4abb - 4bbc + 4bcc + aay + 8aby + 16bby + 2acy + ccy - 8bc.}{3aa + 3cc - 2ac + 4ab - 4bc + 8ay + 16by - 8cy}$$